

Kapitola 5

Integrální věty

5.1 Diferenciální operátory vektorové analýzy

Klíčová slova: skalární pole, vektorové pole, ekvipotenciály skalárního pole, gradient skalárního pole, divergence vektorového pole, rotace vektorového pole, operátor nabla, nevírové pole, nezřídlové pole, solenoidální pole, jednoduše souvislá oblast, potenciál vektorového pole, potenciální vektorové pole

5.1.1 Skalární a vektorové pole

Je-li v prostoru rozložena nějaká fyzikální veličina, k jejímuž popisu stačí v každém bodě prostoru zadat jeden číselný údaj, pak říkáme, že v prostoru je zadáno *skalární pole*. Takové skalární pole je tedy v prostoru $\mathbf{R}^n$ zadáno reálnou funkcí n reálných proměnných. Příkladem skalárního pole je např. pole potenciálu v okolí elektricky nabitého tělesa, teplotní pole apod. V dalším textu zpravidla ztotožňujeme skalární pole s funkcí, která ho popisuje. Množiny bodů prostoru $\mathbf{R}^n$, v nichž skalární funkce f nabývá dané konstantní hodnoty c , nazýváme *ekvipotenciálami skalárního pole f* . Např. ekvipotenciály skalárního pole $f(x, y) = x^2 + y^2$ v rovině $\mathbf{R}^2$ jsou kružnice $x^2 + y^2 = c$ pro $c > 0$, bod $(0, 0)$ pro $c = 0$ a prázdná množina pro $c < 0$.

Je-li v prostoru rozložena nějaká fyzikální veličina, která je v každém bodě prostoru popsána vektorem, pak říkáme, že v prostoru je zadáno *vektorové pole*. Takové vektorové pole v prostoru $\mathbf{R}^n$ je tedy zadáno reálnou vektorovou funkcí n reálných proměnných. Příklady vektorových polí jsou různá silová pole, např. gravitační pole Země, elektrostatické pole nabitého tělesa apod. V dalším textu budeme ztotožňovat vektorové pole s vektorovou funkcí, která ho popisuje.

Derivace zobrazení

V celé této kapitole budeme využívat řadu pojmů a tvrzení, s nimiž jsme se setkali v diferenciálním počtu funkcí více proměnných. Budeme pracovat se zobrazeními

$$\mathbf{g}: D_{\mathbf{g}} \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m,$$

a to nejčastěji na nějaké otevřené podmnožině G jejich definičního oboru $D_{\mathbf{g}}$. Připomeňme si proto nyní některé z těchto pojmů a tvrzení.

Jestliže zobrazení $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ má spojitě parciální derivace 1. řádu podle všech

proměnných v každém bodě $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G \subset D_{\mathbf{g}}^\circ$, pak maticovou funkci

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}), & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}), & \dots, & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}), & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}), & \dots, & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \dots & & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}), & \frac{\partial g_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}), & \dots, & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad (5.1)$$

nazýváme *Jacobiho maticí zobrazení* $\mathbf{g}$ v oblasti G . Je-li zobrazení $\mathbf{g}$ prosté v množině G a jeho Jacobiho matice $\mathbf{g}'(\mathbf{x})$ má v každém bodě množiny G hodnotu n , pak říkáme, že toto zobrazení je *regulární v množině* G . Je-li Jacobiho matice $\mathbf{g}'(\mathbf{x})$ čtvercová, pak její determinant nazýváme *jakobiánem zobrazení* $\mathbf{g}$.

O zobrazení $\mathbf{g}$ říkáme, že je třídy $\mathcal{C}^{(k)}$ na oblasti G právě tehdy, když každá jeho složka $g_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, je třídy $\mathcal{C}^{(k)}$ na oblasti G (tj. má v množině G spojitě všechny parciální derivace až do k -tého řádu včetně). Jsou-li $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ zobrazení třídy $\mathcal{C}^{(k)}$ na oblasti G , pak také jejich lineární kombinace $\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g}$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^{(k)}$ na oblasti G a pro příslušné Jacobiho matice platí rovnost

$$\mathbf{D}(\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g}) = \alpha\mathbf{D}\mathbf{f} + \beta\mathbf{D}\mathbf{g}. \quad (5.2)$$

Nechť $B \subset \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}^p$ jsou oblasti a nechť $\mathbf{g}: B \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\mathbf{f}: A \rightarrow \mathbf{R}^m$ jsou zobrazení třídy $\mathcal{C}^{(k)}$ takové, že $\mathbf{f}(A) \subset B$. Pak také složené zobrazení $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}: A \rightarrow \mathbf{R}^n$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^{(k)}$ na oblasti A , a je-li $k \geq 1$, pak pro Jacobiho matice těchto zobrazení platí

$$\mathbf{D}\mathbf{h} = \mathbf{D}\mathbf{g}\mathbf{D}\mathbf{f}, \quad (5.3)$$

kde vpravo je součin příslušných Jacobiho matic, tj. pro každý bod $\mathbf{x} \in A$ platí

$$\mathbf{D}\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (5.4)$$

Diferenciální operátory

V případě Jacobiho matice skalární funkci $g: D_g \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ píšeme místo symbolu $g'(\mathbf{x})$ symbol $\text{grad } g(\mathbf{x})$ a mluvíme o *gradientu* skalární funkce $g(\mathbf{x})$

$$\text{grad } g(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial g}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right), \quad (5.5)$$

nebo prostě

$$\text{grad } g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right). \quad (5.6)$$

Dále definujeme *divergenci* vektorového pole $\mathbf{g}: D_{\mathbf{g}} \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, jejíž složky jsou funkce třídy $\mathcal{C}^{(1)}$, předpisem

$$\text{div } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}), \quad (5.7)$$

nebo prostě

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial g_n}{\partial x_n}. \quad (5.8)$$

Uvědomme si, že divergence vektorového pole je skalární funkce.

Nechť $\mathbf{f}$ je vektorové pole třídy $\mathcal{C}^{(1)}$ na oblasti $G \subset \mathbf{R}^n$. Budeme říkat, že vektorové pole $\mathbf{f}$ je *nezřídlové na oblasti G* (nebo také *solenoidální na oblasti G*) právě tehdy, když $\operatorname{div} \mathbf{f} = \mathbf{0}$ pro všechna $\mathbf{x} \in G$.

Pro vektorovou funkci $\mathbf{g}: D_{\mathbf{g}} \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ třídy $\mathcal{C}^{(1)}$ definujeme diferenciální operátor *rotace* vektorového pole $\mathbf{g}$ předpisem

$$\operatorname{rot} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}) - \frac{\partial g_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}), \frac{\partial g_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) - \frac{\partial g_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right), \quad (5.9)$$

nebo prostě

$$\operatorname{rot} \mathbf{g} = \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3}, \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1}, \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right). \quad (5.10)$$

Předpis (5.10) se často zapisuje formálně ve tvaru determinantu

$$\operatorname{rot} \mathbf{g} \equiv \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1}, & \frac{\partial}{\partial x_2}, & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ g_1, & g_2, & g_3 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Rozvineme-li tento determinant formálně podle první řádky, pak koeficient u vektoru $\mathbf{e}_k$ je k -tá složka funkce $\operatorname{rot} \mathbf{g}$. Přitom formálním součinem operátoru parciální derivace a funkce rozumíme příslušnou parciální derivaci této funkce

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot g_j \equiv \frac{\partial g_j}{\partial x_i}.$$

Vektorové pole $\mathbf{f}$ třídy $\mathcal{C}^{(1)}$ na oblasti $G \subset \mathbf{R}^n$ splňující podmínku $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$ pro všechna $\mathbf{x} \in G$ se nazývá *nevírové*.

