Přednáška 1

V tomto semestru se budeme zabývat diferenciálním a integrálním počtem funkcí n reálných proměnných. Podstata diferenciálního počtu spočívá v tom, že v okolí daného bodu nahrazujeme graf funkce, tj. nějakou plochu v $\mathbb{R}^{n+1}$, jednoduššími funkcemi, zejména polynomy a pomocí těchto jednodušších ploch zkoumáme vlastnosti funkce v okolí daného bodu.
Mnohé konstrukce v této přednášce budou zobecněním konstrukcí v obvyklém euklidovském prostoru E_3, které by snad měly být známé z analytické geometrie. V úvodní přednášce zopakujeme tyto konstrukce a zobecníme je na případ n–rozměrného euklidovského prostoru E_n.

Analytická geometrie euklidovského prostoru E_n

Geometrické vlastnosti prostoru E_n

Pro každé dva body A, $B \in E_n$ je definována jejich vzdálenost $d(A, B) \geq 0$, tj. nezáporné číslo takové, že

1. $d(A, B) = d(B, A)$;
2. $d(A, B) = 0$ právě tehdy, když $A = B$;
3. Pro každé tři body A, B, $C \in E_n$ platí tzv. *trojúhelníková nerovnost*

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)\,.$$

`Poznámka:` Pojem vzdálenosti se v matematice zobecňuje na pojem *metriky* na množině M, což je nezáporná funkce $d : M \times M \to \langle 0, +\infty)$, pro které platí 1, 2 a 3. Množina M, na které je definována metrika se pak nazývá *metrický prostor*.

Dále pro dva body A, $B \in E_n$ definujeme orientovanou úsečku z bodu A do bodu B, kterou označíme $\overrightarrow{AB}$. Pro orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$ je její délka dána jako $d(A, B)$.
Je-li $\overrightarrow{AB}$ orientovaná úsečka z bodu A do bodu B a $\overrightarrow{BC}$ orientovaná úsečka z bodu B do bodu C, definujeme operaci $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Dále pro orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$ a $c \in \mathbb{R}$ označíme $c\big(\overrightarrow{AB}\big) = \overrightarrow{AC}$ orientovanou úsečku z bodu A do bodu C, který leží na přímce dané body A a B a jehož vzdálenost od bodu A je $|c|\, d(A, B)$. Přitom je-li $c > 0$ leží bod C na polopřímce s počátečním bodem A, na které leží bod B, kdežto pro $c < 0$ leží na opačné polopřímce.

Další geometrický pojem v prostoru E_n je úhel mezi orientovanými úsečkami, které začínají ve stejném bodě. Každé tři navzájem různé body A, B a C tvoří trojúhelník $\triangle ABC$ nebo leží na jedné přímce. Jestliže označíme délky jeho stran $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$ a $c = d(A, B)$ a $\gamma \in \langle 0, \pi \rangle$ úhel při vrcholu C, platí v E_n kosinová věta

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$$

Tento úhel γ se nazývá úhel mezi orientovanými úsečkami $\overrightarrow{CA}$ a $\overrightarrow{CB}$.

Orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ se často nazývají vázané vektory. V euklidovském prostoru je podstatné, že takové orientované úsečky lze paralelně (rovnoběžně) posouvat z bodu do bodu, tj. že pro každý bod C umíme orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$ s počátečním bodem A posunout tak, abychom získali právě jednu orientovanou úsečku $\overrightarrow{CD}$ s počátečním bodem C, která odpovídá orientované úsečce $\overrightarrow{AB}$. Navíc paralelní posunutí nemění délku vázaného vektoru ani úhel, který svírají dva vázané vektory, které začínají ve stejném bodě.

Nejdůležitější vlastnost euklidovského prostoru E_n je, že paralelní posunutí vektoru nezávisí na tom, po jakým způsobem přenášíme vektor $\overrightarrow{AB}$ z bodu A do bodu C. Konkrétně, pokud přeneseme vektor $\overrightarrow{AB}$ do bodu C přímo (po nejkratší dráze) nebo ho nejprve přeneseme do bodu $\widehat{C}$ a pak z bodu $\widehat{C}$ do bodu C, dostaneme v bodě C stejný vektor. Tato zdánlivě samozřejmá vlastnost paralelního přenosu neplatí například na kulové ploše a vede k tzv. neeuklidovské geometrii.

Paralelní posunutí umožňuje zavést pojem volného vektoru $\mathbf{v}$. To je v podstatě vektor, který odpovídá celé množině vázaných vektorů, které získáme paralelním posunutím z jednoho daného vázaného vektoru $\overrightarrow{AB}$. Množinu všech volných vektorů budeme značit V_n.

`Poznámka.` Matematicky se takové ztotožnění formuluje tak, že na množině vázaných vektorů definujeme relaci $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ právě tehdy, když vázaný vektor $\overrightarrow{CD}$ vznikne z vázaného vektoru $\overrightarrow{AB}$ paralelním posunutím. Ukazuje se, že tato relace je reflexivní, tj. pro každý vázaný vektor $\overrightarrow{AB}$ je $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$, symetrická, tj. pokud je $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, pak je $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$, a tranzitivní, tj. pokud je $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ a $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$, je $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$. Taková relace se nazývá relace ekvivalence. Relace ekvivalence rozděluje množinu všech vázaných vektorů na množinu tříd ekvivalence, tj. podmnožin vzájemně ekvivalentních prvků. Tyto třídy ekvivalence jsou navzájem disjunktní, tj. pro dvě třídy ekvivalence T_1 a T_2 buď platí $T_1 = T_2$ nebo $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. To nám umožňuje definovat množinu V_n, jejíž prvky jsou třídy ekvivalence, tzv. volné vektory $\mathbf{v}$.

Mezi prvky prostoru V_n lze definovat operaci sčítání a násobení reálným číslem. Přesněji, jsou-li $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ prvky V_n, vybereme vázaný vektor $\overrightarrow{AB}$, který patří do třídy $\mathbf{v}_1$ a vázaný vektor $\overrightarrow{BC}$, který je prvkem třídy $\mathbf{v}_2$. Součet těchto vektorů $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ je pak třída, která obsahuje vázaný vektor $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Podobně definujeme násobení reálným číslem. Lze ukázat, že tato definice nezávisí na výběru reprezentantů $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$. Navíc je zřejmé, že vázaný vektor $\overrightarrow{AA}$ reprezentuje nulový vektor $\mathbf{0}$. S těmito operacemi tvoří V_n vektorový prostor.
Pro euklidovský prostor E_n je dimenze prostoru V_n, tj. počet lineárně nezávislých vektorů, které generují V_n, rovna n.

Protože paralelní posunutí nemění délku vázaného vektoru, mají všechny vázané vektory třídy $\mathbf{v}$ stejnou délku. Tuto délku označíme $\|\mathbf{v}\|$ a budeme ji nazývat délkou vektoru $\mathbf{v}$. Z vlastností 1, 2 a 3 vzdálenosti bodů plyne, že pro délku vektor $\|\mathbf{v}\|$ platí

1. Pro každé $\mathbf{v} \in V_n$ je $\|\mathbf{v}\| \geq 0$. Přitom z rovnosti $\|\mathbf{v}\| = 0$ plyne $\mathbf{v} = \mathbf{0}$;
2. Pro každé $\mathbf{v} \in V_n$ a $c \in \mathbb{R}$ je $\|c\mathbf{v}\| = |c|\,\|\mathbf{v}\|$;
3. Pro každé $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \in V_n$ platí trojúhelníková nerovnost
$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|\,.$$

`Poznámka.` Funkce ν na vektorovém prostoru V, pro kterou platí 1, 2 a 3, se nazývá norma a vektorový prostor V, na kterém je definována norma, se nazývá *normovaný vektorový prostor*. Jestliže je V normovaný vektorový prostor v normou ν, můžeme na V definovat metriku $d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \nu(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$.

