Přednáška 3

Derivace funkce podle vektoru, parciální derivace, tečná rovina a diferencovatelné funkce

V této přednášce bude většinou $f : X \to \mathbb{R}$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$, reálná funkce n proměnných. Pro její funkční hodnoty budeme obecně psát $y = f(\mathbf{x})$. Geometricky budeme graf funkce $y = f(\mathbf{x})$ interpretovat jako plochu $\mathcal{S}$ v Euklidově prostoru E_{n+1} se souřadnicemi $\big(\mathbf{x}, y\big)$, kde $\mathbf{x} \in X$ a $y = f(\mathbf{x})$.
V případě funkce dvou reálných proměnných budeme často používat obvyklého značení $z = f(x, y)$ a graf funkce bude plocha $\mathcal{S} \subset E_3$ s parametrickými rovnicemi

$$x = u\,, \quad y = v\,, \quad z = f(u, v)\,, \qquad [u, v] \in X \subset \mathbb{R}^2$$

s parametry u a v nebo, jak se píše obvykle,

$$x = x\,, \quad y = y\,, \quad z = f(x, y)\,, \qquad [x, y] \in X \subset \mathbb{R}^2\,.$$

Derivace funkce podle vektoru a parciální derivace

Nechť je $y = f(\mathbf{x})$ funkce definovaná na množině $X \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in X$ a $\mathbf{v}$ vektor v $\mathbb{R}^n$. Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $|t| < \delta$ je bod $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{v}t \in X$. Pak je pro $|t| < \delta$ definována funkce

$$F(t) = f(\mathbf{a} + \mathbf{v}t) = f\big(a_1 + v_1 t, a_2 + v_2 t, \dots, a_n + v_n t\big)\,. \tag{1}$$

Definice. Derivaci funkce $F(t)$, která je definovaná vztahem (1), v bodě $t = 0$, tj. $F'(0)$, nazýváme *derivace funkce* $f(\mathbf{x})$ *podle vektoru* $\mathbf{v}$ v bodě $\mathbf{a}$ a budeme ji značit

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a})\,.$$

Je-li $\|\mathbf{v}\|^2 = 1$, nazýváme $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ *derivace funkce* $f(\mathbf{x})$ *ve směru* $\mathbf{v}$ v bodě $\mathbf{a}$.
Je-li $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$, kde $\mathbf{e}_i$ je jednotkový vektor ve směru osy x_i, nazývá se $f'_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{a})$ *parciální derivace funkce* $f(\mathbf{x})$ *podle proměnné* x_i v bodě $\mathbf{a}$ a budeme ji značit jako

$$f'_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{a}) = f'_{,i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\,.$$

`Poznámka.` Jestliže interpretujeme funkci n proměnných $f(\mathbf{x})$ jako n-rozměrnou nadplochu $\mathcal{S}$ v prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ se souřadnicemi $[\mathbf{x}, y]$, jsou parametrické rovnice této nadplochy

$$x_k = x_k\,, \quad k = 1, 2, \dots, n\,, \qquad y = f(\mathbf{x})\,.$$

Pro dané $\mathbf{a} \in D_f$ leží bod $\mathbf{A} = [\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ v této nadploše. Pro daný nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sestrojíme dvou-rozměrnou nadplochu $\mathcal{P}_2$, tj. rovinu, která prochází bodem $\mathbf{A}$ a je rovnoběžná s vektory $\mathbf{V} = (\mathbf{v}, 0)$ a $\mathbf{e}_{n+1}$. Průnik roviny $\mathcal{P}_2$ s nadplochou $\mathcal{S}$ je křivka $\mathcal{C}$, která prochází bodem $\mathbf{A}$ a jejíž parametrické rovnice jsou

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{v}t\,, \quad y = f(\mathbf{a} + \mathbf{v}t) = F(t)\,, \qquad |t| < \delta\,.$$

