Přednáška 6

Funkce definované implicitně a regulární zobrazení

Funkce definované implicitně

V první části této přednášky se budeme zabývat následujícím problémem:
Je dáno s spojitých funkcí

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_s) = F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad k = 1, 2, \ldots, s.$$

Otázka je, kdy existují, alespoň lokálně, tj. v okolí daného bodu $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, spojité funkce $y_1 = f_1(\mathbf{x})$, $y_2 = f_2(\mathbf{x})$, …, $y_s = f_s(\mathbf{x})$ takové, že pro každé $k = 1, 2, \ldots, s$ platí

$$F_k\big(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})\big) = F_k\big(x_1, x_2, \ldots, x_r, f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_s(\mathbf{x})\big) = 0.$$

Jak se obecně postupuje při řešení tohoto problému, ukážeme na nejjednodušším příkladě $r = s = 1$. V tomto případě jde o řešení rovnice $F(x, y) = 0$ v okolí jistého bodu $[a, b]$.
Nejprve musíme zaručit, že rovnice $F(x, y) = 0$ má aspoň nějaké řešení. Proto musíme předpokládat, že $F(a, b) = 0$.
Abychom zaručili existenci řešení rovnice $F(x, y) = 0$ v okolí bodu $[a, b]$, používají se na funkci $F(x, y)$ různé předpoklady.
My budeme předpokládat, že je funkce $F(x, y)$ spojitá v okolí bodu $[a, b]$ a že v jistém okolí tohoto bodu existuje spojitá parciální derivace podle proměnné y, tj. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$, která je v bodě $[a, b]$ různá od nuly. Za těchto předpokladů lze, alespoň teoreticky, sestrojit pro každé x z nějakého okolí bodu a spojitou funkci $y = f(x)$, která je řešením rovnice $F(x, y) = 0$, tj. spojitou funkci, pro kterou platí $F\big(x, f(x)\big) = 0$. Naznačíme princip této konstrukce.
Označme $C = F'_{,y}(a, b) \neq 0$ a uvažujme zobrazení $\Phi(x, y) = y - \dfrac{1}{C}\,F(x, y)$. Rovnice $F(x, y) = 0$ je pak ekvivalentní rovnici $y = \Phi(x, y)$. Navíc platí $\Phi(a, b) = b$, funkce $\Phi(x, y)$ je spojitá v jistém okolí bodu $[a, b]$, existuje parciální derivace $\Phi'_{,y}(x, y)$, která je spojitá v jistém okolí bodu $[a, b]$ a $\Phi'_{,y}(a, b) = 0$.
Pro dané x budeme rovnici $y = \Phi(x, y)$ řešit metodou postupných aproximací. Sestrojíme posloupnost bodů $y_0 = b$, $y_1 = \Phi(x, y_0)$, $y_2 = \Phi(x, y_1)$, …, $y_{n+1} = \Phi(x, y_n)$, … a dokážeme, že $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Jestliže na úsečce, která spojuje body $[x, y_n]$ a $[x, y_{n+1}]$ existuje parciální derivace $\Phi'_{,y}(x, y)$, pak podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje η takové, že bod $[x, \eta]$ leží na této úsečce a platí

$$\big|y_{n+1} - y_n\big| = \big|\Phi(x, y_n) - \Phi(x, y_{n-1})\big| = \big|\Phi_{,y}(x, \eta)\big| \cdot \big|y_n - y_{n-1}\big|.$$

Naším cílem je ukázat, že existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (a - \delta, a + \delta)$ a pro každé n je

$$\big|y_{n+1} - y_n\big| \le K\big|y_n - y_{n-1}\big|, \quad \text{kde} \quad K < 1.$$

Pak totiž budeme moci použít obecnou větu o řešení rovnice $x = f(x)$, kde $f : M \to M$ a M je metrický prostor. Tato věta, tzv. *věta o kontrahujícím zobrazení* se poměrně často používá, a proto ji zde uvedeme. Pojem úplného prostoru, který se v této větě objeví zavedeme, až bude zřejmé, proč ho budeme potřebovat.

Věta. Nechť je M úplný metrický prostor s metrikou ρ a $f : M \to M$, pro které platí: Existuje $K \in (0,1)$ takové, že pro každé x, $y \in M$ je

$$\rho\big(f(x), f(y)\big) \le K\rho(x,y)\,. \tag{1}$$

Pak existuje právě jedno $x \in M$ takové, že $x = f(x)$.

