

Přednáška 7

Extrémy funkcí více proměnných

Definice. Nechť je $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$, $M \subset X$ a $\mathbf{a} \in M$. Řekneme, že funkce $f(\mathbf{x})$ má v bodě $\mathbf{a}$

1. *ostré lokální maximum* vzhledem k množině M , jestliže existuje okolí $U(\mathbf{a})$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in U(\mathbf{a}) \cap M$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$, je $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$;
2. *ostré lokální minimum* vzhledem k množině M , jestliže existuje okolí $U(\mathbf{a})$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in U(\mathbf{a}) \cap M$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$, je $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$;
3. *neostré lokální maximum* vzhledem k množině M , jestliže existuje okolí $U(\mathbf{a})$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in U(\mathbf{a}) \cap M$ je $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$;
4. *neostré lokální minimum* vzhledem k množině M , jestliže existuje okolí $U(\mathbf{a})$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in U(\mathbf{a}) \cap M$ je $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$.

Lokální maxima a minima funkce se nazývají lokální extrémy.

Jestliže je $M = X = D_f$, často se sousloví vzhledem k množině M vynechává.

Přímo z definice lokálních extrémů vzhledem k množině M plynou následující dvě věty.

Věta. Nechť funkce $f(\mathbf{x})$ nabývá na množině M svou největší (nejmenší) hodnotu v bodě $\mathbf{a}$. Pak má funkce v bodě $\mathbf{a}$ lokální maximum (minimum) vzhledem k množině M .

Věta. Nechť je $\mathbf{a} \in M \subset N$. Jestliže má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální maximum (minimum) vzhledem k množině N , má v bodě $\mathbf{a}$ lokální maximum (minimum) vzhledem k množině M .

Lokální extrémy ve vnitřních bodech množiny M

Následující věta dává nutnou podmínku pro to, aby měla funkce $f(\mathbf{x})$ ve vnitřním bodě $\mathbf{a} \in M$ lokální extrém.

Věta. Nechť je $\mathbf{a}$ vnitřní bod množiny M . Jestliže existuje vektor $\mathbf{v}$ takový, že derivace $f'_v(\mathbf{a}) \neq 0$, nemá funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ vzhledem k množině M lokální extrém.

DŮKAZ: Uvažujme funkce jedné proměnné $F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$. Protože $F'(0) \neq 0$, nemá funkce $F(t)$ v bodě $t = 0$ lokální extrém. Pak pro každé $\tau > 0$ existují t_1 a t_2 , $|t_1|, |t_2| < \tau$ takové, že $F(t_1) > F(0) > F(t_2)$. To ale znamená, že pro libovolné okolí $(\mathbf{a})$ bodu $\mathbf{a}$ existují body $\mathbf{x}_1 = \mathbf{a} + t_1\mathbf{v}$ $\mathbf{x}_2 = \mathbf{a} + t_2\mathbf{v} \in U(\mathbf{a})$ takové, že $f(\mathbf{x}_1) > f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{x}_2)$, a tedy funkce $f(\mathbf{x})$ nemá v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém. $\square$

Tedy aby funkce $f(\mathbf{x})$ mohla mít v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém, musí být její derivace v bodě $\mathbf{a}$ podle libovolného vektoru rovna nule nebo nesmí existovat. Proto nás při hledání extrémů funkce budou zajímat vnitřní body $\mathbf{a} \in M$, ve kterých je

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) = 0 \quad (1)$$

nebo vnitřní body M , ve kterých některá parciální derivace neexistuje.

Speciálně pro diferencovatelnou funkci na množině M je podmínka (1) ekvivalentní podmínce

$$df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = 0. \quad (2)$$

Podmínka (1) nebo spíše (2) odpovídá pro funkci jedné proměnné podmínce $f'(a) = 0$, tj. stacionárnímu bodu. V případě funkce jedné proměnné jsme o tom, zda má funkce $y = f(x)$ ve stacionárním bodě extrém a jakého je typu, mohli rozhodnout pomocí druhé derivace. V principu jde o to, že Taylorův polynom druhého řádu funkce $y = f(x)$ se středem v bodě a je

$$T_2(f, a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 = f(a) + \frac{1}{2}f''(a)h^2 = f(a) + \frac{1}{2}d^2f(a, h),$$

protože $f'(a) = 0$. Tedy pokud bylo $d^2f(a, h) > 0$, tj. $f''(a) > 0$, dostali jsme, že

$$f(a + h) \sim f(a) + \frac{1}{2}d^2f(a, h) > f(a).$$

Proto měla funkce v bodě $x = a$ lokální minimum. Pro $d^2f(a, h) < 0$, tj. $f''(a) < 0$, jsme z podobného důvodu zjistili, že v bodě $x = a$ je lokální maximum.

Pro funkci více proměnných je situace analogická. Taylorův polynom druhého stupně se středem ve stacionárním bodě $\mathbf{a}$ je

$$T_2(f, \mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) + \frac{1}{2}d^2f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2}d^2f(\mathbf{a}, \mathbf{h}).$$

Proto bude o typu extrému funkce $y = f(\mathbf{x})$ ve stacionárním bodě $\mathbf{a}$ rozhodovat znaménko druhého diferenciálu. Ale pro funkce více proměnných je druhý diferenciál kvadratická forma v proměnné $\mathbf{h}$ a proto je analýza složitější.

Z předchozí analýzy by mohlo být aspoň intuitivně jasné, že platí následující věta, kterou uvedeme bez důkazu.

Věta. Nechť má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ diferenciál druhého řádu a platí $df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = 0$. Uvažujme kvadratickou formu

$$\Phi(\mathbf{h}) = \Phi(h_1, h_2, \dots, h_n) = d^2f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(\mathbf{a}) h_i h_k. \quad (3)$$

Pak platí:

1. Je-li kvadratická forma (3) pozitivně definitní, má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální minimum;
2. Je-li kvadratická forma (3) negativně definitní, má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální maximum;
3. Je-li kvadratická forma (3) indefinitní, nemá funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém.