Bodu $\mathbf{A} = \big[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})\big]$ odpovídá hodnota parametru $t = 0$ a tečný vektor ke křivce $\mathcal{C}$ v bodě $\mathbf{A}$ je

$$\mathbf{t} = \big(\mathbf{v}, f'_{\mathbf{v}}(a)\big)\,.$$

Protože křivka $\mathcal{C}$ leží v nadploše $\mathcal{S}$, musí být vektor $\mathbf{t}$ rovnoběžný s tečnou nadrovinou k nadploše $\mathcal{S}$ v bodě $\mathbf{A}$. Pokud ovšem tečná nadrovina existuje.

Příklad. Najděte derivaci funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ podle vektoru $\mathbf{v} = (2,1)$ v bodě $\mathbf{a} = [1,-1]$.

Řešení: Funkce $F(t)$ definovaná vztahem (1) je v tomto případě

$$F(t) = f(1+2t, -1+t) = (1+2t)^2 - (1+2t)(-1+t) + (-1+t)^2 = 3 + 3t + 3t^2\,.$$

Protože její derivace je $F'(t) = 3 + 6t$, je

$$f_{\mathbf{v}}(1,-1) = F'(0) = 3\,.$$

`Poznámka.` Podle definice je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},\dots,a_n) - f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\dots,a_n)}{h}\,.$$

To znamená, že při výpočtu parciální derivace podle proměnné x_i položíme nejprve $x_k = a_k$ pro $k \neq i$ a tím získáme funkci jedné proměnné $F_i(x_i) = f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n)$, kterou derivujeme v bodě $x_i = a_i$.

Příklad. Najděte obě parciální derivace funkce

$$f(x,y) = x^2y + (y-1)\arcsin\Big(\frac{2-x}{3+y}\Big)^2$$

v bodě $\mathbf{a} = [2,1]$.

Řešení. Při výpočtu $f'_{,x}(2,1)$ sestrojíme nejprve funkci $F_1(x) = f(x,1) = x^2$, jejíž derivace v bodě $x = 2$ je

$$f'_{,x}(2,1) = \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}x}(2) = 4\,,$$

a pro výpočet $f'_{,y}(2,1)$ sestrojíme funkci $F_2(y) = f(2,y) = 4y$, jejíž derivace je

$$f'_{,y}(2,1) = \frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}y}(1) = 4\,.$$

Zatím jsme definovali derivaci podle vektoru a parciální derivaci funkce $y = f(\mathbf{x})$ v daném bodě $\mathbf{a}$. Následující definice definuje derivaci podle vektoru a parciální derivaci jako funkci na jisté množině $\widehat{X} \subset X$.

Definice. Nechť je $\widehat{X} \subset X$ množina všech $\mathbf{x} \in X$, pro která existuje derivace podle vektoru $\mathbf{v}$ v bodě $\mathbf{x}$. Funkce $f'_{\mathbf{v}} : \widehat{X} \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem $y = f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$, se nazývá *derivace podle vektoru* $\mathbf{v}$.

Je-li $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$, nazýváme funkci $f'_{,i}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ *parciální derivace podle proměnné* x_i.

`Poznámka.` Rozdíl mezi předchozími definicemi je v tom, že derivace v bodě $\mathbf{a}$ v první definici je číslo, kdežto druhá definice definuje funkci, jejíž hodnota v bodě $\mathbf{x}$ je rovna derivaci v bodě $\mathbf{x}$.

Protože derivace funkce $y = f(\mathbf{x})$ podle vektoru $\mathbf{v}$ a parciální derivace jsou definovány pomocí derivace funkce jedné reálné proměnné, platí pro ně věty o derivaci součtu, součinu a podílu, které jsou známy z prvního semestru.