DŮKAZ: Vezmeme libovolné $x_0 \in M$ a sestrojíme posloupnost $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, …, $x_{n+1} = f(x_n)$, … . Protože platí (1) je

$$\rho(x_2, x_1) = \rho\big(f(x_1), f(x_0)\big) \le K\rho(x_1, x_0)\,.$$

Nechť je $n \ge 1$. Indukcí se snadno ukáže, že

$$\rho\big(x_{n+1}, x_n\big) = \rho\big(f(x_n), f(x_{n-1})\big) \le K\rho\big(x_n, x_{n-1}\big) \le K^n\rho\big(x_1, x_0\big)\,.$$

Nechť je $m > n$. Pak z trojúhelníkové nerovnosti postupně dostaneme

$$\begin{aligned}\rho(x_m, x_n) &\le \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_n) \le \ldots \le \sum_{r=n}^{m-1} \rho(x_{r+1}, x_r) \le \\ &\le \sum_{r=n}^{m-1} K^r\rho(x_1, x_0) < \sum_{r=n}^{\infty} K^r\rho(x_1, x_0) = \frac{K^n}{1-K}\,\rho(x_1, x_0)\,.\end{aligned} \tag{2}$$

Protože $K \in (0,1)$ plyne z této nerovnosti tvrzení, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každé $m > n > n_0$ je $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.
Budeme potřebovat, aby z této podmínky plynula existence limity $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. To je právě předpoklad tzv. *úplnosti* metrického prostoru M.

Budeme se tím na chvíli zabývat trochu podrobněji. Obecně platí věta:

Věta. Nechť je x_n posloupnost v metrickém prostoru M s metrikou ρ. Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in M$, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každé $m > n > n_0$ je $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

DŮKAZ: Podle definice limity existuje ke každému $\varepsilon > 0$ přirozené číslo n_0 takové, že pro každé $n > n_0$ platí $\rho(x_n, x) < \frac{1}{2}\,\varepsilon$. Z trojúhelníkové nerovnosti pak dostaneme, že pro každé m, $n > n_0$ je

$$\rho(x_m, x_n) \le \rho(x_m, x) + \rho(x, x_n) < \tfrac{1}{2}\,\varepsilon + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon = \varepsilon\,. \quad \square$$

Definice. Posloupnost x_n v metrickém prostoru M s metrikou ρ se nazývá *cauchyovská*, jestliže splňuje tzv. *Cauchy-Bolzanovu podmínku*:

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\,; \forall m,\, n > n_0 \ \text{ platí } \ \rho(x_m, x_n) < \varepsilon\,. \tag{3}$$

Předcházející věta říká, že každá posloupnost v metrickém prostoru, která konverguje v M, je cauchyovská. Opak ale obecně neplatí. Jako příklad může sloužit množina všech racionálních čísel, protože posloupnost racionálních čísel může konvergovat k iracionálnímu číslu. To je hlavní důvod, proč se množina racionálních čísel rozšiřuje na množinu reálných čísel. V množině reálných čísel totiž platí, že každá cauchyovská posloupnost konverguje. Od množiny racionálních čísel lze přejít k množině reálných čísel tak, že doplníme čísla, která jsou limitami cauchyovských posloupností racionálních čísel. Podobné "zúplnění" lze provést v libovolném metrickém prostoru. To nás vede k následující definici.

Definice. Metrický prostor M se nazývá *úplný*, jestliže každá cauchyovská posloupnost $x_n \in M$ má limitu v M.

Nyní se můžeme vrátit k důkazu věty o kontrahujícím zobrazení. V (2) jsme ukázali, že posloupnost x_n je cauchyovská a protože předpokládáme, že M je úplný metrický prostor, existuje $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in M$.
O tomto x ukážeme, že je řešením rovnice $x = f(x)$. To plyne z následující úvahy:

$$\rho\big(x, f(x)\big) = \lim_{n\to\infty} \rho\big(x_{n+1}, f(x)\big) = \lim_{n\to\infty} \rho\big(f(x_n), f(x)\big) \le K \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0\,.$$