Zde bude asi nutné zopakovat nějaké pojmy, které by měly být známy z algebry.

Nechť jsou $a_{ik} = a_{ki}$, kde $i, k = 1, 2, \dots, n$, reálná čísla. Pak funkci

$$\Phi(\mathbf{h}) = \Phi(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} h_i h_k \quad (4)$$

nazýváme *kvadratickou formou*.

Je zřejmé, že $\Phi(\mathbf{0}) = 0$. Kvadratickou formu $\Phi(\mathbf{h})$ nazýváme

1. *pozitivně definitní*, jestliže pro každé $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ je $\Phi(\mathbf{h}) > 0$;
2. *pozitivně semidefinitní*, jestliže pro každé $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ je $\Phi(\mathbf{h}) \geq 0$;
3. *negativně definitní*, jestliže pro každé $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ je $\Phi(\mathbf{h}) < 0$;
4. *negativně semidefinitní*, jestliže pro každé $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ je $\Phi(\mathbf{h}) \leq 0$;
5. *indefinitní*, jestliže existují $\mathbf{h}_1$ a $\mathbf{h}_2$, taková, že $\Phi(\mathbf{h}_1) > 0$ a $\Phi(\mathbf{h}_2) < 0$.

Naším úkolem bude rozhodnout, jakého typu je kvadratická forma (4). Obecně mohou nastat tři možnosti:

A. Pro všechna i, k je $a_{ik} = 0$. V takovém případě je $\Phi(\mathbf{h}) = 0$ pro každé $\mathbf{h}$ a kvadratická forma (4) je pozitivně i negativně semidefinitní.

B. Existuje dvojice indexů i, k taková, že $a_{ii} = a_{kk} = 0$ a $a_{ik} \neq 0$. Jestliže v tomto případě zvolíme $\mathbf{h}_1$, pro které je $h_r = 0$ pro $r \neq i, k$ a $h_i = h_k = 1$, a $\mathbf{h}_2$, pro které je $h_r = 0$ pro $r \neq i, k$ a $h_i = 1, h_k = -1$, dostaneme $\Phi(\mathbf{h}_1) = 2a_{ik} \neq 0$ a $\Phi(\mathbf{h}_2) = -2a_{ik} \neq 0$. Tedy kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ nabývá jak kladných tak záporných hodnot a je proto indefinitní.

C. Existuje index i takový, že $a_{ii} \neq 0$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $i = 1$ a $a_{11} \neq 0$. Pak platí rovnost

$$\Phi(\mathbf{h}) = a_{11} \left(h_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} h_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} h_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} h_n \right)^2 + \Phi_1(h_2, h_3, \dots, h_n), \quad (5)$$

kde $\Phi_1(h_2, h_3, \dots, h_n) = \sum_{i,k=2}^n A_{ik} h_i h_k$ je kvadratická forma $(n-1)$ proměnných $h_2, h_3, \dots, h_n$.

Je-li kvadratická forma Φ_1 v (5) typu **B.**, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ indefinitní. To plyne z toho, že pro

$$h_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} h_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} h_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} h_n$$

je $\Phi(\mathbf{h}) = \Phi_1(h_2, h_3, \dots, h_n)$ a kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ je indefinitní.

Podobná úvaha vede k tomu, že pokud je kvadratická forma Φ_1 typu **A.**, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ pozitivně nebo negativně semidefinitní v závislosti na tom, zda je $a_{11} > 0$ nebo $a_{11} < 0$.

Je-li kvadratická forma Φ_1 typu **C.**, použijeme podobný postup jako dříve a dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{h}) &= a_{11} \left(h_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} h_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} h_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} h_n \right)^2 + \\ &+ A_{22} \left(h_2 + \frac{A_{23}}{A_{22}} h_3 + \frac{A_{24}}{A_{22}} h_4 + \dots + \frac{A_{2n}}{A_{22}} h_n \right)^2 + \Phi_2(h_3, h_4, \dots, h_n), \end{aligned}$$

kde $\Phi_2(h_3, h_4, \dots, h_n)$ je kvadratická forma $(n-2)$ proměnných $h_3, \dots, h_n$.

V tomto postupu budeme stále pokračovat. Pokud v r -tém kroku dostaneme formu Φ_r , která je typu **B.**, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ indefinitní. Jestliže v žádném kroku nedostaneme kvadratickou formu typu **B.**, zjistíme, že kvadratickou formu $\Phi(\mathbf{h})$ lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{h}) &= A_1 (h_1 + c_{12} h_2 + \dots + c_{1n} h_n)^2 + A_2 (h_2 + c_{23} h_3 + \dots + c_{2n} h_n)^2 + \dots + \\ &+ A_k (h_k + c_{k,k+1} h_{k+1} + \dots + c_{kn} h_n)^2 + \dots + A_n h_n^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Ze zápisu kvadratické formy $\Phi(\mathbf{h})$ ve tvaru (6) snadno zjistíme její typ:

1. Je-li $A_k > 0$ pro každé $k = 1, 2, \dots, n$, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ pozitivně definitní;

2. Je-li $A_k \geq 0$ pro každé $k = 1, 2, \dots, n$, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ pozitivně semidefinitní;
3. Je-li $A_k < 0$ pro každé $k = 1, 2, \dots, n$, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ negativně definitní;
4. Je-li $A_k \leq 0$ pro každé $k = 1, 2, \dots, n$, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ negativně semidefinitní;
5. Jestliže existují indexy i a k takové, že $A_i > 0$ a $A_k < 0$, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ indefinitní.

V algebře se snad dokazovala následující věta:

Věta (*Sylvesterovo kritérium*) Nechť je $\Phi(\mathbf{h})$ kvadratická forma (4). Označme

$$D_k = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (7)$$

Nechť je $D_k \neq 0$ pro každé k . Pak platí

1. Je-li $D_k > 0$ pro každé $k = 1, 2, \dots, n$, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ pozitivně definitní;
2. Je-li $(-1)^k D_k > 0$ pro každé $k = 1, 2, \dots, n$, tj. $D_1 < 0$ a determinanty D_k z (7) střídají znaménka, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ negativně definitní;
3. Jestliže nenastane ani jedna z uvedených možností, je kvadratická forma $\Phi(\mathbf{h})$ indefinitní.

