# **Diferenciální počet – příklad 2** s výsledky

Najděte první dvě derivace funkce $y(x)$, které je řešením rovnice

$$y = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,.$$

$$\left[y'(x) = \frac{y}{x}\,, \quad y''(x) = 0\right]$$

---

Najděte první dvě derivace funkce $y(x)$, které je řešením rovnice

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,.$$

$$\left[y'(x) = \frac{x + y}{x - y}\,, \quad y''(x) = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}\right]$$

---

Nechť je funkce $y(x)$ definována v okolí bodu $[1, 0]$ rovnicí

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $x = 1$.

$$\left[T_2 = (x - 1) + (x - 1)^2\right]$$

---

Nechť je funkce $y(x)$ definována v okolí bodu $[1, -1]$ rovnicí

$$x^2 + xy + y^2 = \cos(x + y)\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $x = 1$.

$$\left[T_2 = -1 + (x - 1) + 5(x - 1)^2\right]$$

---

Nechť je funkce $y(x)$ definována v okolí bodu $[0, 1]$ rovnicí

$$x^2 + xy + y^2 - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 1\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $x = 0$.

$$\left[T_2 = 1 - x - x^2\right]$$

---

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, 1, 1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 + \operatorname{tg}\big((x - y)z\big) = x^2 + y^2 - 1\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1)$.

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{8}{9}\,, \quad z'_x = \tfrac{1}{3}\,, \quad z'_y = 1\right]$$

---

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, -1, 1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 + xy + 1 = z\mathrm{e}^{x^2 - y^2} .$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -1)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{5}{4}\,, \quad z'_x = \tfrac{3}{2}\,, \quad z'_y = \tfrac{1}{2}\right]$

---

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, -1, 1]$ jako řešení rovnice

$$z = 2 + xy + \operatorname{arctg} \frac{x + y}{z} .$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -1)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1\,, \quad z'_x = 0\,, \quad z'_y = 2\right]$

---

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[0, 1, 1]$ jako řešení rovnice

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2xyz + z \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 0 .$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 1)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{1}{2}\,, \quad z'_x = -1\,, \quad z'_y = \tfrac{1}{2}\right]$

---

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, 1, 1]$ jako řešení rovnice

$$z^2 + xyz\mathrm{e}^{3 - x^2 - y^2 - z^2} = x^2 + y^2 .$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -7\,, \quad z'_x = z'_y = 3\right]$

---

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, 1, -1]$ jako řešení rovnice

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + xz + yz} = 3 .$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{45}{32}\,, \quad z'_x = \tfrac{5}{4}\,, \quad z'_y = -\tfrac{3}{4}\right]$

---

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, -1, 2]$ jako řešení rovnice

$$x^2 + z^2 + xy + y \ln(z - x) = 4 ,$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -1)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{1}{9}\,, \quad z'_x = -\tfrac{2}{3}\,, \quad z'_y = -\tfrac{1}{3}\right]$

---

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, 2, 0]$ jako řešení rovnice

$$\mathrm{e}^{z \cos(2x - y)} - xy + y^2 \cos z = 3 .$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,2)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -17\,, \quad z'_x = 2\,, \quad z'_y = -3\right]$

---

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[0,-1,1]$ jako řešení rovnice

$$z(2x + y + z) + y\ln(xz + y^2) + y^2 z\mathrm{e}^{-x} = 1\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,-1)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{1}{2}\,, \quad z'_x = 0\,, \quad z'_y = -\tfrac{1}{2}\right]$

---

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[1,-2,1]$ jako řešení rovnice

$$y(x+y)\sin(x-z) + z^2(2x+y) = 0\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,-2)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 5\,, \quad z'_x = 2\,, \quad z'_y = \tfrac{1}{2}\right]$

---

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[2,-1,1]$ jako řešení rovnice

$$xy\ln(x-z) + \mathrm{e}^{x(y+z)} = 1\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2,-1)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{5}{8}\,, \quad z'_x = \tfrac{1}{2}\,, \quad z'_y = -\tfrac{1}{2}\right]$

---

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[1,1,-1]$ jako řešení rovnice

$$(x^2 + y^2)\ln\sqrt{1 + y - z^2} + z(x + 2y + 3z) = 0\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1)$. $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4\,, \quad z'_x = z'_y = -1\right]$

---

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[1,1,1]$ jako řešení rovnice

$$x^2 + y^2 + xy - x = z^3 + yz\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1,1]$.