Protože paralelní posunutí nemění úhel, který svírají dva vázané vektory $\overrightarrow{CA}$ a $\overrightarrow{CB}$, lze tento úhel najít mezi volnými vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ z V_n, které těmto vektorům odpovídají. Pro určení úhlu mezi vektory ve vektorovém prostoru V_n slouží operace, která se nazývá skalární součin. Skalární součin přiřazuje každým dvěma vektorům $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \in V_n$ reálné číslo, které budeme značit $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$. Pro toto zobrazení $V_n \times V_n \to \mathbb{R}$ platí:

1. Pro každé $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3 \in V_n$ a c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ je
$$\big(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2\big) \cdot \mathbf{v}_3 = c_1\big(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3\big) + c_2\big(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3\big)\,;$$
2. Pro každé $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \in V_n$ je $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1$;
3. Pro každé $\mathbf{v} \in V_n$ je $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2 \geq 0$. Přitom z rovnosti $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ plyne $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

V euklidovském prostoru E_n je vztahem $\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \|\mathbf{v}\|$ definována délka vektoru $\mathbf{v}$ v prostoru V_n, a tedy i délka vázaného vektoru $\overrightarrow{AB}$, který vektor $\mathbf{v}$ reprezentuje.

`Poznámka.` V obecném vektorovém prostoru V, ve kterém je definován skalární součin, platí následující tzv. *Schwarzova*, nerovnost.

Věta (*Schwarzova nerovnost*). Pro každé dva vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \in V$ platí nerovnost
$$\big|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2\big| \leq \|\mathbf{v}_1\|\,\|\mathbf{v}_2\|\,.$$
Přitom rovnost nastává pouze tehdy, když jsou vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ lineárně závislé.

Důkaz: Jestliže jsou vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ lineárně závislé, je buď $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ nebo $\mathbf{v}_1 = c\mathbf{v}_2$, kde $c \in \mathbb{R}$. Přímým výpočtem se snadno přesvědčíme, že v tomto případě platí v uvedeném vztahu rovnost. Nechť jsou vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ lineárně nezávislé. Z toho plyne, že $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ a tedy $\|\mathbf{v}_2\| > 0$. Pro každé $t \in \mathbb{R}$ vektor $\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2$ nenulový. Proto je pro každé $t \in \mathbb{R}$
$$F(t) = \big(\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2\big) \cdot \big(\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2\big) = \|\mathbf{v}_1\|^2 - 2t\big(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2\big) + t^2\|\mathbf{v}_2\|^2 > 0\,.$$
Pro dané $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ je $F(t)$ kladná kvadratická funkce proměnné t, která nabývá minimum v bodě t_0, pro který platí
$$F'(t_0) = -2\big(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2\big) + 2t_0\|\mathbf{v}_2\|^2 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad t_0 = \frac{\big(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2\big)}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\,.$$
Ale v tomto bodě je
$$F(t_0) = \|\mathbf{v}_1\|^2 - \frac{\big(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2\big)^2}{\|\mathbf{v}_2\|^2} > 0\,.$$
To je právě uvedená Schwarzova nerovnost.

Ze Schwarzovy nerovnosti plyne v obecném vektorovém prostoru se skalárním součinem trojúhelníková nerovnost
$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|\,.$$
Abychom uvedený vztah dokázali, uvažujeme
$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 &= (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\|^2 + 2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) + \|\mathbf{v}_2\|^2 \leq \\ &\leq \|\mathbf{v}_1\|^2 + 2\|\mathbf{v}_1\|\,\|\mathbf{v}_2\| + \|\mathbf{v}_2\|^2 = \big(\|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|\big)^2\,,\end{aligned}$$
kde jsme použili Schwarzovu nerovnost.

V každém vektorovém prostoru V se skalárním součinem definuje vztah $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$ normu. Obecně nemusí být norma ve vektorovém prostoru definována skalárním součinem, ale ve vektorovém prostoru V_n, který odpovídá euklidovskému prostoru E_n, tomu tak je.

Nyní můžeme dát geometrickou interpretaci skalárního součinu. Uvažujme dva nenulové vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ z prostoru V_n. Nechť jsou tyto vektory reprezentovány vázanými vektory $\overrightarrow{CB}$ a $\overrightarrow{CA}$. Pak vektor $\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1$ lze reprezentovat vázaným vektorem $\overrightarrow{BA}$. V prostoru E_n jsou body A, B a C vrcholy trojúhelníka se stranami $a = d(C,B) = \|\mathbf{v}_1\|$, $b = d(C,A) = \|\mathbf{v}_2\|$ a $c = d(B,A) = \|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\|$. Podle definice skalárního součinu platí vztah

$$c^2 = \|\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1\|^2 = (\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)\cdot(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1) = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 - 2(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) = a^2+b^2-2(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)\,.$$

Jestliže srovnáme tento vztah s kosinovou větou $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, kde γ je úhel v trojúhelníku při vrcholu C, dostaneme pro hodnotu skalárního součinu výraz

$$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = \|\mathbf{v}_1\|\,\|\mathbf{v}_2\|\cos\gamma\,,$$

kde γ je úhel mezi vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$. Tohoto vztahu se používá pro výpočet úhlu mezi dvěmi nenulovými vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ ve V_n, resp. v E_n.
Z uvedeného vztahu je zřejmé, že vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ jsou kolmé, často se říká *ortogonální*, právě tehdy, když $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = 0$.

Příklad. Později, v přednášce o křivkovém nebo plošném integrálu druhého druhu, se setkáme s úkolem najít kolmý průmět daného vektoru $\mathbf{F}$ do směru daného nenulovým vektorem $\mathbf{v}$. Jestliže označíme α úhel mezi vektory $\mathbf{F}$ a $\mathbf{v}$, je tento průmět roven

$$F_{\|} = \|\mathbf{F}\|\cos\alpha\,.$$

Protože podle definice skalárního součinu je

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{F}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\alpha\,,$$

dostaneme pro hledaný průmět vztah

$$F_{\|} = \|\mathbf{F}\|\cos\alpha = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{s} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\,.$$

Pro vektor $\mathbf{s}$ platí $\|\mathbf{s}\| = 1$.
Jednotkový vektor $\mathbf{s}$, tj. vektor $\mathbf{s}$, pro který je $\|\mathbf{s}\| = 1$, se často nazývá *směrový vektor* nebo *směr*.

Na závěr shrneme naše úvahy. Euklidovský prostor E_n je vlastně dvojice (E_n, V_n), kde E_n je množina bodů a V_n je n-rozměrný vektorový prostor se skalárním součinem.
Přitom každým dvěma bodům $A\,, B \in E_n$ je přiřazen právě jeden vektor $\mathbf{v} \in V_n$, konkrétně vektor, který odpovídá vázanému vektoru $\overrightarrow{AB}$.
Dále každému bodu $A \in E_n$ a vektoru $\mathbf{v} \in V_n$ je přiřazen právě jeden bod $B \in E_n$, konkrétně bod B takový, že vázaný vektor $\overrightarrow{AB}$ odpovídá vektoru $\mathbf{v}$.

`Poznámka.` Tato zobrazení musí mít jisté vlastnosti, které zde nebudeme vypisovat. Jde v podstatě o to, abychom pomocí souřadnic mohli pro každé dva body A, $B \in E_n$ a vektor $\mathbf{v} \in V_n$ psát $\overrightarrow{AB} = (B - A) \in V_n$ a $B = A + \mathbf{v}$.