Věta. Nechť je $y = f(\mathbf{x})$ a $c \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ existuje také $f'_{c\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ a platí

$$f'_{c\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = c f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})\,.$$

Důkaz: Pro výpočet derivace podle vektoru $\mathbf{v}$ sestrojíme funkce $F(f) = f(\mathbf{a}+t\mathbf{v})$ a pro výpočet derivace podle vektoru $c\mathbf{v}$ funkci

$$\widehat{F}(t) = f(\mathbf{a} + ct\mathbf{v}) = F(ct)\,.$$

Podle věty o derivaci složené funkce je $\widehat{F}'(t) = cF'(ct)$, a tedy v bodě $t = 0$ platí

$$f'_{c\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \widehat{F}'(0) = cF'(0) = c f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})\,. \quad \square$$

Tečná nadrovina ke grafu funkce $y = f(\boldsymbol{x})$

Jak jsme se zmínili dříve, je pro každý bod $\mathbf{a} \in D_f$ nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor

$$\mathbf{t} = \big(\mathbf{v}, f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})\big) = \mathbf{v} + f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})\,\mathbf{e}_{n+1}$$

tečný vektor v bodě $\mathbf{A} = \big[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})\big]$ k jisté křivce, která leží v n-rozměrné nadploše $\mathcal{S}$ dané rovnicí $y = f(\mathbf{x})$.
Předpokládejme, že v bodě $\mathbf{A} = \big[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})\big]$ existuje k nadploše $\mathcal{S}$ tečná nadrovina. Ta je určena bodem $\mathbf{A}$ a n lineárně nezávislými vektory $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n$ v $\mathbb{R}^{n+1}$, které leží v tečné nadrovině. Předpokládejme, že jsou to například vektory

$$\mathbf{t}_i = \big(\mathbf{e}_i, f'_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{a})\big) = \big(\mathbf{e}_i, f'_{,i}(\mathbf{a})\big) = \mathbf{e}_i + f'_{,i}(\mathbf{a})\,\mathbf{e}_{n+1}\,,$$

které jsou podle předchozího tečné k jistým křivkám, které leží v nadploše $\mathcal{S}$ a prochází bodem $\big[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})\big] \in \mathcal{S}$. Přímým výpočtem se lze přesvědčit, že vektor

$$\mathbf{n} = \big(f'_{,1}(\mathbf{a}), f'_{,2}(\mathbf{a}), \ldots, f'_{,n}(\mathbf{a}), -1\big) = \sum_{i=1}^{n} f'_{,i}(\mathbf{a})\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{n+1}$$

je kolmý na všechny vektory $\mathbf{t}_i$, a tedy je to vektor normály k tečné nadrovině. Proto je rovnice tečné nadroviny

$$\mathbf{n} \cdot \big(\mathbf{x} - \mathbf{a}, y - f(\mathbf{a})\big) = 0\,, \quad \text{tj.} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \cdot (x_i - a_i) - y + f(\mathbf{a}) = 0\,.$$

Tedy za předpokladu, že v bodě $\mathbf{a}$ existují parciální derivace funkce $y = f(\mathbf{x})$, a že v bodě $[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ existuje tečná nadrovina k nadploše $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definované rovnicí $y = f(\mathbf{x})$, je její rovnice

$$y - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \cdot (x_i - a_i)\,. \tag{2}$$

Nutná podmínka k existenci tečné nadroviny je, aby pro každé dva vektory $\mathbf{t}_1$ a $\mathbf{t}_2$, které leží v tečné nadrovině, v ní ležel také vektor $\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$ (obecněji každá lineární kombinace těchto vektorů). Protože pro každé vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ leží v tečné nadrovině vektory $\mathbf{t}_1 = \big(\mathbf{v}_1, f'_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{a})\big)$ a $\mathbf{t}_2 = \big(\mathbf{v}_2, f'_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{a})\big)$. Tedy musí v ní ležet vektor

$$\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 = \big(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, f'_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{a}) + f'_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{a})\big)\,.$$

Na druhou stranu v tečné nadrovině leží také vektor

$$\mathbf{t} = \big(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, f'_{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}(\mathbf{a})\big)\,.$$

Jestliže srovnáme tyto dva vztahy, zjistíme, že nutná podmínka pro existenci tečné nadroviny ke grafu funkce $y = f(\mathbf{x})$ v bodě $[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ je, aby pro každé $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ platilo

$$f'_{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}(\mathbf{a}) = f'_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{a}) + f'_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{a})\,. \tag{3}$$

Následující příklad ukazuje, že tato rovnost obecně neplatí.