Tedy $\rho\big(x, f(x)\big) = 0$ a podle definice metriky je $x = f(x)$.
Nakonec ještě ukážeme, že řešení je jediné. Nechť platí $x = f(x)$ a $y = f(y)$. Pak je

$$\rho(x, y) = \rho\big(f(x), f(y)\big) \le K\rho(x, y)\,.$$

A protože $K \in (0, 1)$ je $\rho(x, y) = 0$, tj. $x = y$. $\square$

Po této odbočce se vrátíme k důkazu existence řešení rovnice $F(x, y) = 0$ neboli $y = \Phi(x, y)$.
Protože předpokládáme, že je $\Phi'_{,y}(x, y)$ v okolí bodu $[a, b]$ spojitá funkce a platí $\Phi'_{,y}(a, b) = 0$, existuje $\Delta > 0$ takové, že pro každé $[x, y] \in (a - \Delta, a + \Delta) \times (b - \Delta, b + \Delta) = \mathcal{O}$ platí $\big|\Phi'_{,y}(x, y)\big| < \frac{1}{2}$.
Podle předpokladů je funkce $\Phi(x, y)$ spojitá v jistém okolí bodu $[a, b]$ a platí $\Phi(a, b) = b$. Proto existuje δ, $0 < \delta < \Delta$ takové, že pro každé $x \in (a - \delta, a + \delta)$ je $\big|\Phi(x, b) - b\big| < \frac{1}{4}\,\Delta$.
Nechť je $x \in (a - \delta, a + \delta)$ pevné. Pak je

$$\big|y_1 - y_0\big| = \big|\Phi(x, b) - b\big| < \tfrac{1}{4}\,\Delta\,,$$

a tedy $[x, y_1] \in \mathcal{O}$. Dále platí

$$\big|y_2 - y_0\big| \le \big|y_2 - y_1\big| + \big|y_1 - y_0\big| = \big|\Phi(x, y_1) - \Phi(x, y_0)\big| + \big|y_1 - y_0\big| = \Big(\big|\Phi'_{,y}(x, \eta_1)\big| + 1\Big)\,\big|y_1 - y_0\big|.$$

Ale protože $[x, \eta_1] \in \mathcal{O}$, platí $\big|\Phi'_{,y}(x, \eta_1)\big| < \frac{1}{2}$. To znamená, že

$$\big|y_2 - b\big| < \big(\tfrac{1}{2} + 1\big)\,\big|y_1 - b\big| = \tfrac{3}{2}\big|\Phi(x, b) - b\big| < \tfrac{3}{8}\,\Delta < \tfrac{1}{2}\,\Delta\,.$$

Tedy bod $[x, y_2] \in \mathcal{O}$.
Jestliže předpokládáme, že $[x, y_k] \in \mathcal{O}$ pro $k = 0,\ 1,\ \dots,\ n$, platí nerovnost

$$\big|y_{n+1} - y_n\big| = \big|\Phi(x, y_n) - \Phi(x, y_{n-1})\big| = \big|\Phi'_{,y}(x, \eta_n)\big|\,\big|y_n - y_{n-1}\big| < \tfrac{1}{2}\,\big|y_n - y_{n-1}\big|\,,$$

protože $[x, \eta_n] \in \mathcal{O}$. Z toho plyne, že pro $n \ge 1$ platí $\big|y_{n+1} - y_n\big| < 2^{-n}\big|y_1 - y_0\big|$. Pak je

$$\big|y_{n+1} - y_0\big| \le \sum_{r=0}^{n}\big|y_{r+1} - y_r\big| < \sum_{r=0}^{n} 2^{-r}\big|y_1 - y_0\big| < \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-r}\big|y_1 - y_0\big| = 2\big|y_1 - y_0\big| < \tfrac{1}{2}\,\Delta\,.$$

To ale znamená, že $\big|y_{n+1} - b\big| < \frac{1}{2}\,\Delta$, neboli $[x, y_{n+1}] \in \mathcal{O}$. Z axiómu matematické indukce pak plyne, že pro $x \in (a - \delta, a + \delta)$ je $[x, y_n] \in \mathcal{O}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
Nechť je $x \in (a - \delta, a + \delta)$ pevné. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$\big|y_{n+1} - y_n\big| < \tfrac{1}{2}\,\big|y_n - y_{n-1}\big|$$

a $y_n \in \left\langle b - \frac{1}{2}\,\Delta, b + \frac{1}{2}\,\Delta\right\rangle$. Stejně jako ve větě o kontrahujícím zobrazení lze ukázat, že posloupnost y_n je cauchyovská a protože je interval $\left\langle b - \frac{1}{2}\,\Delta, b + \frac{1}{2}\,\Delta\right\rangle \subset \mathbb{R}$ úplný metrický prostor s metrikou $\rho(y_1, y_2) = |y_1 - y_2|$, existuje v něm právě jedno řešení rovnice $y = \Phi(x, y)$ neboli $F(x, y) = 0$. Proto existuje funkce $f : (a - \delta, a + \delta) \to (b - \Delta, b + \Delta)$ definovaná předpisem $y = f(x)$, kde y je právě nalezené řešení.
Podrobnější zkoumání ukazuje, že funkce $y = f(x)$ je na intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ spojitá. Jestliže budeme navíc předpokládat, že je funkce $F(x, y)$ diferencovatelná, je na intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ diferencovatelná také funkce $y = f(x)$ a platí