$$\left[T_2 = 1 + \tfrac{1}{2}\,(x-1) + \tfrac{1}{2}\,(y-1) + \tfrac{1}{16}\,(x-1)^2 - \tfrac{1}{4}\,(x-1)(y-1) - \tfrac{1}{16}\,(y-1)^2\right]$$

---

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[1,1,1]$ jako řešení rovnice

$$x^2 - y^2 = z^3 - xyz\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1,1]$.

$$\left[T_2 = 1 + \tfrac{3}{2}\,(x-1) - \tfrac{1}{2}\,(y-1) - \tfrac{17}{8}\,(x-1)^2 + \tfrac{13}{4}\,(x-1)(y-1) - \tfrac{9}{8}\,(y-1)^2\right]$$

---

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, -1, 1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 = x^2 + y^2 - xz - yz + y\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1, -1]$.

$$\left[T_2 = 1 + \tfrac{1}{3}\,(x-1) - \tfrac{2}{3}\,(y+1) + \tfrac{1}{9}\,(x-1)^2 + \tfrac{5}{9}\,(x-1)(y+1) + \tfrac{1}{9}\,(y+1)^2\right]$$

---

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, -1, 1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 - zx^2 + zy^2 + xy = 0\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1, -1]$.

$$\left[T_2 = 1 + (x-1) + \tfrac{1}{3}\,(y+1) - \tfrac{1}{9}\,(x-1)(y+1) - \tfrac{2}{9}\,(y+1)^2\right]$$

---

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[0, -1, 1]$ jako řešení rovnice

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[0, -1]$.

$$\left[T_2 = 1 - x - (y+1)\right]$$

---

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[-1, -1, 1]$ jako řešení rovnice

$$x^2 + y^2 = z^3 + xyz\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[-1, -1]$.

$$\left[T_2 = 1 - \tfrac{1}{4}\,(x+1) - \tfrac{1}{4}\,(y+1) + \tfrac{9}{64}\,(x+1)^2 - \tfrac{15}{32}\,(x+1)(y+1) + \tfrac{9}{64}\,(y+1)^2\right]$$

---

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, 0, 1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 - 3xyz - x^2 + y^2 = 0\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1, 0]$.

$$\left[T_2 = 1 + \tfrac{2}{3}\,(x-1) + y - \tfrac{1}{9}\,(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}\,(x-1)y - \tfrac{1}{3}\,y^2\right]$$

---

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[0, 1, 0]$ jako řešení rovnice

$$x^3 + z^3 + y^2 + xy - xz - yz = 1\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[0, 1]$.

$$\left[T_2 = x + 2(y-1) - x^2 - 2x(y-1) - (y-1)^2\right]$$

---

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[-1, 0, 1]$ jako řešení rovnice

$$z^4 - 4yz - x^2 - y^2 - xy = 0\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[-1, 0]$.

$$\left[T_2 = 1 - \tfrac{1}{2}\,(x+1) + \tfrac{3}{4}\,y - \tfrac{1}{8}\,(x+1)^2 + \tfrac{7}{8}\,(x+1)y + \tfrac{5}{32}\,y^2\right]$$

---

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, -1, -1]$ jako řešení rovnice

$$yz^3 + x^2 z + xy^2 - y^2 = 0\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1, -1]$.

$$\left[T_2 = -1 + \tfrac{3}{2}\,(x-1) - \tfrac{1}{2}\,(y+1) + \tfrac{35}{8}\,(x-1)^2 - \tfrac{3}{2}\,(x-1)(y+1) - \tfrac{3}{8}\,(y+1)^2\right]$$

---

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, 1, -1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 + xyz^2 + x^2 - y^2 = 0\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1, 1]$.

$$\left[T_2 = -1 - 3(x-1) + (y-1) + 11(x-1)^2 + 17(x-1)(y-1) + (y-1)^2\right]$$

---

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, 0, -1]$ jako řešení rovnice

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1, 0]$.

$$\left[T_2 = -1 - (x-1) - y\right]$$

---

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, 1, 1]$ jako řešení rovnice

$$z^3 - xyz + x^2 - y^2 = 0\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1, 1]$.

$$\left[T_2 = 1 - \tfrac{1}{2}\,(x-1) + \tfrac{3}{2}\,(y-1) - \tfrac{1}{8}\,(x-1)^2 + \tfrac{13}{4}\,(x-1)(y-1) - \tfrac{17}{8}\,(y-1)^2\right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu $[2, 1, -1]$ pomocí soustavy rovnic

$$x^2 + y^2 - z^2 = 4\,, \qquad x + yz = 1$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(2)$ a $z''(2)$.