`Poznámka.` S vektorovými prostory V jste se seznámili na přednášce z lineární algebry. Na rozdíl od vektorového prostoru je euklidovský prostor E_n vlastně dvojice (E_n, V_n), kde E_n je množina a V_n n-dimenzionální vektorový prostor, pro kterou jsou definována uvedená zobrazení. V matematice se struktura takového typu nazývá *afinní prostor* modelovaný vektorovým prostorem V_n. Rozdíl je v tom, že ve vektorovém prostoru je dán speciální prvek, nulový vektor $\mathbf{0}$, kdežto v afinním prostoru takový speciální prvek není.
Tedy euklidovský prostor E_n je afinní prostor, který je modelovaný n-dimenzionálním vektorovým prostorem se skalárním součinem.

Kartézské souřadnice v prostoru E_n

Všechny geometrické pojmy v euklidovském prostoru E_n lze formulovat pouze pomocí uvedených operací mezi body prostoru E_n a vektory vektorového prostoru V_n, který moduluje E_n. Při konkrétních výpočtech ale potřebujeme popsat tyto objekty pomocí množiny čísel. Proto se v těchto prostorech zavádějí souřadnice. My budeme používat nejjednodušší, tzv. kartézský systém souřadnic, který nyní zavedeme.

V prostoru E_n vybereme bod P, který budeme nazývat *počátek souřadnic*. Každému bodu $X \in E_n$ je pak jednoznačně přiřazen vázaný vektor $\overrightarrow{PX}$. Tento vektor je reprezentantem volného vektoru $(X - P) = \mathbf{x} \in V_n$.
V prostoru V_n zvolíme bázi, která je tvořena jednotkovými ortogonálními vektory $\mathbf{e}_k$, kde $k = 1, 2, \ldots, n$, kde $n = \dim V_n$. Pro vektory takové báze platí

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq k\,, \\ 1 & \text{pro } i = k\,. \end{cases}$$

Zde zavedený symbol δ_{ik} se nazývá *Kroneckerovo delta* a poměrně často se používá při výpočtech.
Každá taková uspořádaná množina $\mathfrak{S} = \big(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\big)$ se nazývá *kartézský souřadný systém* v E_n.

`Poznámka.` Slovo kartézský zde vyjadřuje, že jsou vektory $\mathbf{e}_k$ *ortonormální*, tj. navzájem kolmé a jednotkové. Obecně lze za systém vektorů $\mathbf{e}_k$ zvolit libovolnou bázi prostoru V_n, ale v tom případě budou konkrétní výpočty složitější.

Protože vektory $\mathbf{e}_k$ tvoří bázi v prostoru V_n, lze každý vektor $\mathbf{x} \in V_n$ vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\mathbf{e}_k\,,$$

kde $x_k \in \mathbb{R}$. Reálná čísla x_k se nazývají souřadnice vektoru $\mathbf{x} \in V_n$ v bázi $\mathbf{e}_k$. Pro danou bázi $\mathbf{e}_k$ prostoru V_n jsme takto dostali zobrazení $V_n \to \mathbb{R}^n$, které každému vektoru $\mathbf{x}$ přiřazuje uspořádanou n-tici reálných čísel, jeho souřadnic. Proto se pro danou bázi zapisuje vektor $\mathbf{x}$ jako

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,,$$

kde x_k jsou souřadnice vektoru $\mathbf{x}$. Všimněte si toho, že souřadnice vektorů báze jsou v tomto zápise $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.
Výhoda volby kartézského systému souřadnic spočívá v tom, že pro skalární součin vektoru $\mathbf{x}$ s vektorem báze $\mathbf{e}_k$ platí

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ik} = x_k\,.$$

To znamená, že souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ jsou kolmé průměty vektoru $\mathbf{x}$ do směrů $\mathbf{e}_k$. Navíc pro skalární součin vektorů $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dostaneme

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k \mathbf{e}_k\Big) = \sum_{i,k=1}^{n} x_i y_k \, \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{i,k=1}^{n} x_i y_k \delta_{ik} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \, .$$

Speciálně pro délku vektoru $\mathbf{x}$ máme vztah

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \, , \quad \text{tj.} \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \, ,$$

který odpovídá Pythagorově větě.

Nyní uvažujme pevně daný souřadný systém $\mathfrak{S} = \big(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\big)$ v E_n. Každému bodu $X \in E_n$ přiřadíme vázaný vektor $\overrightarrow{PX}$. Tomuto vázanému vektoru volný vektor $(X - P) = \mathbf{x}$ a volnému vektoru $\mathbf{x}$ jeho souřadnice x_k. Symbolicky lze tuto posloupnost zobrazení zapsat jako

$$X \mapsto \overrightarrow{PX} \mapsto X - P = \mathbf{x} \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n) \, .$$

Tímto způsobem pro daný souřadný systém $\mathfrak{S}$ přiřadíme každému bodu $X \in E_n$ uspořádanou n-tici reálných čísel, tj. prvek prostoru $\mathbb{R}^n$, tak zvaných souřadnic bodu X. Abychom vyjádřili rozdíl mezi souřadnicemi bodu X prostoru E_n, respektive vázanými vektory $\overrightarrow{PX}$ a volnými vektory $\mathbf{x}$, budeme toto přiřazení symbolicky psát jako

$$X \equiv \boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \, .$$

Podíváme se trochu podrobněji na geometrický význam uvedené konstrukce souřadnic bodu z hlediska euklidovského prostoru E_n. Volbou bodu $P \in E_n$ jsme vlastně zvolili počátek souřadného systému. Pro samotný bod P je $P - P = \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$, tj. souřadnice počátku P jsou $\boldsymbol{p} = [0, 0, \dots, 0]$
Volné jednotkové navzájem ortogonální vektory báze $\mathbf{e}_k$ odpovídají v prostoru E_n výběru bodů $X_k = P + \mathbf{e}_k$ v E_n takových že vázané vektory $\overrightarrow{PX_k}$, které začínají v bodě P jsou jednotkové a navzájem kolmé. Poznamenejme, že souřadnice těchto bodu jsou $X_k \equiv \boldsymbol{x}_k = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$, kde 1 je právě na k-tém místě. Vázané vektory $\overrightarrow{PX_k}$ určují v E_n vzájemně kolmé orientované přímky, které se nazývají souřadnicové osy. Pro daný bod $X \in E_n$ pak sestrojíme jeho kolmé průměty na souřadnicové osy a souřadnice x_k bodu X jsou orientované vzdálenosti těchto průmětů od bodu P, tj. $x_k > 0$, pokud průmět leží na polopřímce PX_k s počátkem v bodě P, a $x_k < 0$ v opačném případě.

Jestliže jsou X a Y dva body v E_n, platí pro každé $P \in E_n$ mezi vázanými vektory vztah $\overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{XY}$. Jestliže označíme $\mathbf{v} = Y - X \in V_n$ vektor, který odpovídá vázanému vektoru $\overrightarrow{XY}$, lze uvedený vztah zapsat jako

$$\mathbf{v} = Y - X = (Y - P) - (X - P) = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \, .$$

Tedy jestliže jsou souřadnice bodu $X \equiv \boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ a bodu $Y \equiv [y_1, y_2, \dots, y_n]$ má vektor $\mathbf{v} = Y - X$ souřadnice

$$\mathbf{v} = Y - X = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n) \, .$$

Podobně dostaneme pro souřadnice bodu $Y = X + \mathbf{v}$ vztah

$$\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n] = \boldsymbol{x} + \mathbf{v} = [x_1 + v_1, x_2 + v_2, \ldots, x_n + v_n]\,,$$

kde $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ jsou souřadnice bodu $X \in E_n$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{v} \in V_n$.