$$\mathrm{d}y(x) = -\frac{F'_{,x}(x, y)}{F'_{,y}(x, y)}\,\mathrm{d}x\,, \tag{4}$$

neboli

$$y'(x) = -\frac{F'_{,x}(x, y)}{F'_{,y}(x, y)}\,. \tag{5}$$

Vztah (4) je vlastně řešením rovnice

$$\mathrm{d}F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0$$

a vztah (5) lze získat tak, že derivujeme rovnici $F\big(x, y(x)\big) = 0$ podle proměnné x. Podle věty o derivace složené funkce je totiž

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(F\big(x, y(x)\big)\Big) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0\,.$$

Těchto postupů se často k výpočtu diferenciálu a derivace implicitně definované funkce často používá.

Zobecnění uvedeného postupu, které už ale uvádět nebudeme, vede k následující větě o implicitních funkcích.

Věta (*o implicitních funkcích*). Nechť je $\boldsymbol{\alpha} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_s]$. Nechť jsou funkce $F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_k(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$, $k = 1, 2, \ldots, s$, spojité v jistém okolí bodu $\boldsymbol{\alpha}$ a mají v tomto okolí všechny parciální derivace $\dfrac{\partial F_k}{\partial y_\ell}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, které jsou spojité v bodě $\boldsymbol{\alpha}$. Nechť platí

1. $F_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, pro každé $k = 1, 2, \ldots, s$;
2. $\det \mathbf{C} \neq 0$, kde $\mathbf{C}$ je matice se složkami $C_{k\ell} = \dfrac{\partial F_k}{\partial y_\ell}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Pak existují $\delta > 0$ a $\Delta > 0$ taková, že ke každému $\mathbf{x} \in \mathcal{I} = \big\{\mathbf{x}\,;\ |x_i - a_i| < \delta\,,\ i = 1, 2, \ldots, r\big\}$ odpovídá právě jedno $\mathbf{y} \in \mathcal{J} = \big\{\mathbf{y}\,;\ |y_\ell - b_\ell| < \Delta\,,\ \ell = 1, 2, \ldots, s\big\}$ takové, že pro všechna $k = 1, 2, \ldots, s$ platí $F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.
Souřadnice y_k tohoto bodu definují funkce

$$y_k = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_r)\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, s\,,$$

které jsou spojité na intervalu $\mathcal{I}$.

Jestliže mají všechny funkce $F_k(\mathbf{x},\mathbf{y})$ na množině $\mathcal{I}\times\mathcal{J}$ diferenciál n–tého řádu, mají všechny funkce $y_k=\varphi_k(\mathbf{x})$ diferenciál n–tého řádu na množině $\mathcal{I}$.
Jestliže jsou všechny funkce $F_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\in C_n(\mathcal{I}\times\mathcal{J})$, jsou i všechny funkce $\varphi_k(\mathbf{x})\in C_n(\mathcal{I})$.

Věta se dokazuje podobně jako příklad $r=s=1$, jehož důkaz jsme naznačili. Z podmínky $\det\mathbf{C}\neq 0$ plyne existence inverzní matice $\mathbf{C}^{-1}$ se složkami $\left(\mathbf{C}^{-1}\right)_{k\ell}$ a místo soustavy $F_k(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ se pro pevné $\mathbf{x}$ postupnými iteracemi řeší ekvivalentní soustava $y_k=\Phi_k(\mathbf{x},\mathbf{y})$, kde

$$\Phi_k=y_k-\sum_{\ell=1}^{s}\left(\mathbf{C}^{-1}\right)_{k\ell}F_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})\,.$$

Podrobnosti zde uvádět nebudeme.