Pro formální vektor tvořící druhou řádku v (5.11) se používá název *operátor nabla* a zapisuje se pomocí symbolu

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right). \quad (5.12)$$

Uvědomme si, že pak můžeme psát

$$\nabla g = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_3} \right) = \operatorname{grad} g. \quad (5.13)$$

Příklady

1. Máme určit divergenci vektorového pole $\mathbf{g} = \text{grad } f$, kde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Řešení

Podle (5.5) je

$$\text{grad } f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) = (2x, 2y, 2z).$$

Podle (5.7) je

$$\text{div } \mathbf{g}(x, y, z) = \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial g_3}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial 2x}{\partial x} + \frac{\partial 2y}{\partial y} + \frac{\partial 2z}{\partial z} = 6.$$

2. Máme určit rotaci vektorového pole

$$\mathbf{g}(x, y, z) = (2x + z, 3x^2y, 4yz^2).$$

Řešení

Podle (5.11) je

$$\text{rot } \mathbf{g} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x + z, & 3x^2y, & 4yz^2 \end{pmatrix} = (4z^2 - 0, 1 - 0, 6xy - 0) = (4z^2, 1, 6xy).$$

3. Nechť $\mathbf{r}: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ značí identické zobrazení $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ a nechť skalární funkce $r: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^1$ je norma zobrazení $\mathbf{r}$, tj. $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Máme najít $\text{grad } r$, $\text{div } \mathbf{r}$ a $\text{rot } \mathbf{r}$.

Řešení

Výpočet provedeme ve třech krocích.

- a) Podle (5.6) je

$$\text{grad } r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

- b) Podle (5.7) je

$$\text{div } \mathbf{r}(x, y, z) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

- c) Podle (5.11) je

$$\text{rot } \mathbf{r} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial z} \\ x, & y, & z \end{pmatrix} = (0 - 0, 0 - 0, 0 - 0) = (0, 0, 0) = \mathbf{o}.$$

Potenciální vektorové pole

Nechť $\mathbf{f}$ je spojitě vektorové pole na oblasti $G \subset \mathbf{R}^n$. Budeme říkat, že vektorové pole $\mathbf{f}$ je *potenciální na oblasti G* právě tehdy, když existuje reálná funkce V třídy $\mathcal{C}^{(1)}$ na oblasti $G \subset \mathbf{R}^n$ taková, že platí

$$\text{grad } V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (5.14)$$

Každou takovou funkci V budeme nazývat *potenciálem vektorového pole $\mathbf{f}$ na oblasti G* . V prostoru $\mathbf{R}^3$ můžeme vektorovou rovnost (5.14) zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1}(\mathbf{x}) &= f_1(\mathbf{x}) \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in G, \\ \frac{\partial V}{\partial x_2}(\mathbf{x}) &= f_2(\mathbf{x}) \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in G, \\ \frac{\partial V}{\partial x_3}(\mathbf{x}) &= f_3(\mathbf{x}) \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in G. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Předpokládejme dále, že vektorové pole $\mathbf{f}$ je třídy $\mathcal{C}^{(1)}$ na oblasti G . Pak skalární pole $V(\mathbf{x})$ je třídy $\mathcal{C}^{(2)}$ na oblasti G , takže nezáleží na pořadí, v němž počítáme parciální derivace druhého řádu. Aplikujeme-li nyní vhodné parciální derivace na obě strany rovností (5.15), dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in G, \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in G, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_3}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in G. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Ukázali jsme tak, že když vektorové pole $\mathbf{f}$ třídy $\mathcal{C}^{(1)}$ na oblasti $G \subset \mathbf{R}^3$ je potenciální na množině G , pak platí rovnosti

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in G, \quad (5.17)$$

tj. rotace takového vektorového pole je nulová v každém bodě oblasti G , a tedy toto vektorové pole je nevírové.

V případě rovinného vektorového pole se rovnosti (5.17) redukují na jedinou rovnost

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in G. \quad (5.18)$$

Ukázali jsme, že každé spojitě diferencovatelné potenciální vektorové pole je nevírové. Obrácené tvrzení platí jen za předpokladu, že oblast G má ještě další vlastnost, kterou nyní popíšeme.

Připomeňme, že pod oblastí $G \subset \mathbf{R}^n$ rozumíme souvislou otevřenou množinu, tj. otevřenou množinu, kterou nelze vyjádřit jako sjednocení dvou otevřených disjunktních množin.

Je-li G oblast v rovině $\mathbf{R}^2$, pak říkáme, že je *jednoduše souvislá v rovině* právě tehdy, když každou uzavřenou křivku $\mathcal{K} \subset G$ můžeme uvnitř množiny G stáhnout spojitě do jednoho bodu. Je-li G oblast v prostoru $\mathbf{R}^3$ pak říkáme, že je *jednoduše souvislá v prostoru* právě tehdy, když každou uzavřenou křivku $\mathcal{K} \subset G$ a každou uzavřenou plochu $\mathcal{P} \subset G$ můžeme uvnitř množiny G stáhnout spojitě do jednoho bodu.

Obě tyto definice můžeme velice volně formulovat tak, že souvislá množina je jednoduše souvislá právě tehdy, když "neobsahuje žádné díry".

Dá se ukázat, že každé spojitě diferencovatelné nevírové vektorové pole je potenciální. Jinými slovy, je-li oblast G jednoduše souvislá a vektorové pole $\mathbf{f}$ je spojitě diferencovatelné na oblasti G , pak toto vektorové pole je potenciální právě tehdy, když $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ pro každé $\mathbf{x} \in G$.

Příklady

1. Máme ukázat, že vektorové pole

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_2, x_1), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2, \quad (5.19)$$

je potenciální a máme rovněž najít jeho potenciál.

Řešení

Zřejmě celá rovina $\mathbf{R}^2$ je jednoduše souvislá oblast a naše vektorové pole $\mathbf{f}$ je třídy $\mathcal{C}^{(1)}$. Rovnost (5.18) je splněna, jelikož je

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2,$$

takže pole $\mathbf{f}$ je potenciální.

Nyní najdeme nějaký jeho potenciál V . Podle definiční rovnosti (5.14) musí platit rovnosti

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1}(\mathbf{x}) &= x_2, \\ \frac{\partial V}{\partial x_2}(\mathbf{x}) &= x_1. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Z první rovnosti integrací dostáváme

$$V(\mathbf{x}) = x_1 x_2 + \varphi(x_2), \quad (5.21)$$

kde $\varphi(x_2)$ je nějaká funkce proměnné x_2 (tj. integrační konstanta po integraci funkce dvou proměnných podle první proměnné). Zderivujeme obě strany této rovnosti podle proměnné x_2 a dosadíme do druhé rovnosti v (5.20). Dostaneme

$$x_1 + \varphi'(x_2) = x_1, \quad \text{tj. } \varphi'(x_2) = 0. \quad (5.22)$$

Odtud integrací dostáváme $\varphi(x_2) = 0$ (integrační konstantu volíme 0). Nyní stačí dosadit do (5.21), abychom dostali hledaný potenciál

$$V(\mathbf{x}) = x_1 x_2, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2. \quad (5.23)$$

2. Máme ukázat, že vektorové pole

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (2x_1x_2, x_1^2 - x_3, 2x_3 - x_2), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3, \quad (5.24)$$

je potenciální a máme rovněž najít jeho potenciál.

