Diferenciální počet – příklad 1 s výsledky

Najděte derivaci funkce $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2y}$ v bodě $A = [1,-1]$ ve směru tečny k hyperbole $y = \dfrac{2-3x}{x}$ v bodě A. $\left[\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right]$

Najděte derivaci funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ v bodě $A = [1,1]$ ve směru tečny ke grafu funkce $y = \sqrt[4]{4-3x}$ v bodě A. $\left[\pm\frac{7}{10}\right]$

Najděte derivaci funkce $f(x,y) = x + \sqrt{x+\sqrt{y}}$ v bodě $A = [2,4]$ ve směru tečny ke grafu funkce $y = x^2$ v bodě A. $\left[\pm\frac{3}{2\sqrt{17}}\right]$

Najděte derivaci funkce $f(x,y) = \arcsin\dfrac{1-y}{1+x}$ v bodě $A = [0,1]$ ve směru tečny ke grafu funkce $y = (1+x)^{x-1}$ v bodě A. $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Najděte derivaci funkce $f(x,y) = x^2y + \ln\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v bodě $A = [1,1]$ ve směru normály ke grafu funkce $y = \sqrt[3]{x}$ v bodě A. $\left[\pm\frac{3}{\sqrt{10}}\right]$

Najděte derivaci funkce $f(x,y) = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v bodě $A = [1,1]$ ve směru normály ke grafu funkce $y = \dfrac{1}{x^2}$ v bodě A. $\left[\pm\frac{1}{2\sqrt{5}}\right]$

Najděte derivaci funkce $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ v bodě $A = [1,2,-2]$ ve směru normály k rovině $4x - y + z = 0$. $\left[0\right]$

Najděte derivaci funkce $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\dfrac{z}{xy}$ v bodě $A = [1,-1,1]$ ve směru normály k rovině $2x - 2y + z = 0$. $\left[\pm\frac{1}{2}\right]$

Najděte derivaci funkce $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v bodě $A = [-3,4,5]$ ve směru normály k rovině $3x + y + 4z = 0$. $\left[\pm\frac{1}{2\sqrt{26}}\right]$

Napište rovnici tečné roviny k ploše dané rovnicí $z = x^2 + 4xy + 3y^2$, která je kolmá na přímku danou rovnicemi $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{1-2z}{1}$. $\left[z + 5 = 4(x+4) + 2(y-3)\right]$

Napište rovnici tečné roviny k ploše dané rovnicí $z = x^2 - xy + y^2$, která je kolmá na přímku danou rovnicemi $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{3z-2}{1}$. $\Big[z - 9 = -3x + 6(y-3)\Big]$

Napište rovnici tečné roviny v bodě $A = [1, -1, 2]$ k ploše $\mathcal{S}$, která je v okolí bodu A definována rovnicí

$$x \sin(x+y) + y \ln(z-x) + z^2 = 4\,.$$

$\Big[2x + y + 3z = 7\Big]$

Napište rovnici tečné roviny v bodě $A = [1, 2, 0]$ k ploše $\mathcal{S}$, která je v okolí bodu A definována rovnicí

$$\mathrm{e}^{z \cos \pi(x+y)} - xy + y^2 \cos z = 3\,.$$

$\Big[2x - y + z = 0\Big]$

Napište rovnici tečné roviny v bodě $A = [0, -1, 1]$ k ploše $\mathcal{S}$, která je v okolí bodu A definována rovnicí

$$z \operatorname{tg}(2x + y + z) + y \ln(xz + y^2) + y^2 z \mathrm{e}^{-x} = 1\,.$$

$\Big[y + 2z = 1\Big]$

Napište rovnici tečné roviny v bodě $A = [1, -2, 1]$ k ploše $\mathcal{S}$, která je v okolí bodu A definována rovnicí

$$(x+y)\mathrm{e}^{y \sin(x-z)} + z^3 \mathrm{e}^{z \operatorname{tg}(2x+y)} = 0\,.$$