Poznámka. Lze ukázat, že determinanty D_k v (7) souvisí s čísly A_k z (6) tak, že

$$A_1 = D_1 \quad \text{a} \quad A_k = \frac{D_k}{D_{k-1}}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = x^3 + \frac{3}{2}y^2 + z^2 - 3xy + 2yz + 4y + 2z. \quad (8)$$

ŘEŠENÍ: Nutné podmínky pro lokální extrém funkce (8) jsou

$$\begin{aligned} f'_{,x} &= 3x^2 - 3y = 0, \\ f'_{,y} &= 3y - 3x + 2z + 4 = 0, \\ f'_{,z} &= 2z + 2y + 2 = 0. \end{aligned}$$

Tato soustava má dvě řešení $\mathbf{a}_1 = [1, 1, -2]$ a $\mathbf{a}_2 = [2, 4, -5]$. Jedině v těchto bodech může mít funkce (8) lokální extrém.

Protože má funkce (8) spojitě parciální derivace všech řádů existuje druhý druhý diferenciál funkce $f(\mathbf{x})$ v celém $\mathbb{R}^3$. Ten je

$$d^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = 6xh_1^2 - 6h_1h_2 + 3h_2^2 + 4h_2h_3 + 2h_3^2. \quad (9)$$

V bodě $\mathbf{a}_1 = [1, 1, -2]$ je druhý diferenciál kvadratická forma

$$\begin{aligned} d^2 f(\mathbf{a}_1, \mathbf{h}) &= 6h_1^2 - 6h_1h_2 + 3h_2^2 + 4h_2h_3 + 2h_3^2 = 6\left(h_1 - \frac{1}{2}h_2\right)^2 + \frac{3}{2}h_2^2 + 4h_2h_3 + 2h_3^2 = \\ &= 6\left(h_1 - \frac{1}{2}h_2\right)^2 + \frac{3}{2}\left(h_2 + \frac{4}{3}h_3\right)^2 - \frac{2}{3}h_3^2. \end{aligned}$$

Tedy kvadratická forma $d^2f(\mathbf{a}_1, \mathbf{h})$ je indefinitní a v bodě $\mathbf{a}_1 = [1, 1, -2]$ není extrém. V bodě $\mathbf{a}_2 = [2, 4, -5]$ je druhý diferenciál kvadratická forma

$$\begin{aligned} d^2f(\mathbf{a}_2, \mathbf{h}) &= 12h_1^2 - 6h_1h_2 + 3h_2^2 + 4h_2h_3 + 2h_3^2 = 12\left(h_1 - \frac{1}{4}h_2\right)^2 + \frac{9}{4}h_2^2 + 4h_2h_3 + 2h_3^2 = \\ &= 12\left(h_1 - \frac{1}{4}h_2\right)^2 + \frac{9}{4}\left(h_2 + \frac{8}{9}h_3\right)^2 + \frac{2}{9}h_3^2. \end{aligned}$$

Je vidět, že nyní $d^2f(\mathbf{a}_2, \mathbf{h})$ je pozitivně definitní forma a v bodě $\mathbf{a}_2 = [2, 4, -5]$ má funkce $f(\mathbf{x})$ lokální minimum.

Ukážeme ještě použití Sylvesterova kritéria. Matice $\mathbf{A}$, která odpovídá kvadratické formě (9), je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6x & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

V bodě $\mathbf{a}_1$ je $x = 1$ a

$$D_1 = 6 > 0, \quad D_2 = \det \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = 9 > 0, \quad D_3 = \det \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -6 < 0.$$

Tedy kvadratická forma je v bodě $\mathbf{a}_1$ indefinitní a funkce tam nemá extrém.

V bodě $\mathbf{a}_2$ je $x = 2$ a

$$D_1 = 12 > 0, \quad D_2 = \det \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = 27 > 0, \quad D_3 = \det \begin{pmatrix} 12 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 6 > 0.$$

Tedy kvadratická forma je v bodě $\mathbf{a}_2$ pozitivně definitní a funkce má v tomto bodě lokální minimum.

V Sylvesterově kritériu je předpoklad, že $D_k \neq 0$. Je-li nějaké $D_k = 0$ není odpovídající kvadratická forma ani pozitivně ani negativně definitní. Může být indefinitní nebo pozitivně nebo negativně semidefinitní. Je-li kvadratická forma indefinitní, vede někdy k cíli přeuspořádání indexů. Ale jedná-li se pouze o semidefinitní formu, neříká věta vůbec nic o tom, zda má funkce v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém. Takové případy vyžadují podrobnější zkoumání funkce $f(\mathbf{x})$ v okolí bodu $\mathbf{a}$.

Příklad. Uvažujme funkce

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + x^4 + y^4 \quad \text{a} \quad g(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - x^4 - y^4.$$

Protože

$$\begin{aligned} f'_{,x}(x, y) &= 2x + 2y + 4x^3, & f'_{,y}(x, y) &= 2x + 2y + 4y^3, \\ g'_{,x}(x, y) &= 2x + 2y - 4x^3, & g'_{,y}(x, y) &= 2x + 2y - 4y^3, \end{aligned}$$

mají obě funkce stacionární bod $x = y = 0$. Druhý diferenciál obou funkcí ve stacionární bodě $\mathbf{a} = [0, 0]$ je

$$d^2f = d^2g = 2h_1^2 + 4h_1h_2 + 2h_2^2 = 2(h_1 + h_2)^2.$$

Tato kvadratická forma je pouze pozitivně semidefinitní. Proto mohou mít obě funkce v bodě $[0, 0]$ lokální minimum. Protože druhý diferenciál je roven nule na přímce $h_1 + h_2 = 0$, bude podezřelá množina přímka $x + y = 0$. Na této přímce je $f(x, -x) = 2x^4 \geq 0$ a $g(x, -x) = -2x^4 \leq 0$. Proto funkce $g(x, y)$ nemá v bodě $x = y = 0$ lokální extrém. Naopak funkce $f(x, y)$ má v tomto bodě lokální minimum $f(0, 0) = 0$, protože $f(x, y) = (x + y)^2 + x^4 + y^4 \geq 0$.