Řešení

Prostor $\mathbf{R}^3$ je jednoduše souvislá oblast a vektorové pole $\mathbf{f}$ je zřejmě třídy $\mathcal{C}^{(1)}$. Snadno se ověří, že platí rovnosti (5.17). Je totiž

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = 2x_1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = -1, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3.$$

Vidíme, že pole $\mathbf{f}$ je potenciální. Máme najít nějaký jeho potenciál V . Podle definice (5.14) musí platit rovnosti

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1}(\mathbf{x}) &= 2x_1x_2, \\ \frac{\partial V}{\partial x_2}(\mathbf{x}) &= x_1^2 - x_3, \\ \frac{\partial V}{\partial x_3}(\mathbf{x}) &= 2x_3 - x_2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Z první rovnosti integrací dostáváme

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2x_2 + \varphi(x_2, x_3), \quad (5.26)$$

kde $\varphi(x_2, x_3)$ je nějaká funkce dvou proměnných (tj. integrační konstanta po integraci funkce tří proměnných podle první proměnné). Zderivujeme obě strany této rovnosti podle proměnné x_2 a dosadíme do druhé rovnosti v (5.25). Dostaneme

$$x_1^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_2, x_3) = x_1^2 - x_3, \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_2, x_3) = -x_3. \quad (5.27)$$

Odtud integrací podle proměnné x_2 plyne

$$\varphi(x_2, x_3) = -x_2x_3 + \vartheta(x_3), \quad (5.28)$$

kde $\vartheta(x_3)$ je nějaká funkce proměnné x_3 . Nyní dosadíme z (5.28) do (5.26), takže je

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2x_2 - x_2x_3 + \vartheta(x_3). \quad (5.29)$$

Takto vyjádřenou funkci V zderivujeme podle proměnné x_3 a dosadíme do třetí rovnosti v (5.25). Dostaneme

$$-x_2 + \vartheta'(x_3) = 2x_3 - x_2 \quad \text{tj.} \quad \vartheta'(x_3) = 2x_3.$$

Odtud integrací dostáváme $\vartheta(x_3) = x_3^2$ (integrační konstantu volíme 0). Nyní stačí dosadit do (5.29), abychom dostali hledaný potenciál

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2x_2 - x_2x_3 + x_3^2, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3. \quad (5.30)$$

Úlohy

1. Nalezněte gradient skalárního pole

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$$

v bodech: a) $\mathbf{o} = (0, 0, 0)$, b) $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, c) $\mathbf{b} = (2, 0, 1)$. Ve kterém bodě nabývá grad f hodnotu $\mathbf{o}$?

[a) grad $f(\mathbf{o}) = (3, -2, -6)$; b) grad $f(\mathbf{a}) = (6, 3, 0)$; c) grad $f(\mathbf{b}) = (7, 0, 0)$; grad $f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ v bodě $\mathbf{x} = (-2, 1, 1)$.]

2. Ukažte, že dané vektorové pole
- $\mathbf{f}(\mathbf{x})$
- je potenciální a nalezněte jeho potenciál
- $V(\mathbf{x})$
- .

(a) $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 + 2xy - y^2, x^2 - 2xy - y^2)$. $[V(x, y) = x^3/3 + x^2y - xy^2 - y^2/3 + C.]$

(b) $\mathbf{f}(x, y) = \left(-\frac{y^2}{(x+y)^2} - \frac{1}{x}, \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x+y)^2} \right)$. $\left[V(x, y) = \ln \frac{y}{x} - \frac{xy}{x+y} + C. \right]$

(c) $\mathbf{f}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$. $[V(x, y, z) = xyz + C.]$

3. Najděte funkci
- $u(x, y)$
- , znáte-li její diferenciál
- du
- .

(a) $du = (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy$. $\left[u(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} \right]$

(b) $du = \frac{y dx - x dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$. $\left[u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3x - y}{2\sqrt{2}y} \right]$

(c) $du = \frac{(x^2 + 2xy + 5y^2) dx + 2(x^2 - 2xy - y^2) dy}{(x+y)^2}$. $\left[u(x, y) = \frac{x^2 + 3xy - 2y^2}{x+y} \right]$

(d) $du = e^x [e^y(x - y + 2) + y] dx + e^x [e^y(x - y) + 1] dy$.
 $[u(x, y) = e^x(e^y(x - y + 1) + y)]$

4. Najděte funkci
- $u(x, y, z)$
- , znáte-li její diferenciál
- du
- .

(a) $du = (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz$.
 $\left[u(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} - 2xyz \right]$

(b) $du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z} \right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2} \right) dy - \frac{xy}{z^2} dz$. $\left[u(x, y, z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} \right]$

(c) $du = \frac{(x + y - z) dx + (x + y - z) dy + (x + y + z) dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}$.
 $\left[u(x, y, z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy) - \operatorname{arctg} \frac{x+y}{z} \right]$

V následujících úlohách předpokládáme, že $G \subset \mathbf{R}^3$ je daná otevřená množina, $\mathbf{f}, \mathbf{g}: G \rightarrow \mathbf{R}^3$ jsou dané vektorové funkce takové, že všechny jejich složky f_i, g_i jsou třídy $\mathcal{C}^{(1)}$ v množině G a že $h: G \rightarrow \mathbf{R}^1$ je daná skalární funkce třídy $\mathcal{C}^{(1)}$ v množině G . Dále nechť $\mathbf{r}: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ značí identické zobrazení, tj. $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$

představuje *radiusvektor* bodu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ a necht' skalární funkce $r: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ značí normu zobrazení $\mathbf{r}$, tj. platí $r(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Necht' konečně $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou libovolné dva vektory z $\mathbf{R}^3$ a necht' $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ značí jejich skalární součin.

5. Máme ukázat, že pro grad platí následující rovnosti.

- (a) $\text{grad } r^n = nr^{n-2}\mathbf{r}$;
- (b) $\text{grad } \frac{a}{r} = -\frac{a}{r^3}\mathbf{r}, \quad a \in \mathbf{R}$;
- (c) $\text{grad}(\mathbf{u} \bullet \mathbf{r}) = \mathbf{u}$;
- (d) $\text{grad}(\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{r}) = \mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$;
- (e) $\text{grad } \ln r = \frac{\mathbf{r}}{r^2}$;
- (f) $\text{grad}(\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{r})) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$;
- (g) $\text{grad } \|\mathbf{u} \times \mathbf{r}\| = \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{u}}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{r}\|}$;
- (h) $\text{grad}((\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{r})) = ((\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{v}) + ((\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{u})$;
- (i) $\text{grad } h(r) = \frac{h'(r)}{r}\mathbf{r}$.