$\Big[5x + 2y + z = 2\Big]$

Napište rovnici tečné roviny v bodě $A = [2, -1, 1]$ k ploše $\mathcal{S}$, která je v okolí bodu A definována rovnicí

$$xy \ln(x - z^2) + z \mathrm{e}^{x(y+z)} = 1\,.$$

$\Big[2x - 2y - 7z + 1 = 0\Big]$

Napište rovnici tečné roviny v bodě $A = [1, 1, -1]$ k ploše $\mathcal{S}$, která je v okolí bodu A definována rovnicí

$$z \arcsin(x + 2y + 3z) + (x^2 + y^2) \ln \sqrt{1 + y - z^2} = 0\,.$$

$\Big[x + y + z = 1\Big]$

V bodě $A = [1, -1, 2]$ najděte parametrické rovnice tečny ke křivce $\mathcal{C}$, která v okolí bodu A je dána jako řešení soustavy rovnic

$$z^2 - xy + yz + x \sin(x + y) = 3\,, \qquad xy + xz + yz + 1 = 0\,.$$

$$\Big[x = 1 + 4t\,, \quad y = -1 - t\,, \quad z = 2 + 2t\,, \quad t \in \mathbb{R}\Big]$$

V bodě $A = [1, 2, 0]$ najděte parametrické rovnice tečny ke křivce $\mathcal{C}$, která v okolí bodu A je dána jako řešení soustavy rovnic

$$xy + xz + yz = 2\,, \qquad y^2 + z^2 - xy + \mathrm{e}^{z \cos \pi(x-y)} = 3\,.$$

$$\Big[x = 1 + 5t\,, \quad y = 2 + 2t\,, \quad z = 4t\,, \quad t \in \mathbb{R}\Big]$$

V bodě $A = [0, -1, 1]$ najděte parametrické rovnice tečny ke křivce $\mathcal{C}$, která v okolí bodu A je dána jako řešení soustavy rovnic

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz = 2\,, \qquad z^2 + 2xz + yz + y \ln(xz + y^2) + y^2 z \mathrm{e}^{-x} = 1\,.$$

$$\Big[x = 3t\,, \quad y = -1 - 2t\,, \quad z = 1 + t\,, \quad t \in \mathbb{R}\Big]$$

V bodě $A = [1, -2, 1]$ najděte parametrické rovnice tečny ke křivce $\mathcal{C}$, která v okolí bodu A je dána jako řešení soustavy rovnic

$$x + y + z + 2xyz + 4 = 0\,, \qquad y(x + y) \sin(x - z) + z^3 \operatorname{tg}(2x + y) = 0\,.$$

$$\Big[x = 1 + t\,, \quad y = -2 + 6t\,, \quad z = 1 + 5t\,, \quad t \in \mathbb{R}\Big]$$

V bodě $A = [2, -1, 1]$ najděte parametrické rovnice tečny ke křivce $\mathcal{C}$, která v okolí bodu A je dána jako řešení soustavy rovnic

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3yz + xyz = 1\,, \qquad z^2 + yz + xy \ln(x - z^2) = 0\,.$$

$$\Big[x = 2 + 3t\,, \quad y = -1 - 2t\,, \quad z = 1 + t\,, \quad t \in \mathbb{R}\Big]$$

V bodě $A = [1, 1, -1]$ najděte parametrické rovnice tečny ke křivce $\mathcal{C}$, která v okolí bodu A je dána jako řešení soustavy rovnic

$$xz + 2yz + 3z^2 + (x^2 + y^2) \ln \sqrt{1 + y - z^2} = 0\,, \qquad x^2 y + xz^2 + y^2 z - y = 0\,.$$

$$\Big[x = 1 + t\,, \quad y = 1 + 4t\,, \quad z = -1 - 5t\,, \quad t \in \mathbb{R}\Big]$$