Pro funkce definované implicitně lze najít jejich derivace nebo diferenciály, i když samotné funkce explicitně vyjádřit neumíme. V praxi postupujeme tak, že ověříme předpoklady uvedené věty a pak najdeme první diferenciály funkcí $\mathbf{y}=\mathbf{y}(\mathbf{x})$ pomocí soustavy rovnic

$$\mathrm{d}F_k=\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathrm{d}x_i+\sum_{\ell=1}^{s}\frac{\partial F_k}{\partial y_\ell}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathrm{d}y_\ell=0\,. \tag{6}$$

Řešení této soustavy lineárních rovnic pro neznámé $\mathrm{d}y_\ell$ existuje v bodech, kde je determinant

$$D(\mathbf{x},\mathbf{y})=\det\left(\frac{\partial F_k}{\partial y_\ell}\right)(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{D(F_1,F_2,\dots,F_s)}{D(y_1,y_2,\dots,y_s)}(\mathbf{x},\mathbf{y})\neq 0\,. \tag{7}$$

A protože $\mathrm{d}y_k=\sum\limits_{i=1}^{r}\dfrac{\partial y_k}{\partial x_i}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathrm{d}x_i$, najdeme velmi snadno z prvního diferenciálu také parciální derivace.

Lze ovšem postupovat i tak, že derivujeme rovnice $F_k\big(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)=0$ podle proměnné x_i. Když použijeme větu o parciálních derivacích složené funkce, získáme soustavu

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\mathbf{x},\mathbf{y})+\sum_{\ell=1}^{s}\frac{\partial F_k}{\partial y_\ell}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\frac{\partial y_\ell}{\partial x_i}(\mathbf{x})=0\,. \tag{8}$$

Tuto soustavu můžeme opět jednoznačně řešit za podmínky (7).

Abychom našli druhé diferenciály d^2y_ℓ, respektive druhé parciální derivace $\dfrac{\partial^2 y_k}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{x})$, spočítáme druhý diferenciál funkcí $F_k(\mathbf{x},\mathbf{y})$, respektive její druhou derivaci podle proměnných x_i a x_j. Tímto způsobem získáme soustavu rovnic pro d^2y_ℓ, respektive $\dfrac{\partial^2 y_k}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{x})$, která má opět za podmínky (7) jediné řešení.

Příklad. Najděte všechny druhé parciální derivace funkce $z=z(x,y)$, která je definována rovnicí

$$F(x,y,z)=2x^2-y^2+z^3+6xyz+2x=0 \tag{9}$$

v bodě $[1,2,0]$.

Řešení: Nejprve ověříme předpoklady věty o implicitních funkcích. Dosazením snadno zjistíme, že $F(1,2,0)=0$. Funkce $F(x,y,z)\in C_\infty(\mathbb{R}^3)$ a protože $F'_{,z}(x,y,z)=3z^2+6xy$, je $F'_{,z}(1,2,0)=12\neq 0$.

Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o implicitních funkcích, definuje rovnice (9) na nějakém okolí bodu $[1,2]$ funkci $z = z(x,y)$, jejíž hodnoty leží v jistém okolí bodu $z = 0$.
Abychom našli parciální derivace této funkce, derivujeme rovnici

$$2x^2 - y^2 + z^3(x,y) + 6xyz(x,y) + 2x = 0$$

podle proměnných x a y. Tyto derivace dávají

$$\begin{aligned} &4x + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy \frac{\partial z}{\partial x} + 2 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad 6yz + 4x + 2 + \big(6xy + 3z^2\big) \frac{\partial z}{\partial x} = 0\,, \\ &-2y + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 6xz + 6xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad \text{tj.} \quad 6xz - 2y + \big(6xy + 3z^2\big) \frac{\partial z}{\partial y} = 0\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Toto jsou rovnice, ze kterých můžeme za podmínky $6xy + 3z^2 \neq 0$ najít parciální derivace $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Speciálně pro $x = 1$, $y = 2$ a $z = 0$ dostaneme

$$6 + 12 \frac{\partial z}{\partial x}(1,2) = 0\,, \quad -4 + 12 \frac{\partial z}{\partial y}(1,2) = 0\,, \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1,2) = -\frac{1}{2}\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,2) = \frac{1}{3}\,.$$

Abychom našli druhé parciální derivace, derivujeme rovnice (10). Jestliže derivujeme první rovnici podle proměnné x, dostaneme

$$6y \frac{\partial z}{\partial x} + 4 + \left(6y + 6z \frac{\partial z}{\partial x}\right) \frac{\partial z}{\partial x} + \big(6xy + 3z^2\big) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0\,.$$