6. Máme ukázat, že pro div platí následující rovnosti.

- (a) $\text{div } a\mathbf{r} = 3a, \quad a \in \mathbf{R}$;
- (b) $\text{div } r^n\mathbf{u} = nr^{n-2}(\mathbf{r} \bullet \mathbf{u}), \quad n \in \mathbf{N}$;
- (c) $\text{div } r^{-3}\mathbf{r} = 0$;
- (d) $\text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{r}) = 0$;
- (e) $\text{div}((\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v}) = -2\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$;
- (f) $\text{div}((\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r}) = -2\mathbf{u} \bullet \mathbf{r}$;
- (g) $\text{div}((\mathbf{v} \bullet \mathbf{r})\mathbf{u}) = \text{div}((\mathbf{u} \bullet \mathbf{r})\mathbf{v}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$;
- (h) $\text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{f}) = -\mathbf{u} \bullet \text{rot } \mathbf{f}$;
- (i) $\text{div}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \bullet \text{rot } \mathbf{f} - \mathbf{f} \bullet \text{rot } \mathbf{g}$;
- (j) $\text{div}(h\mathbf{f}) = \mathbf{f} \bullet \text{grad } h + h \text{div } \mathbf{f}$;
- (k) $\text{div}(h(r)\mathbf{r}) = 3h(r) + h'(r)r$;

7. Máme ukázat, že pro rot platí následující rovnosti.

- (a) $\text{rot}((\mathbf{u} \bullet \mathbf{r})\mathbf{r}) = \mathbf{u} \times \mathbf{r}$;
- (b) $\text{rot}((\mathbf{u} \bullet \mathbf{r})\mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$;
- (c) $\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{u}$;
- (d) $\text{rot}((\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$;
- (e) $\text{rot}((\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}) = 3\mathbf{u} \times \mathbf{r}$;
- (f) $\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{f}) = \mathbf{u} \text{div } \mathbf{f} - (\mathbf{D}\mathbf{f})\mathbf{u}$;

- (g) $\operatorname{rot}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\mathbf{D}\mathbf{f})\mathbf{g} - (\mathbf{D}\mathbf{g})\mathbf{f} + \mathbf{f} \operatorname{div} \mathbf{g} - \mathbf{g} \operatorname{div} \mathbf{f}$;
- (h) $\operatorname{rot}(h\mathbf{f}) = h \operatorname{rot} \mathbf{f} + \operatorname{grad} h \times \mathbf{f}$;
- (i) $\operatorname{rot}(h(r)\mathbf{r}) = \mathbf{o}$.

8. Necht funkce h, f_1, f_2, f_3 jsou třídy $\mathcal{C}^{(2)}$ na množině $G \subset \mathbf{R}^3$. Máme ukázat, že pro všechna $\mathbf{x} \in G$ platí rovnosti

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} h(\mathbf{x}) = \mathbf{o}; \quad (5.31)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} h(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2}(\mathbf{x}); \quad (5.32)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}. \quad (5.33)$$

5.2 Použití křivkového integrálu

Klíčová slova: vnitřní oblast křivky $\mathcal{K}$, vnější oblast křivky $\mathcal{K}$, kladně orientovaná křivka, záporně orientovaná křivka, Greenova věta, Greenův vzorec, orientovaná cesta, uzavřená cesta, opačná cesta, trajektorie cesty, křivkový integrál po orientované cestě, cirkulace vektorového pole, nezávislost integrálu na cestě, konzervativní vektorové pole

5.2.1 Křivkový integrál po orientované cestě

Orientovaná cesta

V aplikacích při řešení fyzikálních a technických problémů zpravidla nevystačíme s křivkovým integrálem druhého druhu počítaným pouze po orientované křivce. Může se například stát, že hmotný bod se při svém pohybu v daném vektorovém poli pohybuje po nějakém oblouku a pak se po témže oblouku vrací. Abychom mohli postihnout i takové situace, zavedeme pojem orientované cesty.

Necht $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_r$ jsou orientované oblouky v $\mathbf{R}^n$ takové, že koncový bod oblouku $\mathcal{O}_k$ je počátečním bodem oblouku $\mathcal{O}_{k+1}$ pro všechna $k = 1, 2, \dots, r-1$. Pak uspořádanou r -tici oblouků

$$\mathcal{C} = (\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_r) \quad (5.34)$$

nazýváme *orientovanou cestou* v $\mathbf{R}^n$. Počáteční bod prvního oblouku $\mathcal{O}_1$ nazýváme *počátečním bodem orientované cesty* $\mathcal{C}$ a koncový bod posledního oblouku $\mathcal{O}_r$ nazýváme *koncovým bodem orientované cesty* $\mathcal{C}$. Splývá-li koncový bod posledního oblouku $\mathcal{O}_r$ s počátečním bodem prvního oblouku $\mathcal{O}_1$, pak říkáme, že orientovaná cesta $\mathcal{C}$ je *uzavřená*. Cestu

$$-\mathcal{C} = (-\mathcal{O}_r, -\mathcal{O}_{r-1}, \dots, -\mathcal{O}_1) \quad (5.35)$$

nazýváme *cestou opačnou* k cestě $\mathcal{C}$. Množinu

$$|\mathcal{C}| = \bigcup_{k=1}^r \mathcal{O}_k \quad (5.36)$$

nazýváme *trajektorií* cesty $\mathcal{C}$.

Křivkový integrál po orientované cestě

Nechť $\mathcal{C}$ je orientovaná cesta (5.34) a nechť $\mathbf{f}$ je spojitě vektorové pole definované na trajektorii $|\mathcal{C}|$ cesty $\mathcal{C}$. Existují-li křivkové integrály $\int_{\mathcal{C}_k} \mathbf{f} \, ds$, $k = 1, 2, \dots, r$, pak číslo

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \, ds = \sum_{k=1}^r \int_{\mathcal{C}_k} \mathbf{f} \, ds \quad (5.37)$$

nazýváme *křivkovým integrálem 2. druhu funkce $\mathbf{f}$ po orientované cestě $\mathcal{C}$* (nebo stručně *křivkovým integrálem po orientované cestě*).

Je-li orientovaná cesta $\mathcal{C}$ uzavřená, pak pro integrál funkce $\mathbf{f}$ po orientované cestě $\mathcal{C}$ používáme označení

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \, ds \equiv \oint_{\mathcal{C}} f_1(\mathbf{x}) \, dx_1 + f_2(\mathbf{x}) \, dx_2 + \dots + f_n(\mathbf{x}) \, dx_n \quad (5.38)$$

a nazýváme jej *cirkulací vektorového pole $\mathbf{f}$ podél uzavřené orientované cesty $\mathcal{C}$* .

Nezávislost křivkového integrálu na cestě; konzervativní vektorové pole

Nechť $\mathbf{f}$ je spojitě vektorové pole definované v nějaké oblasti $G \subset \mathbf{R}^n$. Říkáme, že *křivkový integrál 2. druhu funkce $\mathbf{f}$ nezávisí v oblasti G na orientované cestě $\mathcal{C}$* právě tehdy, když pro každé dvě orientované cesty $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ ležící v oblasti G a mající společný počáteční a koncový bod platí rovnost

$$\int_{\mathcal{C}_1} f_1(\mathbf{x}) \, dx_1 + f_2(\mathbf{x}) \, dx_2 + \dots + f_n(\mathbf{x}) \, dx_n = \int_{\mathcal{C}_2} f_1(\mathbf{x}) \, dx_1 + f_2(\mathbf{x}) \, dx_2 + \dots + f_n(\mathbf{x}) \, dx_n. \quad (5.39)$$

Jestliže křivkový integrál 2. druhu spojitě vektorového pole $\mathbf{f}$ definovaného v nějaké oblasti $G \subset \mathbf{R}^n$ nezávisí v oblasti G na orientované cestě $\mathcal{C}$, pak říkáme že *pole $\mathbf{f}$ je konzervativní v oblasti G* .

Kriterium konzervativnosti pole

Křivkový integrál 2. druhu vektorového pole $\mathbf{f}$ nezávisí v oblasti G na orientované cestě $\mathcal{C}$ právě tehdy, když cirkulace vektorového pole $\mathbf{f}$ podél libovolné uzavřené orientované cesty $\mathcal{C}$ je rovna nule.

Skutečně, z každých dvou orientovaných cest $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ se společným počátečním a koncovým bodem lze vytvořit uzavřenou cestu pomocí cest $\mathcal{C}_1$ a $-\mathcal{C}_2$. Obráceně, každou uzavřenou cestu lze rozložit na dvě orientované cesty $\mathcal{C}_1$ a $-\mathcal{C}_2$, kde cesty $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ mají společný počáteční a koncový bod.