Do rovnice
$$x^2\,\frac{\partial f}{\partial x} - y^2\,\frac{\partial f}{\partial y} = (x-y)f$$
zaveďte nové proměnné $u = xy$ a $v = \dfrac{xy}{x+y}$. $\left[u\,\dfrac{\partial F}{\partial u} = F\right]$

Nechť je funkce $f(x,y)$ řešení rovnice
$$(x+2y)\,\frac{\partial f}{\partial x} - (2x+y)\,\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2-y^2)f$$
a funkce $F(u,v)$ je definována vztahem $F\big(\sqrt{x^2+xy+y^2}, xy\big) = f(x,y)$. Jakou rovnici splňuje funkce $F(u,v)$? $\left[2\,\dfrac{\partial F}{\partial v} + F = 0\right]$

Nechť je funkce $f(x,y)$ řešení rovnice
$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 2f\,.$$
Najděte rovnici pro funkci $F(u,v)$, která je definována vztahem $f(x,y) = uF(u,v)$, kde $u = xy$ a $v = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. $\left[\dfrac{\partial F}{\partial u} = 0\right]$

Do rovnice
$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 2f\,.$$
zaveďte nové proměnné $u = x^2+y^2$ a $v = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. $\left[u\,\dfrac{\partial F}{\partial u} = F\right]$

Nechť je funkce $f(x,y)$ řešení rovnice
$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} + 2f = 0\,.$$
Najděte rovnici pro funkci $F(u,v)$, která je definována vztahem $(x+y)^2 f(x,y) = F(u,v)$, kde $u = x+y$ a $v = \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$. $\left[\dfrac{\partial F}{\partial u} = 0\right]$

Do rovnice
$$y\,\frac{\partial f}{\partial x} + x\,\frac{\partial f}{\partial y} + 2f = 0\,.$$
zaveďte nové proměnné $u = x^2-y^2$ a $v = \ln\dfrac{x-y}{x+y}$. $\left[\dfrac{\partial F}{\partial v} = F\right]$

Nechť je funkce $f(x,y)$ řešení rovnice

$$y\,\frac{\partial f}{\partial x} - x\,\frac{\partial f}{\partial y} = f\,.$$

Najděte rovnici pro funkci $F(u,v)$, která je definována vztahem $f(x,y) = \mathrm{e}^{-v}F(u,v)$, kde $u = \sqrt{x^2+y^2}$ a $v = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.
$\left[\dfrac{\partial F}{\partial v} = 0\right]$

Transformujte diferenciální výraz

$$x\,\frac{\partial f}{\partial y} - y\,\frac{\partial f}{\partial x}$$

do polárních souřadnic r a φ, které jsou definovány vztahy $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$.
$\left[\dfrac{\partial F}{\partial \varphi}\right]$

Transformujte diferenciální výraz

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

do polárních souřadnic r a φ, které jsou definovány vztahy $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$.
$\left[r\,\dfrac{\partial F}{\partial r}\right]$

Do rovnice

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} + z\,\frac{\partial f}{\partial z} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,f$$

zaveďte nové proměnné

$$u = \frac{x}{z}\,, \qquad v = \frac{y}{z}\,, \qquad w = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.$$

$\left[\dfrac{\partial F}{\partial w} = F\right]$

Nechť je $f(x,y,z) = x^n F(u,v)$, kde n je konstanta,

$$u = \frac{x}{y^2}\,, \qquad v = \frac{y^3}{z}$$

a funkce $F(u,v)$ má spojité první parciální derivace. Jak musíte zvolit n a funkci $F(u,v)$, aby platilo

$$2x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} + 3z\,\frac{\partial f}{\partial z} = 5f\,?$$