Vzdálenost bodů X a Y v E_n definovali jako délku vázaného vektoru $\overrightarrow{XY}$. Jestliže tedy jsou souřadnice bodů X a Y rovny $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$, je vzdálenost těchto bodů dána vztahem

$$d(X, Y) = \|Y - X\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}\,.$$

`Poznámka.` Důvod, proč se souřadnice v prostoru E_n zavádí poměrně složitým způsobem, i když intuitivní zavedení souřadnic je z geometrického hlediska zcela zřejmé, je v tom, že souřadnice bodů závisí na volbě souřadného systému $\mathfrak{S}$. Uvědomte si, že bod $X \in E_n$ je zcela konkrétní objekt, kdežto jeho souřadnice jsou pouze pomocný pojem. Jestliže má bod X vzhledem k souřadnému systému $\mathfrak{S}$ souřadnice $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a vzhledem k jinému souřadnicovému systému $\mathfrak{S}'$ souřadnice $\boldsymbol{x}' = [x'_1, x'_2, \ldots, x'_n]$, umožňuje uvedená konstrukce najít poměrně jednoduše vztah mezi těmito dvěma popisy. K tomu se vrátíme později.

Obsahy rovnoběžníků v E_n

Zvolme v E_n pevný kartézský souřadný systém $\mathfrak{S} = (P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Již víme, že délka d vektoru $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ je dána vztahem

$$d^2 = \|\mathbf{v}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} v_k^2\,.$$

Později budeme potřebovat najít obsah rovnoběžníka $ABCD$. Jestliže vázané vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{DC}$ reprezentují volný vektor $\mathbf{v}_1 = B - A = C - D$, jehož délka je $v_1 = \|\mathbf{v}_1\|$ a vázané vektory $\overrightarrow{AD}$ a $\overrightarrow{BC}$ reprezentují volný vektor $\mathbf{v}_2 = D - A = C - B$, jehož délka je $v_2 = \|\mathbf{v}_2\|$, je zřejmé, že obsah P tohoto rovnoběžníka je $P = v_1 v_2 \sin\alpha$, kde α je úhel mezi vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$. Jestliže použijeme skalární součin, dostaneme

$$P^2 = v_1^2 v_2^2 \sin^2\alpha = v_1^2 v_2^2 - v_1^2 v_2^2 \cos^2\alpha = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2) - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2 = \det\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1\,, & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1\,, & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}.$$

Pro dva třírozměrné vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ definujeme *vektorový součin* vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ (v tomto pořadí), který značí se $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Konkrétně, jsou-li souřadnice vektorů $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, je

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det\begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2\,, & v_3 \end{pmatrix} \mathbf{e}_1 + \det\begin{pmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3\,, & v_1 \end{pmatrix} \mathbf{e}_2 + \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1\,, & v_2 \end{pmatrix} \mathbf{e}_3 = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1\,, & \mathbf{e}_2\,, & \mathbf{e}_3 \\ u_1\,, & u_2\,, & u_3 \\ v_1\,, & v_2\,, & v_3 \end{pmatrix}.$$

Vektorový součin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je vektor kolmý na oba vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ a jeho velikost je

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \sin\alpha\,,$$

kde α je úhel mezi vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, tj. je rovna velikosti rovnoběžníka se stranami tvořenými vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.
Pro vektorový součin dvou vektorů platí řada užitečných vztahů, z nichž uvedeme pouze jeden. Pro vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ platí

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2\,, & u_3 \\ v_1\,, & v_2\,, & v_3 \\ w_1\,, & w_2\,, & w_3 \end{pmatrix}.$$

Tedy objem V rovnoběžnostěnu v E_3 se stranami, které jsou rovnoběžné s vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$, je roven

$$V = \big|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})\big|\,.$$

`Poznámka.` Lze ukázat, že pro k-rozměrný obsah P_k k-rozměrného rovnoběžníka v E_n, jehož strany jsou rovnoběžné s vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\dots$, $\mathbf{v}_k$ platí

$$P_k^2 = \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1\,, & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2\,, & \dots\,, & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1\,, & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2\,, & \dots\,, & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_1\,, & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_2\,, & \dots\,, & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k \end{pmatrix}.$$

Uvažujme matici $\mathbf{A}$ typu $k \times n$, jejíž řádky jsou tvořeny souřadnicemi vektorů $\mathbf{v}_i = (v_{i,1}, \dots, v_{i,n})$, tj.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} v_{1,1}\,, & v_{1,2}\,, & \dots\,, & v_{1,n} \\ v_{2,1}\,, & v_{2,2}\,, & \dots\,, & v_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k,1}\,, & v_{k,2}\,, & \dots\,, & v_{k,n} \end{pmatrix}.$$

Pak platí

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1\,, & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2\,, & \dots\,, & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1\,, & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2\,, & \dots\,, & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_1\,, & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_2\,, & \dots\,, & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{A}^T$ je transponovaná matice k matici $\mathbf{A}$.
V algebře, speciálně v teorii determinantů, se ukazuje, že pro matici $\mathbf{A}$ typu $k \times n$, kde $k \le n$, je

$$\det\big(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\big) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} A^2_{i_1, i_2, \ldots, i_k}\,,$$

kde $A_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ je determinant čtvercové matice $\mathbf{A}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ pokud v ní ponecháme pouze sloupce i_1, i_2, $\dots$, i_k.
Speciálně pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ dostaneme vztah

$$\det\big(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\big) = \big(\det \mathbf{A}\big)^2\,,$$

který plyne ze známých vztahů pro determinant součinu matic a determinantu transponované matice. Proto je n-rozměrný objem $V = P_n$ rovnoběžnostěnu, se stranami rovnoběžnými s vektory $\mathbf{v}_1$, $\dots$, $\mathbf{v}_n$ roven

$$V = \big|\det \mathbf{A}\big|\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} v_{1,1}\,, & v_{1,2}\,, & \dots\,, & v_{1,n} \\ v_{2,1}\,, & v_{2,2}\,, & \dots\,, & v_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n,1}\,, & v_{n,2}\,, & \dots\,, & v_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Dále nás bude zajímat $(n-1)$-rozměrný objem P_{n-1} $(n-1)$-rozměrného rovnoběžníku v E_n, jehož strany jsou rovnoběžné s vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$. Podle obecného vztahu dostaneme

$$P_{n-1}^2 = D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_n^2 \,,$$

kde D_k je determinant matice, která vznikne z matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} v_{1,1}\,, & v_{1,2}\,, & \ldots\,, & v_{1,n} \\ v_{2,1}\,, & v_{2,2}\,, & \ldots\,, & v_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1,1}\,, & v_{n-1,2}\,, & \ldots\,, & v_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

typu $(n-1) \times n$ tak, že vynecháme k-tý sloupec. Povšimněte si také toho, že vektor

$$\mathbf{n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} D_k \mathbf{e}_k$$

je má délku rovnou obsahu P_{n-1} a je kolmý na každý vektor $\mathbf{v}_j$. To plyne ihned z toho, že výraz

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{n} v_{j,i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} D_i v_{j,i} = 0 \,,$$

je roven rozvoji podle prvního řádku determinantu matice, která má stejný první a j-tý řádek, který je rovný $\mathbf{v}_j$.
Podobné úvahy vedou k tomu, že pro každý vektor $\mathbf{v}$ je výraz

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \det \begin{pmatrix} v_1\,, & v_2\,, & \ldots\,, & v_n \\ v_{1,1}\,, & v_{1,2}\,, & \ldots\,, & v_{1,n} \\ v_{2,1}\,, & v_{2,2}\,, & \ldots\,, & v_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1,1}\,, & v_{n-1,2}\,, & \ldots\,, & v_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

v absolutní hodnotě roven objemu rovnoběžnostěnu se stranami $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$.
Z věty o rozvoji determinantu podle prvního řádku plyne, že uvedený vektor $\mathbf{n}$ lze formálně zapsat jako

$$\mathbf{n} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1\,, & \mathbf{e}_2\,, & \ldots\,, & \mathbf{e}_n \\ v_{1,1}\,, & v_{1,2}\,, & \ldots\,, & v_{1,n} \\ v_{2,1}\,, & v_{2,2}\,, & \ldots\,, & v_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1,1}\,, & v_{n-1,2}\,, & \ldots\,, & v_{n-1,n} \end{pmatrix} .$$

Vektor $\mathbf{n}$ je zobecněním vektorového součinu dvou vektorů v třídiměnzionálním prostoru.

k-rozměrné nadroviny v E_n

Zatím jsme se zabývali popisem bodů v euklidovském prostoru E_n. Dalšími velmi jednoduchými útvary v prostoru E_n jsou lineární útvary, tzv. k-rozměrné nadroviny v E_n. Ty jsou zobecnění pojmů přímka a rovina v dvou- nebo tří-rozměrném prostoru.