Výpočet integrálu potenciálního vektorového pole

Nyní ukážeme, jak nám znalost potenciálu umožňuje velice jednoduše počítat orientované křivkové integrály po orientované cestě. Předpokládejme, že je dáno potenciální vektorové pole $\mathbf{f}$ v oblasti G a nechť V je jeho potenciál. Nechť $\mathcal{C}$ je orientovaná cesta v oblasti G a nechť $\mathbf{a}$, resp. $\mathbf{b}$ je počáteční, resp. koncový bod cesty $\mathcal{C}$. Předpokládejme nejdříve, že cesta $\mathcal{C}$ je oblouk a že $\mathbf{g}(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ je její parametrizace. Pro jednoduchost zápisu předpokládejme, že se vše odehrává v rovině $\mathbf{R}^2$. Pak je

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(t), & dx_1 &= \dot{g}_1(t) dt, \\ x_2 &= g_2(t), & dx_2 &= \dot{g}_2(t) dt, & t &\in (\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Podle definice orientovaného křivkového integrálu je

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{f} d\mathbf{s} &= \int_C f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy = \\
 &= \int_C \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} dy = \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial V(g_1(t), g_2(t))}{\partial x} \dot{g}_1(t) + \frac{\partial V(g_1(t), g_2(t))}{\partial y} \dot{g}_2(t) \right) dt = \quad (5.41) \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dV}{dt}(g_1(t), g_2(t)) dt = [V(g_1(t), g_2(t))]_{\alpha}^{\beta} = V(\mathbf{g}(\beta)) - V(\mathbf{g}(\alpha)) = \\
 &= V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}).
 \end{aligned}$$

Platí tedy rovnost

$$\int_C f_1(\mathbf{x}) dx_1 + f_2(\mathbf{x}) dx_2 = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}). \quad (5.42)$$

Analogicky se ukáže, že v prostoru $\mathbf{R}^3$ platí rovnost

$$\int_C f_1(\mathbf{x}) dx_1 + f_2(\mathbf{x}) dx_2 + f_3(\mathbf{x}) dx_3 = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}). \quad (5.43)$$

Je-li cesta $\mathcal{C}$ tvořena více oblouky, aplikujeme odvozené tvrzení na každý oblouk zvlášť a takto vypočítané integrály sečteme. Jelikož koncový bod předcházejícího oblouku je současně počátečním bodem následujícího oblouku, dostaneme po sečtení na pravé straně požadovaný rozdíl hodnot potenciálu v koncovém a počátečním bodě cesty.

Právě dokázaná rovnost (5.41) nás vede k tomu, abychom při zápisu orientovaného integrálu potenciálního vektorového pole po orientované cestě z bodu $\mathbf{a}$ do bodu $\mathbf{b}$ používali místo zápisu (5.43) zápis

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f} d\mathbf{s} \equiv \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f_1(\mathbf{x}) dx_1 + f_2(\mathbf{x}) dx_2 + f_3(\mathbf{x}) dx_3 = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}). \quad (5.44)$$

Příklady

1. Máme najít hodnotu integrálu $\int_C x_2 dx_1 + x_1 dx_2$ po libovolné orientované cestě $\mathcal{C}$ v rovině, jejímž počátečním bodem je bod $\mathbf{a} = (2, 2)$ a koncovým bodem bod $\mathbf{b} = (-2, 2)$.

Řešení

Vektorové pole $\mathbf{f} = (x_2, x_1)$ je pole (5.19) a tam bylo ukázáno, že toto pole je potenciální v celé rovině a že jeho potenciál je $V(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Můžeme tedy použít rovnost (5.42) a dostaneme

$$\int_C x_2 dx_1 + x_1 dx_2 = V(-2, 2) - V(2, 2) = -8.$$

2. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_C 2x_1x_2 \, dx_1 + (x_1^2 - x_3) \, dx_2 + (2x_3 - x_2) \, dx_3$$

po libovolné orientované cestě $\mathcal{C}$ v prostoru $\mathbf{R}^3$, jejímž počátečním bodem je bod $\mathbf{a} = (2, 2, 0)$ a koncovým bodem bod $\mathbf{b} = (0, -2, 2)$.

Řešení

Vektorové pole $\mathbf{f} = (2x_1x_2, x_1^2 - x_3, 2x_3 - x_2)$ je pole (5.24) a bylo ukázáno, že toto pole je potenciální v celém prostoru a že jeho potenciál je $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 - x_2x_3 + x_3^2$. Můžeme tedy použít rovnost (5.43) a dostaneme

$$\int_C 2x_1x_2 \, dx_1 + (x_1^2 - x_3) \, dx_2 + (x_1 - x_2) \, dx_3 = V(0, -2, 2) - V(2, 2, 0) = 0.$$

Úlohy

1. V následujících úlohách ukažte, že integrand je diferenciálem nějaké funkce $u = u(x, y)$. Nalezněte tuto funkci a pomocí ní spočítejte daný integrál po libovolné cestě s daným počátečním a koncovým bodem.

$$(a) \int_{(-1,2)}^{(2,3)} x \, dy + y \, dx. \quad [u(x, y) = xy; 8]$$

$$(b) \int_{(0,1)}^{(3,-4)} x \, dx + y \, dy. \quad \left[u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2); 12 \right]$$

$$(c) \int_{(0,1)}^{(2,3)} (x + y) \, dx + (x - y) \, dy. \quad \left[u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2; 4 \right]$$

$$(d) \int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x - y)(dx - dy). \quad \left[u(x, y) = \frac{1}{2}(x - y)^2; -2 \right]$$

$$(e) \int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y \, dx - x \, dy}{x^2}, \text{ kde cesta neprotíná osu } y. \quad \left[u(x, y) = -\frac{y}{x}; -\frac{3}{2} \right]$$

$$(f) \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x \, dx + y \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ kde cesta neprochází počátkem.} \quad [u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}; 9]$$

$$(g) \int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3) \, dx + (6x^2y^2 - 5y^4) \, dy \quad \left[\frac{1}{5}x^5 + 2x^2y^3 - y^5; 62 \right]$$

$$(h) \int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x \, dy - y \, dx}{(x - y)^2}, \text{ kde cesta neprotíná přímku } y = x. \quad \left[u(x, y) = \frac{y}{x - y}; 1 \right]$$

$$(i) \int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy, \text{ kde cesta neprotíná osu } y.$$

$$\left[u = x + y \sin \frac{y}{x}; 1 + \pi \right]$$

$$(j) \int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x (\cos y dx - \sin y dy).$$

$$[u = e^x \cos y; e^a \cos b - 1]$$

2. Dokažte, že je-li $f(u)$ spojitá funkce a $\mathcal{K}$ po částech hladká uzavřená křivka, je $\oint_{\mathcal{K}} f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0$.
3. V následujících úlohách ukažte, že integrand je diferenciálem nějaké funkce $u = u(x, y, z)$. Nalezněte tuto funkci a pomocí ní spočítejte daný integrál po libovolné cestě s daným počátečním a koncovým bodem.

$$(a) \int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x dx + y^2 dy - z^3 dz.$$

$$\left[u(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{z^4}{4}; -53 - \frac{7}{12} \right]$$

$$(b) \int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz dx + xz dy + xy dz.$$

$$[u(x, y, z) = xyz; 0]$$

$$(c) \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \text{ kde } x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2, x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = b^2, a > 0, b > 0.$$

$$[u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; b - a]$$

$$(d) \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(x + y + z)(dx + dy + dz), \text{ kde } f \text{ je spojitá funkce.}$$

$$[u(x, y, z) = F(x + y + z); F'(u) = f(u); F(x_2 + y_2 + z_2) - F(x_1 + y_1 + z_1)]$$

$$(e) \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)(x dx + y dy + z dz), \text{ kde } f \text{ je spojitá funkce.}$$

$$\left[u(x, y, z) = F\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right); F'(r) = rf(r); F\left(\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}\right) - F\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\right) \right]$$

5.2.2 Greenova věta

Orientace uzavřené křivky

Připomeňme si nejdříve některé pojmy a tvrzení, týkající se křivky a její orientace, které jsme uvedli na začátku kapitoly o dvojném integrálu.