Příklad. Uvažujme funkci

$$f(x, y) = y^2 - 4x^2y + 3x^4 = (y - x^2)(y - 3x^2). \quad (10)$$

Protože

$$f'_{,x} = -8xy + 12x^3, \quad f'_{,y} = 2y - 4x^2,$$

je $x = y = 0$ stacionární bod funkce (10). Druhý diferenciál této funkce v bodě $\mathbf{a} = [0, 0]$

$$d^2f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = 2h_2^2$$

je pozitivně semidefinitní forma, a proto má-li funkce $f(x, y)$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém, jedná se o minimum $f(0, 0) = 0$.

Na přímce $y = 0$ je $f(x, 0) = 3x^4$ má funkce $f(x, y)$ minimum. Protože $f(0, y) = y^2$ má tato funkce v bodě $[0, 0]$ minimum i na této přímce. Všechny ostatní přímky, které procházejí počátkem mají rovnici $y = kx$, kde $k \neq 0$. Na této přímce dostaneme

$$f(x, kx) = F(x) = k^2x^2 - 4kx^3 + 3x^4.$$

Protože $F'(0) = 0$ a $F''(0) = 2k^2 > 0$, má funkce (10) v bodě $x = y = 0$ lokální minimum $f(0, 0) = 0$ na každé přímce, která prochází tímto bodem. Ale přesto nemá v bodě $\mathbf{a}$ lokální minimum, protože na parabole $y = 2x^2$ je $f(x, 2x^2) = -x^4$.

Vázané lokální extrémy

V předchozí části přednášky jsme se zabývali lokálními extrémy funkce $f(\mathbf{x})$ ve vnitřních bodech množiny M . Jestliže je $\mathbf{a}$ vnitřní bod množiny M , existuje pro každý vektor $\mathbf{v}$ číslo $\delta > 0$ takové, že úsečka $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{v}t$, kde $|t| < \delta$, leží v M . Jestliže má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém, má funkce $F(t) = f(\mathbf{a} + \mathbf{v}t)$, kde $|t| < \delta$, extrém v bodě $t = 0$. Proto muselo být $f'_{,\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = 0$ pro každý vektor $\mathbf{v}$. Z těchto podmínek pak plynuly nutné podmínky pro lokální extrém (1) nebo (2).

Není-li $\mathbf{a}$ vnitřní bod množiny M , může existovat vektor $\mathbf{v}$ takový, že bod $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{v}t \notin M$ pro žádné $t \neq 0$. Jestliže má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a} \in M$ lokální extrém vzhledem k množině M , nemusí již být $f'_{,\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = 0$, protože už nesrovnáváme hodnotu $f(\mathbf{a})$ s hodnotou $f(\mathbf{a} + \mathbf{v}t)$. V takovém případě postupujeme trochu jinak.

Pro nás budou důležité množiny $M \subset X = D_f$, které lze popsat jako řešení soustavy rovnic

$$g_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (11)$$

Vztahy (11) se obvykle nazývají vazby a proto se lokální extrémy funkce $f(\mathbf{x})$ na množině

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; g_k(\mathbf{x}) = 0 \text{ pro } k = 1, 2, \dots, r\}$$

nazývají *vázané extrémy*.

Nejprve na nejjednodušším příkladě $n = 2$ a $r = 1$ ukážeme různé metody řešení této úlohy.

Když máme najít extrém funkce $f(x, y)$ na množině M dané rovnicí $g(x, y) = 0$, lze nejprve najít řešení rovnice $g(x, y) = 0$, tj. funkce $y = y(x)$, pro které platí $g(x, y(x)) = 0$, a tuto řešení dosadit do funkce $f(x, y)$. Tím převedeme úlohu na vázaný extrém na úlohu najít lokální extrémy funkce jedné proměnné $F(x) = f(x, y(x))$, který již umíme řešit.

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy$ na množině $x + y = 2$.

ŘEŠENÍ: Z rovnice $x + y = 2$ plyne, že $y = 2 - x$. Když toto y dosadíme do funkce $f(x, y)$, dostaneme funkci

$$F(x) = f(x, 2 - x) = x(2 - x) = 2x - x^2,$$

jedné proměnné x . Protože je funkce $F(x)$ diferencovatelná, může mít lokální extrémy pouze v bodech, kde $F'(x) = 2 - 2x = 0$, tj. v bodě $x = 1$. A protože $F''(1) = -2 < 0$, má funkce $F(x)$ v bodě $x = 1$ lokální maximum. Proto má funkce $f(x, y) = xy$ na množině M definované rovnicí $x + y = 2$ lokální maximum v bodě $x = y = 1$.

Rovnice vazby $g(x, y) = 0$ můžeme vyřešit také pomocí parametru, tj. ve tvaru $x = x(t)$ a $y = y(t)$, kde $t \in \mathcal{T}$. Pak dostaneme po dosazení do funkce $f(x, y)$ funkci $F(t) = f(x(t), y(t))$ jedné proměnné t , pro kterou hledáme lokální extrémy známým způsobem.

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy$ na množině $x^2 + y^2 = 1$.