Příklad. V bodě $\mathbf{a} = [0,0]$ najděte derivace funkce $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ podle vektorů $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ a $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = (1,1)$.

Řešení: Podle definice sestrojíme pro výpočet jednotlivých derivaci funkce

$$F_1(t) = f(t,0) = t\,, \qquad F_2(t) = f(0,t) = t\,, \qquad F_3(t) = f(t,t) = t\sqrt[3]{2}\,.$$

Z toho dostaneme

$$f'_{\mathbf{e}_1}(0,0) = f'_{\mathbf{e}_2}(0,0) = 1 \quad \text{a} \quad f'_{\mathbf{v}}(0,0) = \sqrt[3]{2} \neq f'_{\mathbf{e}_1}(0,0) + f'_{\mathbf{e}_2}(0,0) = 2\,.$$

Dokonce ani když platí (3) pro každé $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$, nemusí existovat tečná nadrovina a dokonce funkce $y = f(\mathbf{x})$ nemusí být v bodě $\mathbf{a}$ ani spojitá.

Příklad. Uvažujme funkci

$$f(x,y) = \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4} \quad \text{pro} \quad [x,y] \neq [0,0] \qquad \text{a} \quad f(0,0) = 0\,.$$

Nechť je $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \neq (0,0)$. Pak je

$$F(t) = f(v_1 t, v_2 t) = \frac{v_1^4 v_2^2 t^2}{v_2^4 + v_1^8 t^4}$$

pro $t \neq 0$ a $F(0) = 0$. Podle definice je

$$F'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1^4 v_2^2 t}{v_2^4 + v_1^8 t^4} = 0$$

(Pro $v_2 = 0$ je funkce rovna nule a pro $v_2 \neq 0$ je to zřejmé). Tedy pro každé $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ platí (3). Ale protože

$$\lim_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ y=x^2}} \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^8}{x^8 + x^8} = \frac{1}{2} \neq 0\,,$$

není tato funkce v bodě $[0,0]$ spojitá.

Diferenciál funkce

Diferenciální počet je založen na tom, že graf dané funkce $y = f(\mathbf{x})$ nahrazujeme v okolí bodu $\mathbf{A} = [\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ jednoduššími plochami, v prvním přiblížením tečnou nadrovinou. Proto jsou důležité funkce, pro jejichž graf existuje tečná nadrovina v libovolném bodě $[\mathbf{x}, f(\mathbf{x})]$, kde $\mathbf{x} \in X = D_f$.
Obecná n-rozměrná nadrovina v $\mathbb{R}^{n+1}$, která prochází bodem $[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ a jejíž normála není kolmá na vektor $\mathbf{e}_{n+1}$, má rovnici

$$y - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - a_i)\,, \tag{4}$$

kde c_i jsou reálná čísla. Z těchto nadrovin budeme vybírat tu, která s jistém smyslu nejlépe nahrazuje graf funkce $y = f(\mathbf{x})$ v okolí bodu $[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$.
Rozdíl mezi hodnotou funkce $f(\mathbf{x})$ a hodnotou, kterou dostaneme v bodě $\mathbf{x}$, když nahradíme graf funkce nadrovinou (4), je

$$\eta = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - a_i)\,.$$

Jestliže přesuneme počátek souřadnic do bodu $[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$ a nové souřadnice ve směru os $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, označíme h_i a ve směru osy $\mathbf{e}_{n+1}$ jako Δy, tj. zavedeme proměnné

$$h_i = x_i - a_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \qquad \Delta y = y - f(\mathbf{a})\,,$$

je rovnice nadroviny (4)

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} c_i h_i$$

a odchylka η je

$$\eta(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^{n} c_i h_i = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{c} \cdot \mathbf{h}\,, \tag{5}$$

kde $\mathbf{c} \cdot \mathbf{h}$ je skalární součin vektorů $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ a $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$.