Je-li $\mathcal{O}$ libovolný oblouk v $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{g}(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, jeho parametrizace, pak podle definice má vektorová funkce $\mathbf{g}(t)$ spojitou a nenulovou derivaci v každém bodě t intervalu $\langle a, b \rangle$.

Vektor $\dot{\mathbf{g}}(t)$, $t \in (a, b)$, je tečným vektorem oblouku $\mathcal{O}$ v bodě $\mathbf{g}(t)$. Parametrizace tedy určuje jednoznačně vektorové pole tečných vektorů $\dot{\mathbf{g}}(t)$, a tím i směrové vektory

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{g}(t)) = \frac{\dot{\mathbf{g}}(t)}{\|\dot{\mathbf{g}}(t)\|}, \quad t \in (a, b), \quad (5.45)$$

souhlasné se směrem, v němž se pohybuje bod $\mathbf{g}(t)$ po oblouku $\mathcal{O}$, jestliže se parametr t mění od hodnoty a do hodnoty b ve směru rostoucího parametru t . Tohoto směrového pole jsme využívali k popisu orientace oblouku $\mathcal{O}$.

Jsou-li $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_r$ oblouky v $\mathbf{R}^n$ s parametrizacemi $\mathbf{g}_k : \langle a_k, b_k \rangle \rightarrow \mathbf{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, r$, takové, že žádné tři oblouky nemají společný bod, dva různé oblouky se buď neprotínají nebo mají společný nejvýše některý ze svých krajních bodů, a konečně pro krajní body oblouků platí $\mathbf{g}_k(b_k) = \mathbf{g}_{k+1}(a_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots, r-1$, pak množina

$$\mathcal{K} = \bigcup_{k=1}^r \mathcal{O}_k \quad (5.46)$$

se nazývá *křivka* v $\mathbf{R}^n$.

Poznamenejme, že takto zavedený pojem křivky se shoduje s pojmem prosté po částech hladké křivky, používaným v řadě učebních textů. Je-li $\mathbf{g}_1(a_1) = \mathbf{g}_k(b_k)$, pak říkáme, že křivka $\mathcal{K}$ je *uzavřená*. V opačném případě říkáme, že křivka je *jednoduchá*. Je-li křivka $\mathcal{K}$ jednoduchá, pak její orientaci určujeme například volbou počátečního a koncového bodu. Orientaci, při níž je $\mathbf{g}_1(a_1)$ počátečním a $\mathbf{g}_k(b_k)$ koncovým bodem nazýváme *orientací křivky $\mathcal{K}$ indukovanou její parametrizací*. Tato orientace je dána tečným vektorem $\dot{\mathbf{g}}_k(t)$ libovolného oblouku $\mathcal{O}_k$ v jeho libovolném bodě $\mathbf{g}_k(t)$, $t \in (a_k, b_k)$. Také orientace uzavřené křivky může být zadána volbou parametrizace. Každá křivka má dvě navzájem opačné orientace.

Orientace rovinné křivky

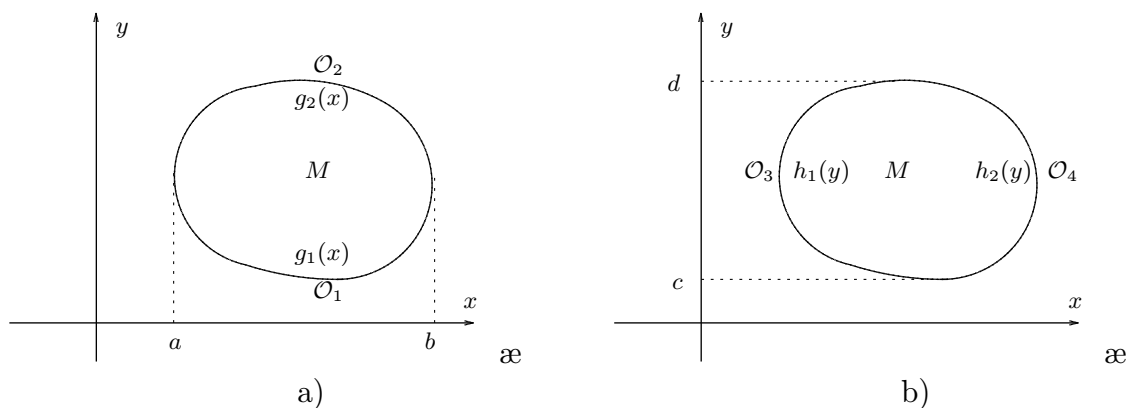
Podle známé Jordanovy věty z obecné topologie platí, že každá uzavřená křivka $\mathcal{K}$ v rovině $\mathbf{R}^2$ rozděluje rovinu na dvě disjunktní oblasti, z nichž jedna je omezená a druhá neomezená, přičemž křivka $\mathcal{K}$ je jejich společnou hranicí. Omezenou oblast nazýváme *vnitřní oblastí křivky $\mathcal{K}$* a neomezenou oblast nazýváme *vnější oblastí křivky $\mathcal{K}$* . Budeme říkat, že křivka $\mathcal{K}$ je *kladně orientovaná* právě tehdy, když při pohybu po křivce ve směru této orientace leží vnitřní oblast křivky na levé straně. V opačném případě říkáme, že křivka $\mathcal{K}$ je *záporně orientovaná*. O kladně orientované křivce říkáme také, že je orientovaná proti směru pohybu hodinových ručiček. Nyní můžeme formulovat první z integrálních vět.

Greenova věta

Nechť $M \subset \mathbf{R}^2$ je omezená a uzavřená množina, jejíž hranicí je jediná kladně orientovaná uzavřená křivka $\mathcal{K}$ (v jiné terminologii prostá po částech hladká uzavřená křivka). Nechť $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ je vektorové pole takové, že obě jeho složky f_1, f_2 mají v nějaké otevřené oblasti G obsahující množinu M spojitě parciální derivace. Pak platí rovnost

$$\iint_M \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_{\mathcal{K}} f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy. \quad (5.47)$$

Rovnost (5.47) se nazývá také *Greenův vzorec*.



Obrázek 5.1: Popis hranice oblasti M

Důkaz Greenovy věty naznačíme pro speciální tvar oblasti, jejíž hranici můžeme popsat jako graf dvou funkcí $g_1(x)$ a $g_2(x)$, jak je načrtnuto na obr. 5.1 a) a současně jako graf dvou funkcí $h_1(y)$ a $h_2(y)$, jak je načrtnuto na obr. 5.1 b).