Nechť je dám bod $A \in E_n$ a k lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in V_n$. k-*rozměrnou nadrovinou* $\mathcal{L}_k$ v E_n, která prochází bodem A a je rovnoběžná s vektory $\mathbf{v}_i$,

$i = 1, 2, \ldots, k$, nazýváme množinu všech bodů $X \in E_n$ takových, že vektor $X - A$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_i$.
Toto tvrzení lze zapsat tak, že prvek $X \in E_n$ je prvkem nadroviny $\mathcal{L}_k$ právě tehdy, když existují reálná čísla $t_1, t_2, \ldots, t_k$ taková, že

$$X - A = \mathbf{v}_1 t_1 + \mathbf{v}_2 t_2 + \ldots + \mathbf{v}_k t_k = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i t_i\,. \tag{1}$$

`Poznámka.` 0-rozměrné nadroviny jsou body, jedno-rozměrné nadroviny se nazývají přímky a pro 2-rozměrné nadroviny používáme, zejména v E_3 název roviny.

Rovnice (1) popisuje nadrovinu $\mathcal{L}_k$ bez ohledu na výběr souřadného systému $\mathfrak{S}$ v E_n. Jestliže v E_n pevně zvolíme souřadný systém $\mathfrak{S} = (P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ a souřadnice bodu A a vektoru $\mathbf{v}_i$ jsou v tomto souřadném systému

$$\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]\,, \qquad \mathbf{v}_i = \big(v_{i,1}, v_{i,2}, \ldots, v_{i,n}\big)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, k\,,$$

dává rovnice (1) pro souřadnice $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ bodu X nadroviny $\mathcal{L}_k$ vztah

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i t_i\,, \quad \text{neboli} \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{v}_1 t_1 + \mathbf{v}_2 t_2 + \ldots + \mathbf{v}_k t_k\,, \qquad t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\,, \tag{2}$$

nebo ve složkách

$$x_r = a_r + v_{1,r} t_1 + v_{2,r} t_2 + \ldots + v_{k,r} t_k\,, \qquad r = 1, 2, \ldots, n\,, \quad t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\,.$$

Rovnice (2) se nazývají *parametrické rovnice* nadroviny.
Speciálně, přímka, která prochází bodem A a je rovnoběžná s vektorem $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, je dána rovnicí

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{v} t\,, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{nebo} \quad x_r = a_r + v_r t\,, \quad r = 1, 2, \ldots, n\,,$$

a rovina, která prochází bodem A a je rovnoběžná s lineárně nezávislými vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, má parametrické rovnice

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{u} s + \mathbf{v} t\,, \quad s, t \in \mathbb{R}\,, \quad \text{tj.} \quad x_r = a_r + u_r s + v_r t\,, \quad r = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Nyní uvedeme ještě jeden popis nadrovin v E_n. Jestliže je v prostoru E_n dáno $(n-1)$ lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, existuje, až na násobek právě jeden nenulový vektor $\mathbf{n} \in V_n$, který je kolmý na všechny vektory $\mathbf{v}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, tj. pro který platí

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_k = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1\,.$$

Jestliže je A bod $(n-1)$-rozměrné nadroviny $\mathcal{L}_{n-1}$, je pro každý bod $X \in \mathcal{L}_{n-1}$ vektor $X - A$ kolmý k vektoru $\mathbf{n}$. To znamená, že platí

$$\mathbf{n} \cdot (X - A) = 0\,.$$

Jestliže má bod A souřadnice $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ a normálový vektor souřadnice $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_n)$, platí pro souřadnice $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ bodu X nadroviny $\mathcal{L}_{n-1}$ rovnice

$$\mathbf{n} \cdot \big(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\big) = 0\,, \quad \text{tj.} \quad n_1(x_1 - a_1) + n_2(x_2 - a_2) + \ldots + n_n(x_n - a_n) = 0\,. \tag{3}$$

Je-li v E_n dáno k lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, existuje právě $(n-k)$ lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_{n-k}$, které jsou kolmé na každý vektor $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, tj. pro které platí

$$\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{v}_s = 0\,, \qquad r = 1, 2, \ldots, n-k\,, \quad s = 1, 2, \ldots, k\,.$$

Jestliže je $\mathcal{L}_k$ k-rozměrná nadrovina v E_n, která prochází bodem A a je rovnoběžná s vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, je pro každý bod X této nadroviny vektor $X-A$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. Proto je kolmý ke každému vektoru $\mathbf{n}_r$, $r = 1, 2, \ldots, n-k$ a body této nadroviny $\mathcal{L}_k$ popsat rovnicemi

$$\mathbf{n}_r \cdot (X - A) = 0\,, \quad r = 1, 2, \ldots, n-k\,.$$

Jestliže má bod A souřadnice $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ a souřadnice vektorů $\mathbf{n}_r$ jsou $\mathbf{n}_r = (n_{r,1}, n_{r,2}, \ldots, n_{r,n})$, kde $r = 1, 2, \ldots, n-k$, je nadrovina $\mathcal{L}_k$ popsána soustavou rovnic

$$\mathbf{n}_r \cdot \big(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\big) = 0\,, \qquad r = 1, \ldots, n-k\,, \tag{4}$$

neboli

$$n_{r,1}(x_1 - a_1) + n_{r,2}(x_2 - a_2) + \ldots + n_{r,n}(x_n - a_n) = 0\,, \qquad r = 1, \ldots, n-k\,.$$

Geometrický význam tohoto popisu je ten, že k-rozměrnou nadrovinu popisujeme jako průnik $(n-k)$ různých $(n-1)$-nadrovin v E_n, které jsou dány rovnicemi (4).

Jestliže je k-rozměrná nadrovina $\mathcal{L}_k$ v E_n rovnoběžná s lineárně nezávislými vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, nazývá se každý nenulový vektor $\mathbf{n}$, který je kolmý na všechny vektory $\mathbf{v}_i$, *normálový vektor* k nadrovině $\mathcal{L}_k$. Každá přímka, která je rovnoběžná s normálovým vektorem se nazývá *normála* k nadrovině $\mathcal{L}_k$. Jestliže bod A leží v nadrovině $\mathcal{L}_k$, je normála k nadrovině $\mathcal{L}_k$, která prochází bodem A dána parametrickou rovnicí

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{n}t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Ke k-rozměrné nadrovině $\mathcal{L}_k$ existuje právě $n-k$ lineárně nezávislých normálových vektorů $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_{n-k}$. Každá $(n-k)$-rozměrná nadrovina, která je rovnoběžná s lineárně nezávislými normálovými vektory se nazývá normálová nadrovina k $\mathcal{L}_k$. Je-li A daný bod nadroviny $\mathcal{L}_k$, jsou parametrické rovnice normálové nadroviny, která prochází bodem A

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{n}_1 t_1 + \mathbf{n}_2 t_2 + \ldots + \mathbf{n}_{n-k} t_{n-k}\,, \quad t_1, t_2, \ldots, t_{n-k} \in \mathbb{R}\,.$$

Z předešlých úvah plyne, že k-rozměrnou nadrovinu $\mathcal{L}_k$, která prochází bodem A a je rovnoběžná s lineárně nezávislými vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, lze popsat buď pomocí parametrických rovnic

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{v}_1 t_1 + \mathbf{v}_2 t_2 + \ldots + \mathbf{v}_k t_k\,, \quad t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R} \tag{5}$$

nebo pomocí řešení soustavy lineárních rovnic

$$\mathbf{n}_r \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 0\,, \quad r = 1, 2, \ldots, n-k\,, \tag{6}$$

kde $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_{n-k}$ jsou lineárně nezávislé normálové vektory k nadrovině $\mathcal{L}_k$.