$\left[n = \frac{5}{2}, \text{ funkce } F(u,v) \text{ je libovolná}\right]$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}\,, \qquad v(x,y) = \cos y\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{x\sin y}{x^2+y^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,\frac{\partial F}{\partial u}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y) = \sqrt{1+x^2}\,, \qquad v(x,y) = \frac{xy}{x+y}\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[\frac{x^3}{(x+y)^2\sqrt{1+x^2}}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{x^2y^2}{(x+y)^4}\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{2xy}{(x+y)^3}\,\frac{\partial F}{\partial v}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,, \qquad v(x,y) = \mathrm{e}^{x^2}\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[-\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{2x^2\mathrm{e}^{x^2}}{x^2+y^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\frac{\partial F}{\partial u}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y) = \arcsin y\,, \qquad v(x,y) = \frac{y}{x^2}\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[-\frac{2y}{x^3\sqrt{1-y^2}}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{2y}{x^5}\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \frac{2}{x^3}\,\frac{\partial F}{\partial v}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y) = \operatorname{tg} x\,, \qquad v(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x}\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[\frac{2y}{x\cos^2 x}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}+\frac{2y(x^2-y^2)}{x^3}\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}-\frac{2y}{x^2}\,\frac{\partial F}{\partial v}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y),v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y)=\mathrm{e}^{xy}\,, \qquad v(x,y)=\ln\sqrt{1+y^2}\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[xy\mathrm{e}^{2xy}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+\frac{y^2\mathrm{e}^{xy}}{1+y^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}+(1+xy)\mathrm{e}^{xy}\,\frac{\partial F}{\partial u}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y),v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y)=\sin xy\,, \qquad v(x,y)=\operatorname{tg} x\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[xy\cos^2 xy\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+\frac{x\cos xy}{\cos^2 x}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}+\big(\cos xy - xy\sin xy\big)\,\frac{\partial F}{\partial u}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y),v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{xy}\,, \qquad v(x,y)=\operatorname{arctg} y\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[-\frac{(x^2+y^2)^2}{x^3y^3}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+\frac{x^2+y^2}{x^2y(1+y^2)}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}+\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}\,\frac{\partial F}{\partial u}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y),v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y)=\ln\big(x+\sqrt{1+x^2}\big)\,, \qquad v(x,y)=x^2+xy+y^2\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[\frac{x+2y}{\sqrt{1+x^2}}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}+(2x^2+5xy+2y^2)\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}+\frac{\partial F}{\partial v}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}\,, \qquad v(x,y) = \cos x\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[-\frac{(x^2-y^2)^2}{x^3y^3}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{(x^2-y^2)\sin x}{xy^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\,\frac{\partial F}{\partial u}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y) = \arcsin y\,, \qquad v(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-y^2)}}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{xy}{x^2+y^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\frac{\partial F}{\partial v}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y) = \ln\sqrt{1+x^2}\,, \qquad v(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[-\frac{2xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}}{1+x^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + 4xy\mathrm{e}^{-2(x^2+y^2)}\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + 4xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\frac{\partial F}{\partial v}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y) = \frac{y^2}{x^2}\,, \qquad v(x,y) = \operatorname{arctg} y\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[-\frac{4y^3}{x^5}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{2y^2}{x^3(1+y^2)}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{4y}{x^3}\,\frac{\partial F}{\partial u}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y) = \sqrt{\frac{x}{y}}\,, \qquad v(x,y) = \ln(1+x^2)\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[-\frac{1}{4y^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{x^{3/2}}{y^{3/2}(1+x^2)}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{4y\sqrt{xy}}\,\frac{\partial F}{\partial u}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y) = \frac{1}{y^2}\,, \qquad v(x,y) = \operatorname{arctg} xy\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[-\frac{2}{y^2(1+x^2y^2)}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{xy}{(1+x^2y^2)^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}\,\frac{\partial F}{\partial v}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y) = \operatorname{arctg} xy\,, \qquad v(x,y) = \sqrt{1-x^2}\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[\frac{xy}{(1+x^2y^2)^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{x^2}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}\,\frac{\partial F}{\partial u}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y) = \cosh x\,, \qquad v(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[-\frac{y\sinh x}{\sqrt{x^2-y^2}}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{xy}{x^2-y^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{xy}{(x^2-y^2)^{3/2}}\,\frac{\partial F}{\partial v}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y) = \frac{1}{\sin y}\,, \qquad v(x,y) = x^2y^2\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[-\frac{2xy^2\cos y}{\sin^2 y}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + 4x^3y^3\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + 4xy\,\frac{\partial F}{\partial v}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y) = \frac{x^2}{y}\,, \qquad v(x,y) = \operatorname{arctg} y\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[-\frac{2x^3}{y^3}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{2x}{y(1+y^2)}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{2x}{y^2}\,\frac{\partial F}{\partial u}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y) = \ln(x^2+y^2)\,, \qquad v(x,y) = \operatorname{tg} y\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{2x}{(x^2+y^2)\cos^2 y}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}\,\frac{\partial F}{\partial u}\right]$$