ŘEŠENÍ: Místo abychom použili dvě řešení rovnice vazby $y_{\pm}(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$, lze použít parametrické rovnice kružnice $x = \cos t$, $y = \sin t$, kde $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Po dosazení do funkce $f(x, y)$ pak dostaneme funkci

$$F(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos t \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Protože $F'(t) = \cos 2t$, mohou být extrémy v bodech $t_k = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$, kde $k = 0, 1, 2, 3$. Protože $F''(t_k) = -2\sin 2t_k$, snadno zjistíme, že v bodech $t_0 = \frac{1}{4}\pi$ a $t_2 = \frac{5}{4}\pi$ má funkce $F(t)$ lokální maxima a v bodech $t_1 = \frac{3}{4}\pi$ a $t_3 = \frac{7}{4}\pi$ lokální minima. Když se vrátíme k proměnným x a y , zjistíme, že funkce $f(x, y) = xy$ má na kružnici $x^2 + y^2 = 1$ lokální maxima v bodech $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ a lokální minima v bodech $x = -y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Když neumíme, nebo z nějakých důvodů nechceme, vyřešit rovnice vazeb $g(x, y) = 0$, postupujeme trochu jinak. Jestliže předpokládáme, že funkce $g(x, y)$ je spojitá na nějaké otevřené množině $N \supset M$, má na ni spojitě obě první parciální derivace a $g'_{,y}(x, y) \neq 0$ pro $[x, y] \in M$, lze podle věty o implicitních funkcích najít aspoň lokálně funkci $y = y(x)$, pro kterou platí $g(x, y(x)) = 0$. Když tuto funkci formálně dosadíme do $f(x, y)$, dostaneme opět funkci jedné proměnné $F(x) = f(x, y(x))$. Tato funkce může mít lokální extrémy pouze v bodech, kde

$$F'(x) = f'_{,x}(x, y) + f'_{,y}(x, y) y' = 0.$$

To je spolu s rovnicí $g(x, y) = 0$ soustava dvou rovnic pro tři neznáme x , y a y' . Protože nyní neznáme explicitně funkci $y = y(x)$, neznáme ani funkci $y'(x)$. Ale z věty o implicitních funkcích plyne pro $y'(x)$ rovnice

$$g'_{,x}(x, y) + g'_{,y}(x, y) y' = 0.$$

Proto bod $[a, b]$, ve kterém může mít funkce $f(x, y)$ na množině $g(x, y) = 0$ lokální extrém, musí splňovat soustavu rovnic

$$\begin{aligned} f'_{,x}(a, b) + f'_{,y}(a, b) y'(a) &= 0, \\ g'_{,x}(a, b) + g'_{,y}(a, b) y'(a) &= 0, \\ g(a, b) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

To je soustava tří rovnic pro neznámé a , b a $y'(a)$, kterou jsme v principu schopni vyřešit.

Většinou se soustava (12) neřeší přímo, ale k jejímu řešení se používá následující postup. Protože jsme předpokládali, že $g'_{,y}(a, b) \neq 0$, existuje právě jedno reálné číslo λ takové, že

$$f'_{,y}(a, b) + \lambda g'_{,y}(a, b) = 0.$$

Jestliže vynásobíme druhou rovnici v (12) tímto λ a přičteme k první rovnici, dostaneme kvůli volbě λ vztah

$$f'_{,x}(a, b) + \lambda g'_{,x}(a, b) = 0.$$

Tedy jestliže má funkce $f(x, y)$ na množině $g(x, y) = 0$ v bodě $[a, b]$ lokální extrém, musí existovat číslo λ takové, že

$$\begin{aligned} f'_{,x}(a, b) + \lambda g'_{,x}(a, b) &= 0, \\ f'_{,y}(a, b) + \lambda g'_{,y}(a, b) &= 0, \\ g(a, b) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

První dvě rovnice v (13) lze zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial L}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial L}{\partial y}(a, b) = 0, \quad \text{kde} \quad L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Abychom rozhodli o typu lokálního extrému funkce $f(x, y)$ na množině $g(x, y) = 0$ v bodě $[a, b]$, musíme ještě v bodě $x = a$ najít druhou derivaci $F''(a)$, respektive druhý diferenciál funkce $F(x)$, tj. $d^2F(a) = F''(a) dx^2$. Protože $F(x) = f(x, y(x))$, je podle věty o diferenciálu složené funkce

$$\begin{aligned} dF(x) &= f'_{,x}(x, y(x)) dx + f'_{,y}(x, y(x)) dy, \\ d^2F(a) &= f''_{,xx}(a, b) dx^2 + 2f''_{,xy}(a, b) dx dy + f''_{,yy}(a, b) dy^2 + f'_{,y}(a, b) d^2y. \end{aligned}$$

Ale z vazbové podmínky $g(x, y(x)) = 0$ plynou vztahy

$$dg(a, b) = g'_{,x}(a, b) dx + g'_{,y}(a, b) dy = 0, \quad (14)$$

$$d^2g(a, b) = g''_{,xx}(a, b) dx^2 + 2g''_{,xy}(a, b) dx dy + g''_{,yy}(a, b) dy^2 + g'_{,y}(a, b) d^2y = 0. \quad (15)$$

Jestliže přičteme rovnici (15) vynásobenou λ k $d^2F(a)$ a použijeme druhou rovnici v (13), dostaneme

$$\begin{aligned} d^2F(a) &= (f''_{,xx}(a, b) + \lambda g''_{,xx}(a, b)) dx^2 + 2(f''_{,xy}(a, b) + \lambda g''_{,xy}(a, b)) dx dy + \\ &\quad + (f''_{,yy}(a, b) + \lambda g''_{,yy}(a, b)) dy^2. \end{aligned}$$

Proměnné dx a dy v tomto vztahu nejsou vzájemně nezávislé, ale splňují vztah (14). Proto musíme jednu z nich vypočítat z (14) a dosadit. Protože jsme předpokládali, že $g'_{,y}(a, b) \neq 0$, lze z (14) určitě najít dy . Po dosazení do $d^2F(a)$ pak dostaneme

$$d^2F(a) = \Phi(a, b) dx^2$$

a typ extrému pak určuje znaménko $\Phi(a, b)$.