Naše snaha bude zvolit vektor $\mathbf{c}$, tj. čísla c_i, tak, aby absolutní hodnota funkce $\eta(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ byla pro malá $\|h\|$ co nejmenší.
Budeme postupovat analogicky jako v případě funkce jedné proměnné, tj. $n = 1$. Tam je $\mathbf{a} = a$, $\mathbf{h} = h$ a

$$\eta(a, h) = f(a + h) - f(a) - ch\,.$$

Z této rovnice plyne pro $h \neq 0$ vztah

$$\frac{|\eta(a, h)|}{|h|} = \left|\frac{f(a + h) - f(a) - ch}{h}\right| = \left|\frac{f(a + h) - f(a)}{h} - c\right|. \tag{6}$$

Aby byla přímka $\Delta y = ch$, tj. $y - f(a) = c(x - a)$, tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[a, f(a)]$ museli jsme zvolit

$$c = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}\,.$$

Ze vztahu (6) je vidět, že tento požadavek je ekvivalentní tomu, že

$$\lim_{h\to 0}\frac{\big|\eta(a,h)\big|}{|h|}=0\,.$$

Proto budeme pro funkci n proměnných po vektoru $\mathbf{c}$ požadovat, aby platilo

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{\big|\eta(\mathbf{a},\mathbf{h})\big|}{\|\mathbf{h}\|}=0\,. \tag{7}$$

Definice. Nechť je dána funkce $f:X\to\mathbb{R}$, $X\subset\mathbb{R}^n$, a bod $\mathbf{a}\in X^\circ$. Jestliže existují reálná čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$ taková, že pro funkci $\eta(\mathbf{a},\mathbf{h})$ definovanou vztahem (5) platí (7), říkáme, že funkce $y=f(\mathbf{x})$ je *diferencovatelná* v bodě $\mathbf{a}$.
Je-li funkce $f=f(\mathbf{x})$ diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$ a $\mathbf{c}=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ takové, že platí (7), nazýváme lineární funkci n proměnných $\mathbf{h}=(h_1,h_2,\ldots,h_n)$, definovanou vztahem

$$\mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{h})=\sum_{i=1}^{n}c_ih_i=\mathbf{c}\cdot\mathbf{h} \tag{8}$$

diferenciál funkce $y=f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$.

Definice. Jestliže má funkce $y=f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ diferenciál (8), nazývá se nadrovina s rovnicí

$$y-f(\mathbf{a})=\sum_{i=1}^{n}c_i(x_i-a_i) \tag{9}$$

tečná rovina ke grafu funkce $y=f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{A}=[\mathbf{a},f(\mathbf{a})]$.

`Poznámka.` Když srovnáme definici diferenciálu (8) a tečné nadroviny (9), vidíme, že se jedná o tytéž objekty. Vztah pro diferenciál je vlastně rovnice tečné nadroviny v souřadnicích $\mathrm{d}f=y-f(\mathbf{a})$ a $h_i=x_i-a_i$. Proto se často prožívá, zejména při zápisu funkce $y=y(\mathbf{x})$, značeni $\mathrm{d}f=\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}x_i=x_i-a_i$ a diferenciál (8) se píše ve tvaru

$$\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{n}c_i\,\mathrm{d}x_i\,.$$

Později uvidíme početní výhody tohoto značení.