Nechť je funkce $f(x,y)$ definována vztahem $f(x,y) = F\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, kde funkce $F(u,v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x,y) = \sin x\,, \qquad v(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u,v)$.

$$\left[-\frac{x\cos x}{x^2+y^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\frac{\partial F}{\partial v}\right]$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy\sqrt{1-x^2-y^2}$, kde $x^2+y^2<1$.

[v bodech $\left[\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right]$ a $\left[-\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}\right]$ lokální maxima,
v bodech $\left[\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}\right]$ a $\left[-\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right]$ lokální minima,
ve stacionárním bodě $[0,0]$ není lokální extrém.]

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{2x+3y}\big(8x^2-6xy+3y^2\big)$.

[v bodě $[0,0]$ je lokální minimum; ve stacionárním bodě $\left[-\frac14, -\frac12\right]$ není lokální extrém.]

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac12 z^2 - 3xz - 2y + 2z$.

$\left[\text{v bodě } [2,1,4] \text{ lokální minimum; ve stacionárním bodě } [1,1,1] \text{ není lokální extrém.}\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^3 + \frac{3}{2}\,y^2 + z^2 - 3xy + 2yz + 4y + 2z$.

$\left[\text{v bodě } [2,4,-5] \text{ lokální minimum; ve stacionárním bodě } [1,1,-2] \text{ není lokální extrém.}\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

$\left[\text{v bodě } \left[1,\tfrac{1}{2}\right] \text{ lokální minimum; ve stacionárním bodě } [0,0] \text{ není lokální extrém.}\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$.

$\left[\text{v bodě } [5,2] \text{ je lokální minimum.}\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = \dfrac{1+x+y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

$\left[\text{v bodě } [1,1] \text{ je lokální maximum.}\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-y}(5-2x+y)$.

$\left[\text{ve stacionárním bodě } [1,-2] \text{ není lokální extrém.}\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-xy-y^2}(5x+7y-25)$.

$\left[\text{v bodě } [1,3] \text{ lokální maximum, v bodě } \left[-\tfrac{1}{26},-\tfrac{3}{26}\right] \text{ lokální minimum}\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

$\left[\text{v bodě } [1,2] \text{ je lokální minimum.}\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

$\left[\text{ve stacionárním bodě } [1,1] \text{ není lokální extrém.}\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{v bodech } \left[\tfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\tfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right] \text{ a } \left[-\tfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},-\tfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right] \text{ jsou lokální minima,}\\ \text{v bodech } \left[\tfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},-\tfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right] \text{ a } \left[-\tfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\tfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right] \text{ jsou lokální maxima,}\\ \text{ve stacionárních bodech } [\pm 1,0] \text{ a } [0,\pm 1] \text{ není lokální extrém.}\end{array}\right]$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$, kde $x,\ y,\ z > 0$.

$\left[\text{v bodě } \left[\frac{1}{2}, 1, 1\right] \text{ je lokální minimum.}\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + 8z^2$, $x,\ y,\ z > 0$.

$\left[\text{v bodě } \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right] \text{ je lokální minimum.}\right]$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz + yz)$.

$\left[\text{v bodě } [2, 2, 2] \text{ je lokální minimum, ve stacionárním bodě } [0, 0, 0] \text{ není lokální extrém.}\right]$