$$\left[y'' = \tfrac{5}{4}\,, \quad z'' = -\tfrac{1}{4}\,; \quad y' = -\tfrac{1}{2}\,, \quad z' = -\tfrac{3}{2}\right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu $[1,1,1]$ pomocí soustavy rovnic

$$x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^z = 0\,, \qquad xy + xz + yz = 3$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

$$\Big[y'' = 1\,, \quad z'' = 0\,; \quad y' = -1\,, \quad z' = 0\Big]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu $[1,-1,1]$ pomocí soustavy rovnic

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1\,, \qquad x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz = 0$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

$$\Big[y'' = -7\,, \quad z'' = 3\,; \quad y' = 0\,, \quad z' = -1\Big]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu $[1,1,-1]$ pomocí soustavy rovnic

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3\,, \qquad x^2y + y^2z + xz^2 = 1$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

$$\Big[y'' = 3\,, \quad z'' = 9\,; \quad y' = 1\,, \quad z' = 2\Big]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu $[1,1,0]$ pomocí soustavy rovnic

$$z\mathrm{e}^{x^2-y^2} + (x^2 + y^2)\mathrm{e}^z = 2\,, \qquad xy + xz + yz = 1$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

$$\Big[y'' = -2\,, \quad z'' = 0\,; \quad y' = -1\,, \quad z' = 0\Big]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu $[1,1,1]$ pomocí soustavy rovnic

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6\,, \qquad xyz = 1$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

$$\Big[y'' = 30\,, \quad z'' = -24\,; \quad y' = -2\,, \quad z' = 1\Big]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu $[2,1,-1]$ pomocí soustavy rovnic

$$xy + xz + yz + 1 = 0\,, \qquad x^2 - y^2 + z^2 = 4$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(2)$ a $z''(2)$.

$$\Big[y'' = -\tfrac{15}{2}\,, \quad z'' = \tfrac{1}{2}\,; \quad y' = 3\,, \quad z' = -1\Big]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu $[1,-1,1]$ pomocí soustavy rovnic

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+1=0\,,\qquad x+y+z=1$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

$$\left[y''=-1\,,\quad z''=1\,;\quad y'=-2\,,\quad z'=1\right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu $[1,1,-1]$ pomocí soustavy rovnic

$$y=\mathrm{e}^{x+z}\,,\qquad xy=z^2$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

$$\left[y''=\tfrac{4}{27}\,,\quad z''=\tfrac{1}{27}\,;\quad y'=\tfrac{1}{3}\,,\quad z'=-\tfrac{2}{3}\right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu $[1,-1,2]$ pomocí soustavy rovnic

$$z^2-xy+yz+\sin(x+y)=3\,,\qquad xy+xz+yz+x-y=1$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

$$\left[y''=1\,,\quad z''=-\tfrac{4}{3}\,;\quad y'=-1\,,\quad z'=0\right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu $[1,2,0]$ pomocí soustavy rovnic

$$xy+xz+yz-2z=2\,,\qquad y^2+z^2-xy+\mathrm{e}^{xz}=3$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

$$\left[y''=-32\,,\quad z''=52\,;\quad y'=2\,,\quad z'=-4\right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu $[0,-1,1]$ pomocí soustavy rovnic

$$x^2+y^2+z^2+xy-xz=2\,,\qquad z^2+2xz+yz+y\sin xz=0$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(0)$ a $z''(0)$.

$$\left[y''=\tfrac{3}{2}\,,\quad z''=\tfrac{1}{2}\,;\quad y'=-1\,,\quad z'=0\right]$$

---

Nechť jsou v okolí bodu $[2,1,-1]$ pomocí soustavy rovnic

$$x^3+y^3+z^3+3xyz=2\,,\qquad x^2+y^2+z^2+3yz+xyz=1$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(2)$ a $z''(2)$.

$$\left[y''=1\,,\quad z''=\tfrac{1}{3}\,;\quad y'=0\,,\quad z'=-1\right]$$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x + y$ za podmínek $x^3 + y^3 = 3xy$, $x$, $y > 0$.

$\left[\text{v bodě } \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \text{ je lokální maximum.}\right]$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ za podmínky $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$.