Protože pro $x = 1$, $y = 2$ a $z = 0$ je $z'_{,x} = -\frac{1}{2}$, dostaneme z této rovnice $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,2) = \dfrac{2}{3}$.
Jestliže derivujeme první rovnici v (10) podle proměnné y, dostaneme vztah

$$6z + 6y \frac{\partial z}{\partial y} + \left(6x + 6z \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial z}{\partial x} + \big(6xy + 3y^2\big) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0\,,$$

ze kterého pro $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$, $z'_{,x} = -\frac{1}{2}$ a $z'_{,y} = \frac{1}{3}$ plyne $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,2) = -\dfrac{1}{12}$.
Když bychom derivovali druhou rovnici v (10) podle proměnné x, dostali bychom opět $z''_{,xy}$. Derivací této rovnice podle proměnné y, získáme rovnici

$$6x \frac{\partial z}{\partial y} - 2 + \left(6x + 6z \frac{\partial z}{\partial z}\right) \frac{\partial z}{\partial y} + \big(6xy + 3z^2\big) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\,,$$

ze které v daném bodě plyne $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,2) = -\dfrac{1}{6}$.

Ukážeme ještě postup, který používá diferenciálů funkce $F(x,y,z)$. Pro její diferenciál platí

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F(x,y,z) &= 4x \,\mathrm{d}x - 2y \,\mathrm{d}y + 3z^2 \,\mathrm{d}z + 6yz \,\mathrm{d}x + 6xz \,\mathrm{d}y + 6xy \,\mathrm{d}z + 2 \,\mathrm{d}x = \\ &= (6yz + 4x + 2) \,\mathrm{d}x + (6xz - 2y) \,\mathrm{d}y + (6xy + 3z^2) \,\mathrm{d}z = 0\,. \end{aligned}$$

Všimněte si, že tento vztah je součet první rovnice v (10) vynásobené dx a druhé vynásobené dy, a tedy obsahuje obě tyto rovnice zároveň. Pro $x = 1$, $y = 2$ a $z = 0$ dostaneme

$$6\,\mathrm{d}x - 4\,\mathrm{d}y + 12\,\mathrm{d}z = 0\,, \quad \text{tj.} \quad \mathrm{d}z = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{d}y\,.$$

A protože $\mathrm{d}z = z'_{,x}\,\mathrm{d}x + z'_{,y}\,\mathrm{d}y$, dostaneme opět $z'_{,x}(1,2) = -\frac{1}{2}$ a $z'_{,y}(1,2) = \frac{1}{3}$.
Při výpočtu druhého diferenciálu si musíme uvědomit, že proměnné x a y jsou nezávislé, a proto je $\mathrm{d}^2x = \mathrm{d}^2y = 0$. Naopak z je závislá na proměnných x a y, a proto nemusí platit $\mathrm{d}^2z = 0$. Druhý diferenciál funkce $F(x,y,z)$ dává

$$\begin{aligned}(6z\,\mathrm{d}y + 6y\,\mathrm{d}z + 4\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x + (6z\,\mathrm{d}x + 6x\,\mathrm{d}z - 2\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}y + \\ +(6y\,\mathrm{d}x + 6x\,\mathrm{d}y + 6z\,\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}z + (6xy + 3z^2)\mathrm{d}^2z = 0\,.\end{aligned}$$

Protože pro $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$ je $\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\,\mathrm{d}y$, plyne z této rovnice

$$-8\,\mathrm{d}x^2 + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2\,\mathrm{d}y^2 + 12\,\mathrm{d}^2z = 0\,, \quad \text{tj.} \quad \mathrm{d}^2z = \tfrac{2}{3}\,\mathrm{d}x^2 - \tfrac{1}{6}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \tfrac{1}{6}\,\mathrm{d}y^2\,.$$

A protože $\mathrm{d}^2z = z''_{,xx}\,\mathrm{d}x^2 + 2z''_{,xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + z''_{,yy}\,\mathrm{d}y^2$, dostaneme srovnáním těchto vztahů opět

$$z''_{xx}(1,2) = \tfrac{2}{3}\,, \qquad z''_{,xy}(1,2) = -\tfrac{1}{12}\,, \qquad z''_{,yy}(1,2) = -\tfrac{1}{6}\,.$$