Z výše uvedených úvah by mohlo být zřejmé, že parametrický popis nadrovin souvisí s tečnými vektory a popis nadroviny pomocí soustavy lineárních rovnic, tj. jako průnik $(n-1)$-nadrovin, s normálovými vektory. Později uvidíme, že tento princip platí i pro obecné plochy.

`Poznámka.` Krátce připomenu vztah mezi mezi těmito dvěmi popisy, který by měl být znám z lineární algebry.
Snadno nahlédneme, že lineární rovnicí

$$n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_nx_n = b\,, \tag{7}$$

kde alespoň jedno $n_k \neq 0$, je dána $(n-1)$-rozměrná nadrovina $\mathcal{L}_{n-1}$ v E_n, jejíž normálový vektor je $\mathbf{n} = (n_1, n_2 \ldots, n_n) \neq \mathbf{0}$.
Z lineární algebry by mělo být známo, že obecné řešení $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ rovnice (7) lze zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{v}\,,$$

kde $\boldsymbol{a}$ je jedno řešení nehomogenní rovnice (7) a $\mathbf{v}$ je obecné řešení homogenní rovnice

$$n_1v_1 + n_2v_2 + \ldots + n_nv_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = 0\,. \tag{8}$$

Je také známo, že množina všech řešení homogenní rovnice (8) tvoří vektorový prostor. V našem případě je báze v tomto prostoru tvořena $n-1$ lineárně nezávislými vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$, které jsou kolmé na normálový vektor $\mathbf{n}$. Obecné řešení lineární rovnice (7) tedy je

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{v}_1t_1 + \mathbf{v}_2t_2 + \ldots + \mathbf{v}_{n-1}t_{n-1}\,, \quad t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{R}\,,$$

což je parametrická rovnice $(n-1)$-rozměrné nadroviny, která je dána rovnicí (7).
Jestliže je nadrovina dána jako řešení soustavy k lineárních rovnic

$$\begin{array}{c} n_{1,1}x_1 + n_{1,2}x_2 + \ldots + n_{1,n}x_n = b_1\,, \\ n_{2,1}x_1 + n_{2,2}x_2 + \ldots + n_{2,n}x_n = b_2\,, \\ \vdots \\ n_{k,1}x_1 + n_{k,2}x_2 + \ldots + n_{k,n}x_n = b_k\,, \end{array} \quad \text{tj.} \quad \begin{array}{c} \mathbf{n}_1\cdot\boldsymbol{x} = b_1\,, \\ \mathbf{n}_2\cdot\boldsymbol{x} = b_2\,, \\ \vdots \\ \mathbf{n}_k\cdot\boldsymbol{x} = b_k\,, \end{array} \tag{9}$$

kde $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory, je její obecné řešení

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{v}\,,$$

kde $\boldsymbol{a}$ je jedno řešení nehomogenní rovnice (9) a $\mathbf{v}$ je obecné řešení homogenní rovnice

$$\begin{array}{c} n_{1,1}v_1 + n_{1,2}v_2 + \ldots + n_{1,n}v_n = \mathbf{n}_1\cdot\mathbf{v} = 0\,, \\ n_{2,1}v_1 + n_{2,2}v_2 + \ldots + n_{2,n}v_n = \mathbf{n}_2\cdot\mathbf{v} = 0\,, \\ \vdots \\ n_{k,1}v_1 + n_{k,2}v_2 + \ldots + n_{k,n}v_n = \mathbf{n}_k\cdot\mathbf{v} = 0\,. \end{array} \tag{10}$$

Protože předpokládáme, že jsou normálové vektory lineárně nezávislé, má vektorový prostor řešení bázi tvořenou $(n-k)$ lineárně nezávislými vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-k}$ a obecné řešení soustavy (9) je

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mathbf{v}_1t_1 + \mathbf{v}_2t_2 + \ldots + \mathbf{v}_{n-k}t_{n-k}\,, \quad t_1, t_2, \ldots, t_{n-k} \in \mathbb{R}\,,$$

tj. parametrické rovnice $(n-k)$-rozměrné nadroviny.

Naopak od parametrického popisu nadroviny (5) přejdeme k jejímu popisu pomocí soustavy rovnic (6) tak, že z rovnic (5) vyloučíme parametry t_1, t_2, …, t_k. To lze udělat tak, že najdeme $(n-k)$ lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{n}_r$, $r = 1, 2, \ldots, n-k$, které jsou kolmé na vektory $\mathbf{v}_s$, $s = 1, 2, \ldots, k$, tj. pro každé r a s platí $\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{v}_s = 0$. Když napíšeme parametrické rovnice (5) ve tvaru

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = \mathbf{v}_1 t_1 + \mathbf{v}_2 t_2 + \ldots + \mathbf{v}_k t_k\,,$$

je ihned vidět, že pro každé $r = 1, 2, \ldots, n-k$, platí

$$\mathbf{n}_r \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{v}_1 t_1 + \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{v}_2 t_2 + \ldots + \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{v}_k t_k = 0\,,$$

což je soustava rovnic (6), která popisuje danou nadrovinu.

Kvadratické nadplochy v E_n, kuželosečky v E_2

Nadplocha $\mathcal{P} \subset E_n$ se nazývá kvadratická, jestliže ji lze vyjádřit ve tvaru

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0\,,$$

kde $a_{ik} = a_{ki}$ nejsou všechna rovna nule. Jestliže zavedeme symetrickou matici $\mathbf{A}$ a sloupcové vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{b}$, lze tuto rovnici zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{x}^T \mathbf{A} \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c = 0\,.$$

Obecně o tvaru kvadratické nadplochy $\mathcal{P}$ rozhoduje signatura kvadratické formy

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k = \boldsymbol{x}^T \mathbf{A} \boldsymbol{x}$$

a lineární členy $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x}$ udávají posunutí středu této plochy.
V přednášce se nebudeme zabývat obecnými kvadratickými plochami v E_n. Co byste ale měli znát, jsou rovnice kvadratických křivek v rovině, tj. kuželoseček, s osami rovnoběžnými se souřadnicovými osami. Uvedu rovnice těchto křivek se středem v počátku. Křivky, které nemají střed v počátku dostaneme, když zaměníme $x \mapsto x - x_s$ a $y \mapsto y - y_s$ (používám konvenci $x = x_1$ a $y = x_2$).

1. Rovnice $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ je rovnice elipsy s poloosami a a b. Je-li $a = b = R$ jedná se o kružnici s poloměrem R;

   Rovnice $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ je bod $x = y = 0$;

   Rovnice $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ je prázdná množina.

2. Rovnice $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ je rovnice hyperboly s hlavní poloosou a ve směru osy x a vedlejší poloosou b ve směru osy y;

   Rovnice $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ je rovnice hyperboly s hlavní poloosou a ve směru osy y a vedlejší poloosou b ve směru osy x;

Rovnice $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$ je rovnice dvojice přímek $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ a $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$.

3. Rovnice $x^2 = ay$, $a \neq 0$, je rovnice paraboly s osou v přímce $x = 0$, tj. v souřadnicové ose y;

   Rovnice $x^2 = 0$ je rovnice přímky $x = 0$, tj. souřadnicová osa y.