$\left[\text{v bodě } [0, 0] \text{ je lokální minimum, v bodě } [2, -2] \text{ je lokální maximum.}\right]$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy$ za podmínky $x^2 + 5xy + 4y^2 = 18$.

$\left[\text{v bodech } [2, 1] \text{ a } [-2, -1] \text{ jsou lokální maxima.}\right]$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy$ za podmínky $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 1$.

$\left[\text{v bodě } [4, 6] \text{ je lokální minimum.}\right]$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz$ za podmínky $x + y + z = 3$.

$\left[\begin{array}{l}\text{v bodě } [1, 1, 1] \text{ je lokální maximum;} \\ \text{v bodech } [3, 0, 0],\ [0, 3, 0] \text{ a } [0, 0, 3] \text{ není lokální extrém.}\end{array}\right]$

---

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ za podmínky $xyz = 1$.

$\left[\text{v bodě } [1, 1, 1] \text{ je lokální minimum.}\right]$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ za podmínky $x^2 + xy + y^2 = 12$.

$\left[\begin{array}{l}\text{v bodech } \left[2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\right] \text{ a } \left[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right] \text{ jsou lokální maxima,} \\ \text{v bodech } [2, 2] \text{ a } [-2, -2] \text{ jsou lokální minima.}\end{array}\right]$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy^2z^3$ za podmínek $x + y + z = 1$, $x$, $y$, $z > 0$.

$\left[\text{v bodě } \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \text{ je lokální maximum.}\right]$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ za podmínky $x^2 + 5xy + 4y^2 = 18$.

$\left[\text{v bodech } [2, 1] \text{ a } [-2, -1] \text{ jsou lokální minima.}\right]$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 5xy + y^2$ za podmínky $x^2 + 2xy + 2y^2 = 10$.

$\left[\begin{array}{l}\text{v bodech } [2, 1] \text{ a } [-2, -1] \text{ jsou lokální maxima,} \\ \text{v bodech } [4, -3] \text{ a } [-4, 3] \text{ jsou lokální minima.}\end{array}\right]$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy$ za podmínky $x^2 - 3xy + y^2 = 20$.

$\left[\text{v bodech } [2,-2] \text{ a } [-2,2] \text{ jsou lokální minima.}\right]$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ za podmínky $x^2 - 4xy + y^2 = 6$.

$\left[\text{v bodech } [1,-1] \text{ a } [-1,1] \text{ jsou lokální minima.}\right]$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ za podmínky $x^2 - 3xy + y^2 = 20$.

$\left[\text{v bodech } [2,-2] \text{ a } [-2,2] \text{ jsou lokální minima.}\right]$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ za podmínky $x^2 + 4xy + y^2 + 8 = 0$.

$\left[\text{v bodech } [2,-2] \text{ a } [-2,2] \text{ jsou lokální minima.}\right]$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ za podmínky $x^2 + y^2 = 8$.

$\left[\begin{array}{l}\text{v bodech } [2,2] \text{ a } [-2,-2] \text{ jsou lokální minima,}\\ \text{v bodech } [2,-2,] \text{ a } [-2,2] \text{ jsou lokální maxima.}\end{array}\right]$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = 3xy - y^2$ za podmínky $x^2 + 2xy + 2y^2 = 10$.

$\left[\begin{array}{l}\text{v bodech } [2,1] \text{ a } [-2,-1] \text{ jsou lokální maxima,}\\ \text{v bodech } [4,-3] \text{ a } [-4,3] \text{ jsou lokální minima.}\end{array}\right]$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^2 - 3xy - 2y^2$ za podmínky $x^2 + y^2 = 40$.

$\left[\begin{array}{l}\text{v bodech } [2,6] \text{ a } [-2,-6] \text{ jsou lokální minima,}\\ \text{v bodech } [6,-2,] \text{ a } [-6,2] \text{ jsou lokální maxima.}\end{array}\right]$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy$ za podmínky $x^2 - 4xy + y^2 = 6$.

$\left[\text{v bodech } [1,-1] \text{ a } [-1,1] \text{ jsou lokální minima.}\right]$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy$ za podmínky $x^2 - 4xy + y^2 + 8 = 0$.

$\left[\text{v bodech } [2,2] \text{ a } [-2,-2] \text{ jsou lokální minima.}\right]$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ za podmínky $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 100$.