Příklad. Nechť jsou funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$ řešením soustavy rovnic

$$x^2 - y^2 + z^3 = 1\,, \qquad xy + xz + yz = 3 \tag{11}$$

v okolí bodu $[1,1,1]$. Najděte Taylorovy polynomy stupně 2 funkcí $y = y(x)$ a $z = z(x)$ se středem v bodě $x = 1$.
Řešení: Taylorův polynom stupně dva funkce $f(x)$ se středem v bodě $x = 1$ je

$$T_2(f;x) = f(1) + f'(1)\,(x-1) + \tfrac{1}{2}\,f''(1)\,(x-1)^2\,.$$

Proto musíme najít první dvě derivace funkcí $y = y(x)$ a $z = z(x)$ v bodě $x = 1$.
Pro $x = y = z = 1$ jsou obě rovnice splněny a obě funkce v rovnicích jsou třídy $C_\infty(\mathbb{R}^3)$.
Podmínka na determinant z věty o implicitních funkcích zaručuje jednoznačnou řešitelnost následující soustavy a ověříme ji během výpočtu.
Jestliže derivujeme obě rovnice v (11) podle x (protože $y = y(x)$ a $z = z(x)$ tam jiná nezávislá proměnná vlastně ani není), dostaneme vztahy

$$2x - 2yy' + 3z^2z' = 0\,, \qquad y + z + (x+z)y' + (x+y)z' = 0\,. \tag{12}$$

V bodě $x = y = z = 1$ je to soustava

$$2 - 2y' + 3z' = 0\,, \qquad 2 + 2y' + 2z' = 0\,,$$

která má jediné řešení $y'(1) = -\frac{1}{5}$, $z'(1) = -\frac{4}{5}$. Protože má uvedená rovnice právě jedno řešení, je podmínka na determinant ve větě o implicitních funkcí splněna.
Druhé derivace funkcí $y = y(x)$ a $z = z(x)$ dostaneme tak, že derivujeme obě rovnice v (12). To dává

$$\begin{aligned}&2 - 2(y')^2 + 6z(z')^2 - 2yy'' + 3z^2z'' = 0\,,\\ &y' + z' + (1+z')y' + (1+y')z' + (x+z)y'' + (x+y)z'' = 0\,.\end{aligned}$$

Když dosadíme $x = y = z = 1$ a $y' = -\frac{1}{5}$, $z' = -\frac{4}{5}$, dostaneme soustavu

$$-2y'' + 3z'' = -\tfrac{54}{25}\,, \qquad 2y'' + 2z'' = \tfrac{42}{25}\,.$$

Její řešení je $y'' = \frac{117}{125}$ a $z''(1) = -\frac{12}{125}$.
Hledané Taylorovy polynomy tedy jsou

$$y(x) \sim 1 - \tfrac{1}{5}\,(x-1) + \tfrac{117}{250}\,(x-1)^2\,, \qquad z(x) \sim 1 - \tfrac{4}{5}\,(x-1) - \tfrac{6}{125}\,(x-1)^2\,.$$

Příklad. Nechť je funkce $F(\mathbf{x}, y) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ spojitá v nějakém okolí bodu $[\mathbf{a}, b] = [a_1, a_2, \ldots, a_n, b]$, má v okolí tohoto bodu diferenciál prvního řádu a $F'_{,y}(\mathbf{a}, b) \neq 0$. Pak je rovnicí $F(\mathbf{x}, y) = F(\mathbf{a}, b) = C$ v okolí bodu $\mathbf{a}$ definována právě jedna funkce $y = f(\mathbf{x})$, jejíž hodnoty jsou v okolí bodu b a platí $f(\mathbf{a}) = b$. Tato funkce má v bodě $\mathbf{a}$ diferenciál prvního řádu, a proto k jejímu grafu existuje v bodě $[\mathbf{a}, b]$ tečná rovina. Její rovnice jsou

$$y - b = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\,(x - a_i)\,. \tag{13}$$

Podle věty o implicitních funkcích jsou ale

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = -\frac{F'_{x_i}}{F'_{,y}}(\mathbf{a}, b)\,.$$

Jestliže tento vztah dosadíme do (13) v vynásobíme $F'_{,y}(\mathbf{a}, b)$, dostaneme rovnici tečné roviny ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} F'_{,x_i}(\mathbf{a}, b)\,(x_i - a_i) + F'_{,y}(\mathbf{a}, b)\,(y - b) = 0\,.$$

V tomto vyjádření tečné roviny nehraje proměnná y speciální roli jako dříve a můžeme ji považovat za další souřadnici x_{n+1}.