Z uvedeného postupu lze nahlédnout, že číslo $\Phi(a, b)$ můžeme najít také tak, že spočítáme druhý diferenciál funkce $L(x, y)$ dvou nezávislých proměnných pro $x = a$, $y = b$ a λ , které jsou řešením soustavy (13), tj.

$$d^2L(a, b) = L''_{,xx}(a, b) dx^2 + 2L''_{,xy}(a, b) dx dy + L''_{,yy}(a, b) dy^2,$$

a pak za dy dosadíme z rovnice (14).

Funkce $L(x, y)$ v uvedené metodě se nazývá *Lagrangeova funkce*, číslo λ *Lagrangeův multiplikátor* a celá metoda pak *metoda Lagrangeových multiplikátorů*.

Shrňme ještě postup v našem případě hledání lokálního extrému funkce $f(x, y)$ za podmínky $g(x, y) = 0$ (vynecháváme předpoklady).

Nejprve sestojíme Lagrangeovu funkci $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$. Body, ve kterých může být lokální extrém, jsou řešením soustavy rovnic

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad g(x, y) = 0.$$

Nechť je $x = a$, $y = b$ a λ řešení této soustavy. Najdeme druhý diferenciál Lagrangeovy funkce $d^2L(a, b)$ v bodě $[a, b]$ a z rovnice (14) dosadíme do $d^2L(a, b)$ jednu z proměnných dx nebo dy . Tak dostaneme kvadratickou formu $\Psi(h) = \Phi(a, b)h^2$. Je-li kvadratická forma $\Psi(h)$ pozitivně definitní, tj. $\Phi(a, b) > 0$, má funkce $f(x, y)$ na množině $g(x, y) = 0$ v bodě $[a, b]$ lokální minimum a je-li kvadratická forma $\Psi(h)$ negativně definitní, tj. $\Phi(a, b) < 0$, má funkce $f(x, y)$ na množině $g(x, y) = 0$ v bodě $[a, b]$ lokální maximum.

Platí následující věta, která popisuje metodu Lagrangeových multiplikátorů v obecném případě.

Věta. Nechť mají funkce $f(\mathbf{x})$ a $g_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \dots, s$, spojité parciální derivace prvního řádu na otevřené množině $X \subset \mathbb{R}^n$ a nechť je v každém bodě $\mathbf{x} \in X$ hodnota matice

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}, \frac{\partial g_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}, \frac{\partial g_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}, \frac{\partial g_r}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g_r}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\mathbf{x})$$

rovna r a nechť je M množina všech bodů $\mathbf{x} \in X$, pro které je

$$g_k(\mathbf{x}) = g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

Pak platí následující tvrzení.

Jestliže má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém vzhledem k množině M , existují reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ taková, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\mathbf{a}) &= 0 \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \dots, n, \\ g_k(\mathbf{a}) &= 0 \quad \text{pro každé } k = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (16)$$

Nechť pro $\mathbf{a}$ a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ platí (16) a necht' mají všechny funkce $f(\mathbf{x})$ a $g_k(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ diferenciál druhého řádu. Sestrojíme kvadratickou formu

$$\Psi(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \right) dx_i dx_j. \quad (17)$$

Protože má matice $\mathbf{W}(\mathbf{a})$ hodnost r , lze ze soustavy

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\mathbf{a}) dx_i = 0 \quad (18)$$

vyjádřit r proměnných z dx_k jako lineární formy ostatních. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že ze soustavy (18) vyjádříme $dx_1, dx_2, \dots, dx_r$ pomocí $dx_{r+1}, dx_{r+2}, \dots, dx_n$. Jestliže toto vyjádření dosadíme do kvadratické formy Ψ , získáme kvadratickou formu $\Phi(dx_{r+1}, \dots, dx_n)$ proměnných $dx_{r+1}, dx_2, \dots, dx_n$.

Jestliže je tato kvadratická forma Φ pozitivně definitní, má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ ostré lokální minimum vzhledem k množině M .

Jestliže je tato kvadratická forma Φ negativně definitní, má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ ostré lokální maximum vzhledem k množině M .

Jestliže je tato kvadratická forma Φ indefinitní, nemá funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ vzhledem k množině M lokální extrém.

Poznámka: Uvedená věta je poměrně dlouhá na zapamatování, ale její použití lze popsat velmi jednoduše. Nejprve sestrojíme Lagrangeovu funkci

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^r \lambda_k g_k(\mathbf{x}),$$

kde λ_k jsou zatím neznámé konstanty. Nutné podmínky pro to, aby měla funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém, jsou

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = \frac{\partial L}{\partial x_2}(\mathbf{a}) = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n}(\mathbf{a}) = 0 \quad \text{a} \quad g_1(\mathbf{a}) = g_2(\mathbf{a}) = \dots = g_r(\mathbf{a}) = 0. \quad (19)$$

Z této soustavy $(n+r)$ rovnic pro $(n+r)$ neznámých nalezneme $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$.

Pro tyto hodnoty sestrojíme druhý diferenciál Lagrangeovy funkce $L(\mathbf{x})$, tj.

$$d^2 L(\mathbf{a}) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) dx_i dx_j. \quad (20)$$

Z rovnic

$$dg_k(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\mathbf{a}) dx_i = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r,$$

vyjádříme r z hodnot $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ pomocí $(n-r)$ ostatních a dosadíme do (20). Tím získáme kvadratickou formu $(n-r)$ proměnných Φ , která rozhoduje o typu extrému lokálního vázaného extrému funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$.

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x + y + z$ na množině M , která je dána rovnicí $g(x, y, z) = xyz - 1 = 0$.