Podobně lze definovat diferenciál zobrazeni $\mathbf{F}:X\to\mathbb{R}^k$, kde $X\subset\mathbb{R}^n$. Je-li $\mathbf{a}\in X^\circ$ sestrojíme pro "malá" $\mathbf{h}$ zobrazeni

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{a},\mathbf{h})=\mathbf{F}(\mathbf{a}+\mathbf{h})-\mathbf{F}(\mathbf{a})-\mathbf{C}\mathbf{h}\,,$$

kde $\mathbf{C}$ je matice typu $k\times n$. V souřadnicích lze tuto rovnici zapsat ve tvaru

$$\eta_i(\mathbf{a},\mathbf{h})=F_i(\mathbf{a}+\mathbf{h})-F_i(\mathbf{a})-\sum_{j=1}^{n}C_{ij}h_j\,.$$

Definice. Jestliže existuje matice $\mathbf{C}$ taková, že

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{\|\boldsymbol{\eta}(\mathbf{a},\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|}=0\,,$$

nazývá se zobrazení $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ *diferencovatelné* v bodě $\mathbf{a}$ a lineární zobrazení proměnné $\mathbf{h}$ definované vztahem

$$\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \mathbf{C}\mathbf{h}$$

diferenciál zobrazení $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$.

Věta. Zobrazení $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ je diferencovatelné v bodě $\mathbf{a}$ právě tehdy, když jsou všechny jeho složky diferencovatelné funkce v bodě $\mathbf{a}$ a platí

$$\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \big(\mathrm{d}F_1(\mathbf{a}, \mathbf{h}), \mathrm{d}F_2(\mathbf{a}, \mathbf{h}), \ldots, \mathrm{d}F_k(\mathbf{a}, \mathbf{h})\big)\,.$$

`Poznámka.` Diferenciály, které jsme definovali výše, se nazývají *úplné* nebo *totální* diferenciály. To souvisí s tím, že jsme vektor $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, o který jsme se posouvali z daného bodu $\mathbf{a}$ zvolili tak, abychom dostali okolí $U(\mathbf{a})$ bodu $\mathbf{a} \in X^\circ$. Proto jsme měli n lineárně nezávislých posunutí. Je ale možné vybrat podprostor $V \subset \mathbb{R}^n$ dimenze r a požadovat, aby byl vektor $\mathbf{h} \in V$. Pak máme pouze r lineárně nezávislých posunutí a dostáváme tzv. *parciální* diferenciály.
Dále se definují diferenciály funkce vzhledem k množině $M \subset X$. Při jejich definici se požaduje, aby $\mathbf{a} \in M$ a uvažují se pouze takové posunutí $\mathbf{h}$, pro která je $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in M$.

Následující věta ukazuje souvislost diferenciálu funkce $y = f(\mathbf{x})$ s derivacemi funkce podle vektoru, speciálně s parciálními derivacemi.

Věta. Je-li funkce $y = f(\mathbf{x})$ diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$, existuje její derivace v bodě $\mathbf{a}$ podle každého vektoru $\mathbf{v}$ a platí

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \mathrm{d}f(\mathbf{a}, \mathbf{v})\,. \tag{10}$$

Důkaz. Jestliže má funkce $y = f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ diferenciál $\mathrm{d}f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i h_i$, je

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{\left| f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i h_i \right|}{\|\mathbf{h}\|} = 0\,.$$

Pro $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ je tvrzení (10) triviální. Nechť je $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Pak je také limita vzhledem k množině $\mathbf{h} = t\mathbf{v}$

$$\lim_{\substack{\mathbf{h} \to \mathbf{0} \\ \mathbf{h} = t\mathbf{v}}} \frac{\left| f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i h_i \right|}{\|\mathbf{h}\|} = \lim_{t \to 0} \frac{\left| f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i t v_i \right|}{|t| \|\mathbf{v}\|} = 0\,.$$

Tedy platí

$$\lim_{t \to 0} \left| \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right| = 0\,.$$

Ale to znamená, že

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i = \mathrm{d}f(\mathbf{a}, \mathbf{v})\,. \quad \square$$

Jestliže v této větě zvolíme $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$, dostaneme

$$f'_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{a}) = f'_{,i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = c_i\,.$$

Tedy pokud existuje diferenciál funkce $y = f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$, existují parciální derivace funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ a platí

$$\mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\, h_i\,. \tag{11}$$

Speciálně rovnice tečné roviny jsou dány vztahem (2).