Obecně platí, že pokud je funkce $F(\mathbf{x})$ spojitá v okolí bodu $\mathbf{a}$, má v okolí tohoto bodu diferenciál prvního řádu a $\|\operatorname{grad} F(\mathbf{a})\| \neq 0$, definuje rovnice $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a})$ v okolí bodu $\mathbf{a}$ jistou plochu v $\mathbb{R}^n$. Tato plocha má v bodě $\mathbf{a}$ tečnou rovinu, jejíž rovnice jsou

$$\sum_{i=1}^{n} F'_{,i}(\mathbf{a})\,(x_i - a_i) = 0\,, \quad \text{neboli} \quad \big(\operatorname{grad} F(\mathbf{a})\big) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0\,. \tag{14}$$

Z tohoto vyjádření je vidět, že vektor $\operatorname{grad} F(\mathbf{a})$ je normálový vektor k ploše definované rovnici $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a})$ v bodě $\mathbf{a}$.

Regulární zobrazení

Nyní budeme podrobněji zkoumat zobrazení $\mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^n$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Obraz bodu $\mathbf{x} \in M$ budeme značit $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ nebo pomocí jeho složek

$$y_k = f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \quad \text{kde} \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Definice. Nechť je $M \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $\mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že zobrazení $\mathbf{f}$ je *regulární zobrazení* množiny M, jestliže $\mathbf{f} \in C_1(M)$ a pro každé $\mathbf{x} \in M$ je

$$J(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) \neq 0 \,. \tag{15}$$

Derivace zobrazení $\mathbf{f}$, tj. matice

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\mathbf{x})$$

se nazývá *Jacobiho matice* a její determinant (15) nazýváme *Jacobiho determinant* neboli *jakobián* zobrazení $\mathbf{f}$.

Nejprve dokážeme jednu jednoduchou větu o jakobiánu složeného zobrazení.

Věta. Nechť jsou M a N otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{f} : M \to N$ a $\mathbf{g} : N \to \mathbb{R}^n$ jsou zobrazení třídy $C_1(M)$ a $C_1(N)$. Pak pro jakobián složeného zobrazení $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^n$ platí

$$\frac{D(h_1, h_2, \dots, h_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) = \frac{D(g_1, g_2, \dots, g_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})\big)\, \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) \,.$$

Důkaz: Podle věty o parciálních derivací složené funkce platí pro Jacobiho matice

$$\mathbf{h}'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}'\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})\big) \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \,.$$

Tvrzení věty pak plyne z věty o determinantu součinu matic. □

Důsledek. Nechť jsou $\mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{g} : N \to \mathbb{R}^n$ regulární zobrazení a $\mathbf{f}(M) \subset N$. Pak je složené zobrazení $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^n$ regulární.

Důkaz: Podle věty o derivaci složeného zobrazení je složené zobrazení $\mathbf{h} \in C_1(M)$ a z předchozí věty plyne, že jakobián zobrazení $\mathbf{h}$ je roven součinu jakobiánů zobrazení $\mathbf{g}$ a $\mathbf{f}$, a tedy je nenulový. □

`Poznámka`. Uvedeme souvislost regulárního zobrazení s větou o implicitně definované funkci. Napíšeme-li totiž rovnice $y_k = f_k(\mathbf{x})$ ve tvaru $F_k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x}) - y_k = 0$, splňuje soustava rovnic $F_k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$, kde $k = 1, 2, \dots, n$, všechny předpoklady věty o implicitních funkcích (pouze je zaměněna role $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$). Proto ke každému bodu $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, kde $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ existují okolí bodu $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, ve kterém lze tuto soustavu vyřešit, tj. psát $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$. To znamená, že pro regulární zobrazení existuje vždy aspoň lokálně inverzní zobrazení.

Přesně vyjadřuje tyto úvahy následující důležitá věta, kterou uvedeme bez důkazu.

Věta. Nechť je $\mathbf{f}$ regulární zobrazení otevřené množiny $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak platí:

1. ke každému bodu $\mathbf{a} \in M$ existuje jeho okolí $U(\mathbf{a})$ takové, že zúžení zobrazení $\mathbf{f}$ na $U(\mathbf{a})$ je prosté;
2. je-li $A \subset M$ otevřená množina, je $\mathbf{f}(A)$ otevřená množina v $\mathbb{R}^n$;
3. je-li $\mathbf{f}$ prosté regulární zobrazení, je jeho inverzní zobrazení $\boldsymbol{\varphi} : \mathbf{f}(M) \to M$ také regulární.

`Poznámka.` Prostá regulární zobrazení slouží k zavedení různých křivočarých souřadnic a setkáme se s nimi později při integrálním počtu.