$\left[\text{v bodech } [6,-2] \text{ a } [-6,2] \text{ jsou lokální minima.}\right]$

---

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy$ za podmínky $x^2 + xy + 4y^2 = 30$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{v bodech } \left[2\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right] \text{ a } \left[-2\sqrt{5}, \sqrt{5}\right] \text{ jsou lokální minima,} \\ \text{v bodech } \left[2\sqrt{3}, \sqrt{3}\right] \text{ a } \left[-2\sqrt{3}, \sqrt{3}\right] \text{ jsou lokální maxima.}\end{array}\right]$$

---

Najděte lokální extrémy funkce $z = z(x, y)$, která je řešením rovnice

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0\,.$$

$$\left[\text{lokální minimum } z = 1 \text{ v bodě } [-2, 0, 1], \text{ lokální maximum } z = -\tfrac{8}{7} \text{ v bodě } \left[\tfrac{16}{7}, 0, -\tfrac{8}{7}\right].\right]$$

---

Najděte lokální extrémy funkce $z = z(x, y)$, která je řešením rovnice

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 4yz + 4x - z + 4 = 0\,.$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{lokální minimum } z = 1 \text{ v bodě } [-1, -1, 1], \\ \text{lokální maximum } z = -2 \text{ v bodě } \left[-1, 2, -2\right].\end{array}\right]$$

---

Najděte lokální extrémy funkce $z = z(x, y)$, která je řešením rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z + 2 = 0\,.$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{lokální minimum } z = 0 \text{ v bodě } [-1, -1, 0], \\ \text{lokální maximum } z = -8 \text{ v bodě } \left[-5, -5, -8\right].\end{array}\right]$$

---

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + y$ na množině $x^2 + y^2 \le 1$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{maximum } \tfrac{5}{4} \text{ v bodech } \left[\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right] \text{ a } \left[-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right], \\ \text{minimum } -1 \text{ v bodě } [0, -1].\end{array}\right]$$

---

Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = x + 2y$ na množině $x^2 + 4y^2 \le 8$.

$$\left[\text{maximum } 4 \text{ v bodě } [2, 1], \text{ minimum } -4 \text{ v bodě } [-2, -1].\right]$$

---

Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ na množině $x^2 + xy + y^2 \le 3$.

$$\left[\text{minimum } 0 \text{ v bodě } [0, 0], \text{ maximum } 6 \text{ v bodech } \left[\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right] \text{ a } \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right].\right]$$

---

Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ na množině

$$x^2 - 2x + 2y^2 + 4y \le 0\,.$$

$$\left[\text{minimum } 0 \text{ v bodě } [0, 0], \text{ maximum } 12 \text{ v bodě } [2, -2].\right]$$

---

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ na množině

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,.$$

$\Big[$maximum 3 v bodě $\left[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$, minimum $-3$ v bodě $\left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$.$\Big]$

---

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce$f(x,y,z) = x + y + z$ na množině

$$\tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{3}\,y^2 + \tfrac{1}{4}\,z^2 \leq 1\,.$$

$\Big[$maximum 3 v bodě $\left[\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right]$, minimum $-3$ v bodě $\left[-\frac{2}{3}, -1, -\frac{4}{3}\right]$.$\Big]$

---

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x,y,z) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + z^2$ na množině $x^2 + y^2 + z^2 \leq 50$.

$\Big[$minimum 0 v bodě $[0,0,0]$, maximum 200 v bodech $[5,-5,0]$ a $[-5,5,0]$.$\Big]$

---

Jaké rozměry musí mít krabice ve tvaru kvádru (bez víka), která má objem $V = 32\,\ell$ a nejmenší povrch? $\Big[$dno je čtverec se stranou 4 dm a výška je 2 dm.$\Big]$

---

Jaké rozměry má otevřená vana, která má průřez půlkruh a daný povrch stěn $S = 27\pi\,\mathrm{m}^2$ a která má největší objem? $\Big[$půlkruh má poloměr 3 m a délka vany je 3 m.$\Big]$

---

Najděte obdélník s obvodem 24 cm, který vytvoří rotací kolem jedné ze svých stran těleso s největším objemem.

$\Big[$obdélník rotuje kolem strany délky 4 cm a druhá strana má délku 8 cm.$\Big]$

---

Najděte poloosy elipsy $x^2 - 2xy + 3y^2 = 2$.

NÁVOD: Daná elipsa má střed v počátku souřadnic. Proto jsou poloosy rovny maximální a minimální vzdálenosti bodu elipsy od počátku souřadnic.

$\Big[$elipsa má poloosy $a = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ a $b = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.$\Big]$

---