Definičním oborem funkcí $g_i(x)$ je interval $\langle a, b \rangle$, který je průmětem množiny M na osu x , definičním oborem funkcí $h_i(y)$ je interval $\langle c, d \rangle$, který je průmětem množiny M na osu y . Množinu M pak můžeme popsat buď pomocí funkcí $g_1(x)$ a $g_2(x)$

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (a \leq x \leq b) \wedge (g_1(x) \leq y \leq g_2(x))\}, \quad (5.48)$$

nebo pomocí funkcí $h_1(y)$ a $h_2(y)$

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (c \leq y \leq d) \wedge (h_1(y) \leq x \leq h_2(y))\}. \quad (5.49)$$

Označme $\mathcal{K}$ hranici množiny M . Nejdříve dokážeme rovnost

$$\iint_M \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) \, dx \, dy = \int_{\mathcal{K}} f_2(x, y) \, dy. \quad (5.50)$$

Levou stranu rovnosti (5.50) vyjádříme pomocí Fubiniho věty. Je

$$\iint_M \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) \, dx \right) dy = \int_c^d f_2(h_2(y), y) \, dy - \int_c^d f_2(h_1(y), y) \, dy. \quad (5.51)$$

Abychom vyjádřili pravou stranu rovnosti (5.50), rozložíme křivku $\mathcal{K}$ na dva oblouky $\mathcal{K} = \mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4$, jak vidíme na obr. 5.1 b). Pak můžeme psát

$$\int_{\mathcal{K}} f_2(x, y) \, dy = \int_{\mathcal{O}_3} f_2(x, y) \, dy + \int_{\mathcal{O}_4} f_2(x, y) \, dy. \quad (5.52)$$

Oblouk $\mathcal{O}_3$, resp. $\mathcal{O}_4$ můžeme parametrizovat jako grafy funkcí

$$x = h_1(t), \quad y = c + d - t, \quad t \in \langle c, d \rangle,$$

resp.

$$x = h_2(t), \quad y = t, \quad t \in \langle c, d \rangle.$$

Snadno ověříme, že indukovaná orientace hranice $\mathcal{K}$ je taková, jak požadují předpoklady věty. Vyjádříme-li křivkové integrály v (5.51) pomocí těchto parametrizací, dostáváme rovnost

$$\int_{\mathcal{K}} f_2(x, y) dy = \int_{\mathcal{O}_3} f_2(x, y) dy + \int_{\mathcal{O}_4} f_2(x, y) dy = \int_c^d f_2(h_2(y), y) dy - \int_c^d f_2(h_1(y), y) dy. \quad (5.53)$$

Z rovností (5.51) a (5.53) plyne rovnost (5.50).

Analogicky se dá dokázat rovnost

$$\iint_M \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) dx dy = - \int_{\mathcal{K}} f_1(x, y) dx. \quad (5.54)$$

Jejich odečtením dostaneme dokazovaný Greenův vzorec (5.47).

Výpočet obsahu rovinné oblasti

Nechť $M \subset \mathbf{R}^2$ je omezená a uzavřená množina splňující předpoklady Greenovy věty. Volíme-li v (5.47)

$$f_1(x, y) = -\frac{1}{2}y, \quad f_2(x, y) = \frac{1}{2}x,$$

dostaneme z rovnosti (5.47) rovnost

$$\iint_M dx dy = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{K}} x dy - y dx, \quad (5.55)$$

kde $\mathcal{K}$ je kladně orientovaná hranice oblasti M . Dvojný integrál na levé straně je však roven plošnému obsahu oblasti M . Platí tedy pro plošný obsah P rovinné oblasti M ohraničené uzavřenou křivkou $\mathcal{K}$ rovnost

$$P = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{K}} x dy - y dx. \quad (5.56)$$

Příklad

Máme vypočítat plošný obsah vnitřní oblasti elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$, $b > 0$.

Řešení

K výpočtu použijeme Greenovu větu. Zřejmě elipsa splňuje předpoklady Greenovy věty, a proto k výpočtu obsahu P množiny

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

můžeme použít rovnost (5.56). Použijeme zobecněné polární souřadnice $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Dostaneme

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{K}} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t b \cos t - b \sin t (-a \sin t)) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab. \end{aligned}$$

Úlohy

1. Pomocí Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál 2. druhu

$$\int_{\mathcal{K}} (x + y) dx + (x - y) dy$$

po uzavřené rovinné křivce v rovině

$$\mathcal{K} = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

orientované proti směru pohybu hodinových ručiček.

[0.]

2. Pomocí Greenovy věty nalezněte hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{K}} 2xy dx - x^2 dy,$$

kde $\mathcal{K}$ je

- (a) lomená čára s vrcholy $(0, 0)$, $(2, 1)$ a $(2, 0)$, přičemž orientace je zadána daným pořadím bodů. [4.]
- (b) lomená čára s vrcholy $(0, 0)$, $(0, 1)$ a $(2, 1)$, přičemž orientace je zadána daným pořadím bodů. [4.]

5.3 Použití plošného integrálu

Klíčová slova: Gaussova věta, Stokesova věta

5.3.1 Gaussova věta

Gaussova věta udává vztah mezi plošným integrálem po uzavřené ploše a trojným integrálem přes oblast, kterou tato plocha ohraničuje.

Gaussova věta

Nechť $H \subset \mathbf{R}^3$ je omezená, uzavřená, souvislá množina, jejíž hranice ∂H je uzavřená plocha orientovaná vnějším normálovým polem. Nechť $G \subset \mathbf{R}^3$ je otevřená souvislá množina taková, že $H \subset G$ a nechť $\mathbf{f}$ je vektorové pole třídy $\mathcal{C}^{(1)}$ na oblasti G . Pak platí rovnost

$$\int_{\partial H} \mathbf{f} d\mathbf{S} = \iiint_H \operatorname{div} \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (5.57)$$

Důkaz rovnosti (5.57) naznačíme pro speciální případ oblasti H . Tuto rovnost můžeme psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \int_{\partial H} f_1 dx_2 dx_3 + f_2 dx_3 dx_1 + f_3 dx_1 dx_2 = \\ = \iiint_H \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \right) dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Předpokládejme, že oblast H je zdola ohraničena listem $\mathcal{L}_1$, který je grafem funkce $x_3 = h_1(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in I$, shora listem $\mathcal{L}_2$, který je grafem funkce $x_3 = h_2(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in I$, z boku válcovou plochou $\mathcal{P}$ s povrchovými přímkami rovnoběžnými s osou x_3 , která v rovině x_1x_2 vytíná oblast I . Plocha ∂M je sjednocením této válcové plochy a obou listů $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$. Hranice ∂H je tedy sjednocením ploch $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ a $\mathcal{P}$. Orientaci plochy ∂H zvolme pomocí vnější normály. Připomeňme ještě, že z rovnosti pro $\mathbf{f} = (0, 0, f_3)$ a pro list $\mathcal{L}$ parametrizovaný jako graf funkce $x_3 = h(x_1, x_2)$ plyne

$$\int_{\mathcal{L}} (0, 0, f_3) d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{L}} f_3 dx_1 dx_2 = \iint_I f_3(x_1, x_2, h(x_1, x_2)) dx_1 dx_2. \quad (5.59)$$