Změna souřadného systému, transformace souřadnic

Abychom mohli nějaký útvar $\mathcal{T}$, tj. množinu bodů, v prostoru E_n popsat pomocí n čísel x_1, x_2, $\dots$, x_n, musíme nejprve zvolit kartézský systém souřadnic

$$\mathfrak{S} = \{P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\},$$

tj. bod $P \in E_n$ a n vzájemně ortogonálních jednotkových vektorů $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\dots$, $\mathbf{e}_n \in V_n$.
Pomocí takto zvoleného souřadného systému $\mathfrak{S}$ pak můžeme každému bodu $X \in E_n$ přiřadit jeho souřadnice, tj. uspořádanou n–tici reálných čísel $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, a útvary v E_n popisovat pomocí jeho souřadnic. Při takovém přiřazení odpovídají podmnožiny $M \subset \mathbb{R}^n$ jednoznačně útvarům $\mathcal{T}$ v n-rozměrném euklidovském prostoru E_n.
Ale daný útvar $\mathcal{T}$ můžeme také popsat pomocí jiného souřadného systému

$$\widehat{\mathfrak{S}} = \left\{Q; \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\right\}.$$

V takovém souřadném systému přiřadíme bodu $X \in E_n$ úplně jinou uspořádanou n–tici reálných čísel $\widehat{\boldsymbol{x}} = \left[\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_n\right]$.
Nyní se budeme zabývat otázkou, jak souvisí souřadnice bodu $X \in E_n$ v souřadných systémech $\mathfrak{S}$ a $\widehat{\mathfrak{S}}$, tj. hledat vztah mezi n-ticemi $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ a $\widehat{\boldsymbol{x}} = \left[\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_n\right]$.
Rovnost $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QX}$ mezi vázanými vektory vede ke vztahu $(X - P) = (Q - P) + (X - Q)$ mezi volnými vektory. Vektor $(X - P) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{e}_k$ udává souřadnice bodu X v souřadném systému $\mathfrak{S}$, vektor $(Q - P) = \sum_{k=1}^{n} q_k \mathbf{e}_k$ udává souřadnice počátku Q soustavy $\widehat{\mathfrak{S}}$ v soustavě $\mathfrak{S}$ a vektor $(X - Q) = \sum_{k=1}^{n} \widehat{x}_k \mathbf{f}_k$ určuje souřadnice bodu X v soustavě $\widehat{\mathfrak{S}}$. Proto musí ve vektorovém prostoru V_n platit vztah

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} q_k \mathbf{e}_k + \sum_{k=1}^{n} \widehat{x}_k \mathbf{f}_k .$$

Abychom našli nové souřadnice $\widehat{x}_i$ bodu X, vynásobíme tento vztah skalárně vektorem $\mathbf{f}_i$. Protože vektory $\mathbf{f}_k$ jsou ortonormální, tj. platí $\mathbf{f}_k \cdot \mathbf{f}_i = \delta_{ik}$, dostaneme pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ rovnost

$$\widehat{x}_i = \sum_{k=1}^{n} (x_k - q_k)\left(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{f}_i\right). \tag{11}$$

Protože vektory $\mathbf{e}_k$ a $\mathbf{f}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, tvoří dvě báze v n-dimenzionálním prostoru V_n, lze jedny vyjádřit pomocí druhých, tj. musí existovat regulární matice $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ typu $n \times n$ takové, že pro každé $k = 1, 2, \dots, n$ platí

$$\mathbf{e}_k = \sum_{r=1}^{n} U_{rk} \mathbf{f}_r , \qquad \mathbf{f}_k = \sum_{s=1}^{n} V_{sk} \mathbf{e}_s .$$

Jestliže vynásobíme první rovnici skalárně vektorem $\mathbf{f}_i$ dostaneme

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{f}_i = \sum_{r=1}^{n} U_{rk}\mathbf{f}_r \cdot \mathbf{f}_i = \sum_{r=1}^{n} U_{rk}\delta_{ri} = U_{ik}\,.$$

Podobně když vynásobíme druhou rovnici skalárně $\mathbf{e}_i$ dostaneme $\mathbf{f}_k \cdot \mathbf{e}_i = V_{ik}$. Tedy platí

$$V_{ik} = \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{f}_k = U_{ki}\,, \quad \text{neboli} \quad \mathbf{V} = \mathbf{U}^T\,,$$

kde $\mathbf{U}^T$ je matice transponovaná k matici $\mathbf{U}$.
Další vztah mezi maticemi $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ dostaneme z následující identity

$$\mathbf{e}_k = \sum_{r=1}^{n} U_{rk}\mathbf{f}_r = \sum_{r=1}^{n} U_{rk}\Big(\sum_{s=1}^{n} V_{sr}\mathbf{e}_s\Big) = \sum_{r,s=1}^{n} V_{sr}U_{rk}\mathbf{e}_s\,.$$

Jestliže tuto rovnost vynásobíme skalárně vektorem $\mathbf{e}_i$, dostaneme rovnost

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i = \delta_{ik} = \sum_{r,s=1}^{n} V_{sr}U_{rk}\delta_{si} = \sum_{r=1}^{n} V_{ir}U_{rk}\,,$$

kterou lze maticově zapsat jako $\mathbf{VU} = \mathbf{I}$, kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice. Tedy matice $\mathbf{V}$ je nejen transponovaná k matici $\mathbf{U}$, ale je k ní také inverzní. To znamená, že platí

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}\,.$$

Řádky (sloupce) matice, pro které je inverzní matice rovna transponované matici, tj. pro které platí $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$, jsou tvořeny navzájem ortogonálními jednotkovými vektory a proto se nazývají *ortogonální matice.*
Vztah (11) lze tedy pomocí ortogonální matice $\mathbf{U}$ zapsat jako

$$\widehat{x}_i = \sum_{k=1}^{n} U_{ik}(x_k - q_k)\,, \quad \text{neboli} \quad \widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{U}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q})\,. \tag{12}$$

Jestliže za bod X vezmeme počátek P souřadného systému $\mathfrak{S}$, je $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} = 0$. Tedy souřadnice počátku P souřadného systému $\mathfrak{S}$ v souřadném systému $\widehat{\mathfrak{S}}$ jsou $\widehat{\boldsymbol{p}} = -\mathbf{U}\boldsymbol{q}$ a vztah (12) mezi souřadnicemi bodu X lze zapsat ve tvaru

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = \widehat{\boldsymbol{p}} + \mathbf{U}\boldsymbol{x}\,.$$

Skaláry, vektory a tenzory v euklidovském prostoru

Jak jsme se už zmínili, jsou souřadnice bodu v euklidovském prostoru E_n pouze pomocný pojem, který nám umožňuje provádět výpočty. Jestliže zavedeme v E_n nějaký kartézský systém souřadnic

$$\mathfrak{S} = \big\{P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\big\}\,,$$

přiřadíme každému bodu $X \in E_n$ jeho souřadnice vzhledem k systému $\mathfrak{S}$, tj. uspořádanou n–tici reálných čísel $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Pomocí souřadnic pak popisujeme různé objekty $\mathcal{O}$ v prostoru E_n tak, že jim přiřadíme nějakou množinu reálných čísel $f_\alpha(\boldsymbol{x})$, kde α patří do nějaké množiny. Máme tedy jistý objekt $\mathcal{O}$, kterému v každém souřadném systému $\mathfrak{S}$ přiřadíme funkce $f_\alpha(\boldsymbol{x})$. Symbolicky lze psát

$$\mathfrak{S}(\mathcal{O}) \mapsto f_\alpha(\boldsymbol{x})\,.$$

Pro jednoduchost se omezíme pouze na kartézské souřadnice, tj. připouštíme pouze souřadné systémy $\mathfrak{S}$ a $\widehat{\mathfrak{S}}$, které jsou spojeny transformací (12). V těchto souřadných systémech dostaneme pro funkce, které popisují objekt $\mathcal{O}$

$$\mathfrak{S}(\mathcal{O}) \mapsto f_\alpha(\boldsymbol{x}) \qquad \text{a} \qquad \widehat{\mathfrak{S}}(\mathcal{O}) \mapsto \widehat{f}_\alpha(\widehat{\boldsymbol{x}})\,.$$

Protože tyto funkce popisují stejný objekt $\mathcal{O}$, musí pro ně existovat nějaký vztah, který určuje, jak je přepočítat z jednoho souřadného systému do druhého. Podle tohoto vztahu se definují objekty různého typu.