ŘEŠENÍ: Na tomto příkladě ukážeme použití metody Lagrangeových multiplikátorů. Nejprve sestojíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = x + y + z + \lambda(xyz - 1).$$

Podle (19) jsou nutné podmínky pro extrém

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + \lambda yz = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda xz = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 1 + \lambda xy = 0, \quad xyz = 1.$$

Jestliže první rovnici vynásobíme x , druhou y a třetí z a použijeme toho, že $xyz = 1$, dostaneme vztah

$$x = y = z = -\lambda.$$

Po dosazení do podmínky $xyz = 1$, pak získáme bod $\mathbf{a} = [1, 1, 1]$ a hodnotu $\lambda = -1$. Jedině pro tyto hodnoty může mít funkce lokální extrém. Abychom určili jeho typ, najdeme druhý diferenciál Lagrangeovy funkce $L(x, y, z)$, ve které je $\lambda = -1$ v bodě $\mathbf{a}$. Ten je

$$d^2L(\mathbf{a}) = -2(dx dy + dx dz + dy dz). \quad (21)$$

Tato forma je indefinitní, ale z toho ještě neplyne, že funkce $f(\mathbf{x})$ nemá v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém. Z diferenciálu rovnice vazby v bodě $\mathbf{a}$ totiž plyne, že proměnné dx, dy a dz splňují vztah

$$dg(\mathbf{a}) = dx + dy + dz = 0.$$

Jestliže odtud vyjádříme $dz = -dx - dy$ a dosadíme do (21), dostaneme kvadratickou formu

$$\Phi(dx, dy) = 2(dx^2 + dx dy + dy^2),$$

o které se lze snadno přesvědčit (například pomocí Sylvesterova kritéria), že je pozitivně definitní.

Tedy funkce $f(x, y, z)$ má na množině dané rovnicí $xyz = 1$ lokální minimum 3, v bodě $\mathbf{a} = [1, 1, 1]$.

Mohli jsme samozřejmě postupovat také jinak. Z rovnice vazby $xyz = 1$ plyne, že $z = \frac{1}{xy}$.

Jestliže dosadíme tuto hodnotu z do funkce $f(x, y, z)$, dostaneme funkci dvou proměnných

$$F(x, y) = f\left(x, y, \frac{1}{xy}\right) = x + y + \frac{1}{xy}.$$

Nyní můžeme hledat lokální extrémy funkce $F(x, y)$ bez vazbové podmínky, tj. na otevřené množině. Podle první části přednášky jsou nutné podmínky pro lokální extrém funkce $F(x, y)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - \frac{1}{x^2 y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \frac{1}{xy^2} = 0.$$

tato soustava má jediné řešení $x = y = 1$. Abychom rozhodli o typu extrému funkce $F(x, y)$ v bodě $\mathbf{a} = [1, 1]$, budeme zkoumat kvadratickou formu, která odpovídá druhému diferenciálu $d^2F(\mathbf{a})$. Protože

$$F''_{xx} = \frac{2}{x^3y}, \quad F''_{xy} = \frac{1}{x^2y^2}, \quad F''_{yy} = \frac{2}{xy^3},$$

Odpovídá druhému diferenciálu $d^2F(\mathbf{a})$ matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}.$$

A protože $D_1 = 2 > 0$ a $D_2 = 3 > 0$, je kvadratická forma $d^2F(\mathbf{a})$ pozitivně definitní, tedy v bodě $x = y = 1$ má funkce $F(x, y)$ lokální minimum $F(1, 1) = 3$. Proto má funkce $f(x, y, z)$ za podmínky $xyz = 1$ lokální minimum v bodě $x = y = 1$, $z = \frac{1}{xy} = 1$, které je $f(1, 1, 1) = 3$.

Poznámka. Jak jsme viděli v předcházejícím příkladě, lze mnohé příklady na vázané extrémy řešit tak, že vyřešíme rovnice vazeb a budeme hledat lokální extrémy funkce méně proměnných bez vazeb nebo pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů. Obecně platí, že je z technického hlediska lepší vyřešit, co největší počet vazeb a Lagrangeovy multiplikátory použít jen pro vazby, které vyřešit neumíme. Každá nevyřešená vazba nám totiž přidá do soustavy pro nalezení stacionárního bodu $\mathbf{a}$ dvě rovnice, jednu pro nevyřešenou souřadnici vazby a druhou pro Lagrangeův multiplikátor, který vazbě odpovídá.

Příklad. Uvedeme ještě jeden příklad, který se poměrně často vyskytuje v písemkách. Jedná se o nalezení lokálního extrému funkce $y = y(\mathbf{x})$ dané implicitně rovnicí $F(\mathbf{x}, y) = 0$. Jeden z možných postupů jeho řešení je najít podle věty o implicitních funkcích parciální derivace funkce $y(\mathbf{x})$ a použít podmínky pro extrémy ve tvaru $\frac{\partial y}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$.

Jiná možnost spočívá v použití metody Lagrangeových multiplikátorů. Máme totiž najít lokální extrémy funkce $f(\mathbf{x}, y) = y$ na množině dané rovnicí $F(\mathbf{x}, y) = 0$. Lagrangeova funkce je v tomto případě

$$L(\mathbf{x}) = y + \lambda F(x_1, x_2, \dots, x_n, y).$$

Tedy nutné podmínky pro lokální extrém v bodě $[\mathbf{a}, b]$ jsou

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathbf{a}, b) = \lambda \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a}, b) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y}(\mathbf{a}, b) = 1 + \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}, b) = 0, \quad F(\mathbf{a}, b) = 0.$$

Z druhé plyne $\lambda \neq 0$, a tedy musí platit

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a}, b) = 0, \quad F(\mathbf{a}, b) = 0, \quad \lambda^{-1} = -\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}, b) \neq 0. \quad (22)$$

Druhý diferenciál Lagrangeovy funkce je v bodě $[\mathbf{a}, b]$ je

$$d^2L = \lambda \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}, b) dx_i dx_j + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial y}(\mathbf{a}, b) dx_i dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\mathbf{a}, b) dy^2 \right).$$

Z diferenciálu rovnice vazby $F(\mathbf{x}, y) = 0$ dostaneme v bodě $[\mathbf{a}, b]$ vztah

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a}, b) dx_i + \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}, b) dy = 0.$$

Ale protože v bodě $[\mathbf{a}, b]$ platí $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a}, b) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}, b) \neq 0$, musí být $dy = 0$. Po dosazení do d^2L , pak dostaneme kvadratickou formu

$$\Phi = \lambda \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}, b) dx_i dx_j, \quad \text{kde } \lambda^{-1} = -\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}, b) \neq 0,$$

která rozhoduje o typu lokálního extrému implicitně definované funkce $y = y(\mathbf{a})$, pro kterou platí $y(\mathbf{a}) = b$.