Definice. Nechť je funkce $y = f(\mathbf{x})$ diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$. Pak vektor

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \bigl(f'_{,1}(\mathbf{a}), f'_{,2}(\mathbf{a}), \ldots, f'_{,n}(\mathbf{a})\bigr) \tag{12}$$

nazýváme *gradient* funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$.

Pomocí gradientu lze diferenciál funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ zapsat jako skalární součin

$$\mathrm{d}f(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \bigl(\operatorname{grad} f(\mathbf{a})\bigr) \cdot \mathbf{h}$$

a vztah (10) pro derivaci funkce $f(\mathbf{x})$ podle vektoru $\mathbf{v}$ v bodě $\mathbf{a}$ jako

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \bigl(\operatorname{grad} f(\mathbf{a})\bigr) \cdot \mathbf{v}\,.$$

`Poznámka.` Abych vysvětlil značení a názvosloví, které se v matematice obvykle používá, vrátím se na chvíli k funkci jedné reálné proměnné $y = f(x)$. Pro ni je diferenciál v bodě a definován jako lineární zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (graf je přímka, která prochází počátkem)

$$\mathrm{d}f(a,h) = ch\,,$$

kde pro reálné číslo c platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{\bigl|f(a+h) - f(a) - ch\bigr|}{|h|} = 0\,.$$

Číslo c, pomocí kterého je lineární zobrazení $\mathrm{d}f(a,h)$ definováno, jsme nazvali derivace funkce $f(x)$ v bodě a a označili $f'(a)$, tj. psali jsme

$$\mathrm{d}f(a,h) = f'(a)h\,.$$

Pro zobrazení $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ jsme postupovali podobně. Nejprve jsme definovali diferenciál zobrazení $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ jako lineární zobrazení

$$\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \mathbf{C}\mathbf{h}\,,$$

kde matice $\mathbf{C}$ má výše zmíněné vlastnosti a určuje toto lineární zobrazení. V analogii s funkcí jedné reálné proměnné se označí $\mathbf{C} = \mathbf{F}'(\mathbf{a})$, tj. diferenciál se zapíše ve tvaru

$$\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \mathbf{F}'(\mathbf{a})\,\mathbf{h}$$

a matice $\mathbf{F}'(\mathbf{a})$ se nazve *derivace zobrazení* $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$.
Například derivace funkce n proměnných $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ je vektor

$$f'(a) = \big(f'_{,1}(\mathbf{a}), f'_{,2}(\mathbf{a}), \dots, f'_{,n}(\mathbf{a})\big) = \operatorname{grad} f(\mathbf{a})\,.$$

Pro zobrazení $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \big(F_1(\mathbf{x}), F_2, (\mathbf{x}), \dots, F_k(\mathbf{x})\big)$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je derivace $\mathbf{F}'(\mathbf{a})$ matice typu $k \times n$ se složkami

$$\big(\mathbf{F}'(\mathbf{a})\big)_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})\,, \qquad i = 1, 2, \dots, k\,, \quad j = 1, 2, \dots, n\,.$$

Zatím jsme definovali diferenciál funkce nebo zobrazení v bodě $\mathbf{a}$. Podobně jako pro derivace podle vektoru v bodech, kde existuje diferenciál, definuje zobrazení, které se také nazývá diferenciál.

Definice. Nechť je $f : X \to \mathbb{R}$ a $M \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Jestliže je funkce $f(\mathbf{x})$ diferencovatelná v každém bodě množiny M, říkáme, že je *diferencovatelná na množině M*.