Využijeme-li tuto rovnost a Fubiniho větu, dostáváme

$$\begin{aligned} \iiint_H \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 &= \iint_I \int_{h_1(x_1, x_2)}^{h_2(x_1, x_2)} \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) dx_3 dx_1 dx_2 = \\ &= \iint_I (f_3(x_1, x_2, h_1(x_1, x_2)) - f_3(x_1, x_2, h_2(x_1, x_2))) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{\mathcal{L}_1} f_3 dx_1 dx_2 + \int_{\mathcal{L}_2} f_3 dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Uvědomme si ještě, že normálový vektor válcové plochy $\mathcal{P}$ je kolmý na osu x_3 , takže jeho průmět do osy x_3 je nulový, a tedy

$$\int_{\mathcal{P}} f_3 dx_1 dx_2 = 0.$$

Můžeme tedy tento sčítanec přičíst k pravé straně rovnosti (5.60) a dostaneme

$$\begin{aligned} \iiint_H \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_{\mathcal{L}_1} f_3 dx_1 dx_2 + \int_{\mathcal{L}_2} f_3 dx_1 dx_2 + \int_{\mathcal{P}} f_3 dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{\partial M} f_3 dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Analogicky pro těleso válcového tvaru s osou rovnoběžnou se souřadnicovou osou x_2 , resp. x_1 dostáváme rovnosti

$$\iiint_H \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\partial M} f_2 dx_3 dx_1, \quad (5.62)$$

resp.

$$\iiint_H \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\partial M} f_1 dx_2 dx_3. \quad (5.63)$$

Jestliže zadanou oblast H umíme popsat jako sjednocení konečně mnoho válcových těles majících některý z výše uvedených tvarů tak, že libovolná dvě tělesa mají společnou nejvýše část hraniční plochy, pak na této společné ploše jsou orientace navzájem opačné, takže integrály přes ně se navzájem ruší. Sečteme-li integrály přes všechna tělesa tohoto dělení, dostaneme dokazovanou rovnost.

Příklad

Máme vypočítat hodnotu plošného integrálu druhého druhu

$$\int_{\mathcal{P}} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy,$$

kde plocha $\mathcal{P}$ je jednotková sféra se středem v počátku orientovaná ven.

Řešení

Použijeme Gaussovu větu. Nejdříve ověříme předpoklady. V našem případě je H jednotková koule, ∂H je jednotková sféra $\mathcal{P}$, za oblast G můžeme volit celý prostor $\mathbf{R}^3$. Vektorové pole $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, je třídy $\mathcal{C}^{(1)}$ na $\mathbf{R}^3$, takže předpoklady Gaussovy–Ostrogradského věty jsou splněny. Můžeme použít rovnost (5.57). Zřejmě $\operatorname{div} \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = 3$, takže

$$\int_{\mathcal{P}} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy = \iiint_H 3 \, dx \, dy \, dz = 3 \iiint_H dx \, dy \, dz = 3 \frac{4}{3} \pi = 4\pi.$$

Úlohy Nalezněte hodnoty následujících integrálů.

1.

$$\int_{\mathcal{P}} x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy,$$

kde plocha $\mathcal{P}$ je hranice krychle

$$H = \{(x, y, z) \mid (0 \leq x \leq 1) \wedge (0 \leq y \leq 1) \wedge (0 \leq z \leq 1)\}$$

orientovaná ven.

[3.]

2.

$$\int_{\mathcal{P}} x^3 \, dy \, dz + y^3 \, dz \, dx + z^3 \, dx \, dy,$$

kde plocha $\mathcal{P}$ je hranice polokoule

$$H = \{(x, y, z) \mid (x^2 + y^2 + z^2 \leq 1) \wedge (0 \leq z)\}$$

orientovaná ven.

[6 π /5.]

3.

$$\int_{\mathcal{P}} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + (z^2 - 1) \, dx \, dy,$$

kde plocha $\mathcal{P}$ je hranice válce

$$H = \{(x, y, z) \mid (x^2 + y^2 \leq 1) \wedge (0 \leq z \leq 1)\}$$

orientovaná ven.

[3 π .]

4.

$$\int_{\mathcal{P}} xz \, dy \, dz + xy \, dz \, dx + yz \, dx \, dy,$$

kde plocha $\mathcal{P}$ je hranice tělesa

$$H = \{(x, y, z) \mid (x^2 + y^2 \leq R^2) \wedge (0 \leq z \leq h) \wedge (0 \leq x) \wedge (0 \leq y)\}$$

orientovaná ven.

[$hR^2(3\pi h + 16R)/24$.]

5.3.2 Stokesova věta

Stokesova věta udává vztah mezi plošným integrálem přes orientovanou plochu v prostoru $\mathbf{R}^3$ a křivkovým integrálem přes její koherentně orientovanou hranici.

Stokesova věta

Nechť $H \subset \mathbf{R}^3$ je orientovaná plocha, jejíž hranice ∂H je uzavřená křivka orientovaná koherentní orientací. Nechť $G \subset \mathbf{R}^3$ je otevřená souvislá množina taková, že $H \subset G$ a nechť $\mathbf{f}$ je vektorové pole třídy $\mathcal{C}^{(1)}$ na oblasti G . Pak platí rovnost

$$\oint_{\partial H} \mathbf{f} \, ds = \int_H \operatorname{rot} \mathbf{f} \, d\mathbf{S}. \quad (5.64)$$

Důkaz této věty je příliš komplikovaný a nebudeme naznačovat ani jeho základní myšlenku.

Příklad

Máme vypočítat hodnotu křivkového integrálu druhého druhu

$$\oint_{\mathcal{K}} (y - z) \, dx + (z - x) \, dy + (x - y) \, dz,$$

kde křivka $\mathcal{K}$ je obvod trojúhelníka s vrcholy $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ s orientací danou uvedeným pořadím vrcholů.

Řešení

Použijeme Stokesovu větu. Nejdříve ověříme předpoklady. V našem případě je H trojúhelník s vrcholy v bodech $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $\partial H = \mathcal{K}$ je obvod tohoto trojúhelníka. Za oblast G můžeme volit celý prostor $\mathbf{R}^3$. Vektorové pole $\mathbf{f}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, je třídy $\mathcal{C}^{(1)}$ na $\mathbf{R}^3$, takže předpoklady Stokesovy věty jsou splněny. Můžeme použít rovnost (5.64). Zřejmě $\operatorname{rot} \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (-2, -2, -2)$. Trojúhelník můžeme parametrizovat jako graf funkce. Indukovaná orientace je souhlasná se zadanou orientací a příslušný normálový orientující vektor je $(1, 1, 1)$. Je tedy

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{K}} (y - z) \, dx + (z - x) \, dy + (x - y) \, dz &= \int_H \operatorname{rot} \mathbf{f} \, d\mathbf{S} = \\ &= \iint_I (-2, -2, -2) \bullet (1, 1, 1) \, du \, dv = \int_0^1 \int_0^{1-u} (-6) \, dv \, du = -3. \end{aligned}$$

Úlohy

1. Pomocí Stokesovy věty máme vypočítat následující křivkové integrály.

(a)

$$\oint_{\mathcal{K}} (x^2 - yz) \, dx + (y^2 - xz) \, dy + (z^2 - xy) \, dz,$$

kde křivka $\mathcal{K}$ je obvod trojúhelníka s vrcholy $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ s orientací danou uvedeným pořadím vrcholů. [0.]

(b)

$$\oint_{\mathcal{K}} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz,$$

kde křivka $\mathcal{K}$ je obvod trojúhelníka s vrcholy $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$, $a > 0$, s orientací danou uvedeným pořadím vrcholů. [$-a^3$.]

2. Pomocí Stokesovy věty máme vypočítat integrál

$$\int_H \operatorname{rot} \mathbf{f} d\mathbf{S},$$

kde

(a) $\mathbf{f} = (y, z, x)$ a H je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, orientující normálový vektor svírá s osou z ostrý úhel. [$-\pi$.]

(b) $\mathbf{f} = (xz, -y, x^2)$ a H je část povrchu čtyřstěnu ohraničeného souřadnicovými rovinami a rovinou $3x + y + 3z = 6$, s vynechanou stěnou ležící v rovině xy , orientované dovnitř čtyřstěnu. [0.]

æ