Skaláry jsou objekty, které lze popsat v souřadném systému $\mathfrak{S}$ reálnou funkcí $f(\boldsymbol{x})$ a při přechodu k souřadnému systému $\widehat{\mathfrak{S}}$ danému vztahem (12) pro ně platí

$$\widehat{f}(\widehat{\boldsymbol{x}}) = f(\boldsymbol{x})\,. \tag{13}$$

Vektory jsou objekty, které lze popsat v souřadném systému $\mathfrak{S}$ uspořádanou n–ticí reálných funkcí $f_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, neboli $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = \big(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x})\big)$ a při přechodu k souřadnému systému $\widehat{\mathfrak{S}}$ danému vztahem (12) pro ně platí

$$\widehat{\mathbf{f}}(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{U}\mathbf{f}(\boldsymbol{x})\,, \quad \text{tj.} \quad \widehat{f}_k(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{i=1}^{n} U_{ki} f_i(\boldsymbol{x})\,. \tag{14}$$

Příklad. Například n–tice tvořené souřadnicemi bodu $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ nejsou vektory, protože se při přechodu k jinému souřadnicovému systému transformují podle vztahu (12). Ale vázaný vektor $\overrightarrow{XY}$ z bodu X do bodu Y je skutečně vektor, protože pro jeho souřadnice platí

$$\widehat{\boldsymbol{y}} - \widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{U}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{q}) - \mathbf{U}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}) = \mathbf{U}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{q} - \boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}) = \mathbf{U}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\,.$$

Obecně nemůžeme prohlásit, že každá reálná funkce $f(\boldsymbol{x})$ proměnné $\boldsymbol{x}$ je skalár, protože pro ni musí platit transformační předpis (13). Například první souřadnice vektoru není skalár, přestože je to reálné číslo. Dokonce tato souřadnice ani neodpovídá nějakému objektu v prostoru E_n. Problém je v tom, že ze znalosti pouze této souřadnice v jednom souřadném systému nelze určit její hodnotu v jiném souřadném systému. Naproti tomu vektor, tj. uspořádaná množina souřadnic, odpovídá jistému objektu v E_n, protože z jeho znalosti v jednom souřadném systému lze jednoznačně určit hodnotu všech souřadnic v libovolném souřadném systému.

Příklad. Ukážeme, že skalární součin dvou vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ definovaný vztahem

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \tag{15}$$

je skutečně skalár. Protože jsou $\mathbf{u}(\boldsymbol{x})$ a $\mathbf{v}(\boldsymbol{x})$ vektory, platí pro ně podle (14) transformační vztahy

$$\widehat{\mathbf{u}}(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{U}\mathbf{u}(\boldsymbol{x}) \quad \text{a} \quad \widehat{\mathbf{v}}(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{U}\mathbf{v}(\boldsymbol{x})\,,$$

nebo v souřadnicích

$$\widehat{u}_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{k=1}^{n} U_{ik} u_k(\boldsymbol{x}) \quad \text{a} \quad \widehat{v}_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{\ell=1}^{n} U_{i\ell} v_\ell(\boldsymbol{x})\,.$$

Pro jejich skalární součin tedy platí

$$\big(\widehat{\mathbf{u}} \cdot \widehat{\mathbf{v}}\big)(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) \widehat{w}_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{i,k,\ell=1}^{n} U_{ik} U_{i\ell} u_k(\boldsymbol{x}) v_\ell(\boldsymbol{x})\,.$$

Protože je matice $\mathbf{U}$ ortogonální, tj. $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$, je $\sum\limits_{i=1}^{n} U_{ik}U_{i\ell} = \delta_{k\ell}$, a tedy

$$\big(\widehat{\mathbf{u}} \cdot \widehat{\mathbf{v}}\big)(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{k,\ell=1}^{n} \delta_{k\ell} u_k(\boldsymbol{x}) v_\ell(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} u_k(\boldsymbol{x}) v_k(\boldsymbol{x}) = \big(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\big)(\boldsymbol{x})\,.$$

Proto lze skalární součin dvou vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ počítat podle vztahu (15) v libovolné kartézské soustavě souřadnic.

Tenzory se souhrnně nazývají objekty v prostoru E_n, které se při změně souřadnic (12) transformují podobně jako jisté součiny, tzv. tenzorové součiny, vektorů. Tenzorem $\mathbf{T}$ druhého řádu nazýváme objekt ve prostoru E_n, kterému v daném souřadném systému přiřadíme n^2 reálných funkcí $T_{ij}(x)$, které se při změně souřadnic (12) transformují podle vztahů

$$\widehat{T}_{ij}(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{k,\ell=1}^{n} U_{ik} U_{i\ell} T_{k\ell}(\boldsymbol{x})\,.$$

Například jsou-li $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ vektory se souřadnicemi u_i a v_j, je veličina, která se skládá ze složek $T_{ij} = u_i v_j$ tenzor druhého řádu. Příkladem tenzoru druhého řádu, který nelze vyjádřit jako součin vektorů, je Kroneckerův symbol δ_{ij}, který má ve všech systémech souřadnic stejný tvar. To plyne ze vztahu

$$\widehat{\delta}_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^{n} U_{ik} U_{j\ell} \delta_{k\ell} = \sum_{k=1}^{n} U_{ik} U_{jk} = \delta_{ij}\,.$$

Takové tenzory, které mají ve všech souřadnicích stejný tvar, se nazývají invariantní.
Tenzor $\mathbf{T}$ druhého řádu lze interpretovat také jako lineární zobrazení, které vektoru $\mathbf{v}$ se složkami v_k přiřadí vektor $\mathbf{Tv}$ se složkami

$$(\mathbf{Tv})_i = \sum_{k=1}^{n} T_{ik} v_k\,.$$

Jako příklad fyzikální interpretace tenzoru druhého řádu může být tzv. tenzor napětí $\boldsymbol{\tau}$, který ploše ΔS s normálovým vektorem $\mathbf{n}$, přiřadí sílu $\mathbf{F}$, která na tuto plochu působí. Ve složkách se toto přiřazení zapíše jako

$$F_i(\boldsymbol{x}) = \big(\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}\big)_i(\boldsymbol{x})\,\Delta S = \sum_{k=1}^{n} \tau_{ik}(\boldsymbol{x}) n_k(\boldsymbol{x})\,\Delta S\,.$$

Obecně se tenzorem r–tého řádu nazývá objekt T v prostoru E_n, který lze popsat n^r reálnými funkcemi $T_{i_1 i_2 \dots i_r}(\boldsymbol{x})$, které se při změně souřadnic (12) transformují podle vztahů

$$\widehat{T}_{i_1 i_2 \dots i_r}(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_r = 1}^{n} U_{i_1 k_1} U_{i_2 k_2} \dots U_{i_r k_r} T_{k_1 k_2 \dots k_r}(\boldsymbol{x})\,. \tag{16}$$

Speciálním případem tenzorů jsou skaláry, které jsou tenzory řádu 0 a vektory, což jsou tenzory řádu 1.