Globální extrémy spojitě funkce na kompaktní množině

Mnohé příklady na hledání extrémů vedou právě k úlohám tohoto typu. Připomeňme, že množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená. Pro spojitě funkce na kompaktní množině M platí tzv. *Weierstrassova věta*:

Věta. Nechť je $f(\mathbf{x})$ spojitá funkce na kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak existují v M body $\mathbf{x}_{\min}$ a $\mathbf{x}_{\max}$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in M$ je $f(\mathbf{x}_{\min}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_{\max})$.

Jestliže diferencovatelná funkce $f(\mathbf{x})$ nabývá extrémní hodnoty v bodě $\mathbf{a}$, který je vnitřní bod množiny M , musí mít v tomto bodě lokální extrém, a tedy musí být $df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = 0$.

Jestliže funkce nabývá extrémní hodnoty v bodě $\mathbf{a}$, který leží na hranici M , musí funkce $f(\mathbf{x})$ v tomto bodě lokální extrém vzhledem k hranici množiny M a jde tedy o vázaný extrém, který najdeme například metodou Lagrangeových multiplikátorů nebo jiným postupem, o kterém jsme se zmínili v předcházející části.

Těmito dvěma postupy najdeme množinu bodů N , ve kterých může funkce $f(\mathbf{x})$ nabývat na množině M globální extrém. Ten pak najdeme jako

$$f_{\min}(M) = \min\{f(\mathbf{a}); \mathbf{a} \in N\}, \quad f_{\max}(M) = \max\{f(\mathbf{a}); \mathbf{a} \in N\}.$$

Poznamenejme, že v tomto případě nemusíme zkoumat typ lokálního extrému v bodech $\mathbf{a} \in N$ pomocí druhého diferenciálu.

Příklad. Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ na množině $M \subset \mathbb{R}^2$ dané nerovnostmi $0 \leq x \leq 3$ a $0 \leq y \leq 2x^2$.

ŘEŠENÍ: Protože je funkce $f(x, y)$ spojitá v $\mathbb{R}^2$ a množina M je kompaktní, v M existují body, ve kterých dosahuje funkce $f(x, y)$ své nejmenší a největší hodnoty.

Z vnitřních bodů množiny M , tj. množiny $0 < x < 3$ a $0 < y < 2x^2$, to mohou být pouze body, ve kterých je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0.$$

Tato soustava má řešení $x = y = 0$ a $x = y = 1$. Protože bod $[0, 0]$ není vnitřním bodem množiny M , bude nás zajímat pouze bod $\mathbf{a}_1 = [1, 1]$.

Hranice množiny M je tvořena třemi křivkami:

1. úsečkou $y = 0, 0 \leq x \leq 3$;
2. úsečkou $x = 3, 0 \leq y \leq 18$;
3. částí paraboly $y = 2x^2, 0 \leq x \leq 3$.

Na první úsečce budeme lokální extrém funkce $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ s podmínkou $y = 0, 0 \leq x \leq 3$. Jestliže dosadíme $y = 0$, zjistíme, že máme najít extrém funkce $F_1(x) = f(x, 0) = x^3$ na uzavřeném intervalu $x \in \langle 0, 3 \rangle$. Protože $F_1'(x) = 3x^2 \neq 0$ pro $0 < x < 3$, může mít funkce $F_1(x)$ pro $\langle 0, 3 \rangle$ extrém pouze v krajních bodech intervalu. Tak dostaneme body $\mathbf{a}_2 = [0, 0]$ a $\mathbf{a}_3 = [3, 0]$.

Podobně na druhé úsečce budeme hledat extrém funkce $F_2(y) = f(3, y) = y^3 - 9y + 27$ pro $y \in \langle 0, 18 \rangle$. Protože $F_2'(y) = 3y^2 - 9$, mohou být extrém pouze v bodech $\mathbf{a}_4 = [3, \sqrt{3}]$, $\mathbf{a}_3 = [3, 0]$ (to už víme) a v bodě $\mathbf{a}_5 = [3, 18]$.

Na třetí křivce budeme hledat extrém funkce $F_3(x) = f(x, 2x^2) = 8x^6 - 5x^3$ pro $x \in \langle 0, 3 \rangle$. Krajní body tohoto intervalu jsou body $\mathbf{a}_2 = [0, 0]$ a $\mathbf{a}_5 = [3, 18]$. Protože $F_3'(x) = 48x^5 - 15x^2 = 0$ pro $x = \sqrt[3]{\frac{5}{16}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{5}{2}} \in (0, 3)$, dostaneme bod $\mathbf{a}_6 = [\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{5}{2}}, \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{25}{4}}]$.

Funkce $f(x, y)$ může na množině M nabývat největší a nejmenší hodnoty pouze v bodě z množiny $N = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6\}$. A protože

$$f(\mathbf{a}_1) = -1, \quad f(\mathbf{a}_2) = 0, \quad f(\mathbf{a}_3) = 27, \quad f(\mathbf{a}_4) = 27 - 9\sqrt{3}, \quad f(\mathbf{a}_5) = 5697, \quad f(\mathbf{a}_6) = -\frac{25}{32},$$

A protože

$$\begin{aligned} \min\{f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), f(\mathbf{a}_3), f(\mathbf{a}_4), f(\mathbf{a}_5), f(\mathbf{a}_6)\} &= f(\mathbf{a}_1) = -1, \\ \max\{f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), f(\mathbf{a}_3), f(\mathbf{a}_4), f(\mathbf{a}_5), f(\mathbf{a}_6)\} &= f(\mathbf{a}_5) = 5697, \end{aligned}$$

nabývá funkce $f(x, y)$ na množině M nejmenší hodnotu -1 v bodě $[1, 1]$ a největší hodnotu 5697 v bodě $[3, 18]$.