# **Plošné integrály** s výsledky

Najděte obsah plochy $\mathcal{S}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = u\cos v\,, \quad y = u\sin v\,, \quad z = v\,, \qquad 0 < v < u < 1\,.$$

$$\left[\tfrac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\right]$$

---

Najděte obsah plochy $\mathcal{S}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = uv\,, \quad y = \tfrac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right), \quad z = \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2)\,, \qquad u^2 + v^2 \le 2\,, \quad u,\, v \ge 0\,.$$

$$\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi\right]$$

---

Najděte obsah plochy $\mathcal{S}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = 2r\cos^2\varphi\,, \quad y = r\sin^2\varphi\,, \quad z = r\,, \qquad 0 \le \varphi \le \tfrac{1}{2}\pi\,, \quad 0 < r < 1\,.$$

$$\left[\tfrac{3}{2}\right]$$

---

Najděte obsah plochy $\mathcal{S}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = \mathrm{e}^{-u}\cos v\,, \quad y = \mathrm{e}^{-u}\sin v\,, \quad z = \mathrm{e}^{-u}\,, \qquad 0 \le v \le \pi\,, \quad 0 < u < \infty\,.$$

$$\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi\right]$$

---

Najděte obsah části kulové plochy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25\,, \qquad z \ge 4\,.$$

$$\left[8\pi\right]$$

---

Najděte obsah části plochy $\mathcal{S}$, která je dána rovnicí $z = 4 + x^2 + xy - y^2$ a leží uvnitř válce $x^2 + y^2 \le 2$. $\left[\tfrac{2}{15}\,\pi\left(11\sqrt{11}-1\right)\right]$

---

Najděte obsah části plochy $\mathcal{S}$, která je dána rovnicí $z = x^2 + 2y^2$ a leží uvnitř eliptického válce $x^2 + 4y^2 \le 1$. $\left[\tfrac{1}{12}\,\pi\left(5\sqrt{5}-1\right)\right]$

---

Najděte obsah plochy $\mathcal{S}$, která je dána vztahy

$$z^2 = 4(x^2 + y^2)\,, \qquad 0 \le z \le 4\,.$$

$$\left[2\sqrt{5}\,\pi\right]$$

---

Najděte obsah plochy $\mathcal{S}$, která je dána vztahy

$$2x - 2y + z = 1\,, \qquad x^2 + y^2 + z \le 1\,.$$

$$\left[6\pi\right]$$

---

Najděte hmotnost kuželové plochy $\mathcal{S}$, která je daná vztahy

$$x^2 + y^2 = z^2\,, \qquad z > 0\,,$$

a jejíž hustota je $\rho(x, y, z) = \mathrm{e}^{-z^2}$. $\left[\sqrt{2}\,\pi\right]$

---

Najděte hmotnost plochy $\mathcal{S}$, která je daná parametrickými rovnicemi

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = \cosh r\,, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi\,, \quad 0 \le r \le 1$$

a jejíž hustota je $\rho(x, y, z) = \dfrac{1}{z}$. $\left[\pi\right]$

---

Najděte hmotnost plochy $\mathcal{S}$, která je daná parametrickými rovnicemi

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = \varphi\,, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi\,, \quad 0 \le r \le 1$$

a jejíž hustota je $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$. $\left[\frac{2}{3}\,\pi\big(2\sqrt{2} - 1\big)\right]$

---

Najděte hmotnost plochy $\mathcal{S}$, která je daná vztahy

$$z = \tfrac{1}{2}\,(x^2 + y^2)\,, \qquad z \le 2$$

a jejíž hustota je $\rho(x, y, z) = z$. $\left[\frac{2}{15}\,\pi\big(25\sqrt{5} + 1\big)\right]$

---

Najděte hmotnost plochy $\mathcal{S}$, která je daná vztahy

$$z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,, \qquad x^2 + y^2 \le 1\,, \qquad x \ge 0$$

a jejíž hustota je $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$. $\left[\frac{1}{3}\,\pi\big(2\sqrt{2} - 1\big)\right]$

---

Najděte hmotnost plochy $\mathcal{S}$, která je daná parametrickými rovnicemi

$$x = r^2\cos\varphi\,, \quad y = r^2\sin\varphi\,, \quad z = r\,, \qquad 0 \le \varphi \le \tfrac{1}{2}\,\pi\,, \quad 1 \le r \le 2$$

a jejíž hustota je $\rho(x,y,z) = \dfrac{1}{z}$. $\left[\frac{1}{24}\,\pi\big(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\big)\right]$

---

Najděte hmotnost plochy $\mathcal{S}$, která je daná rovnicemi

$$z^2 = x^2 - y^2\,, \quad y^2 + z^2 \le 2y\,, \qquad x,\, z \ge 0$$

a jejíž hustota je $\rho(x,y,z) = z$. $\left[\frac{2}{3}\,\sqrt{2}\right]$

---

Najděte souřadnici $z_T$ těžiště poloviny homogenní kulové plochy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, \qquad z \ge 0\,,$$

jestliže víte, že její obsah je $2\pi$. $\left[z_T = \frac{1}{2}\right]$

---

Najděte souřadnici $y_T$ těžiště homogenní plochy

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad x^2 + y^2 \le 2x\,, \qquad y \ge 0\,,$$

jestliže víte, že její obsah je $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi$. $\left[y_T = \frac{4}{3\pi}\right]$

---

Najděte souřadnici $z_T$ těžiště homogenní plochy

$$z = x^2 + y^2\,, \qquad 0 \le z \le 2\,,$$

jestliže víte, že její obsah je $\frac{13}{3}\,\pi$. $\left[z_T = \frac{74}{65}\right]$

---

Najděte souřadnici $x_T$ těžiště homogenní plochy

$$z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,, \qquad x^2 + y^2 \le 1\,, \qquad x > 0\,,$$

jestliže víte, že její obsah je $\frac{1}{2}\,\pi\big(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\big)$. $\left[x_T = \dfrac{4\big(2\sqrt{2} - 1\big)}{3\pi\big(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\big)}\right]$

---

Najděte souřadnici $z_T$ těžiště homogenního trojúhelníka s vrcholy v bodech $A = [2,0,0]$, $B = [0,3,0]$ a $C = [0,0,6]$, jestliže víte, že jeho obsah je $3\sqrt{14}$. $\left[z_T = 2\right]$

---

Najděte souřadnici $x_T$ těžiště homogenního trojúhelníka s vrcholy v bodech $A = [4,0,0]$, $B = [0,3,0]$ a $C = [0,0,2]$, jestliže víte, že jeho obsah je $\sqrt{61}$. $\left[x_T = \frac{4}{3}\right]$

---

Najděte souřadnici $x_T$ homogenní plochy $\mathcal{S}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = 2r\cos^2\varphi\,, \quad y = r\sin^2\varphi\,, \quad z = r\,, \qquad 0 \le \varphi \le \tfrac{1}{2}\pi\,, \quad 0 < r < 2\,,$$

když víte, že její obsah je roven 6. $\left[x_T = \frac{4}{3}\right]$

---

Najděte souřadnici $z_T$ homogenní plochy $\mathcal{S}$, která je dána rovnicemi

$$z^2 = x^2 - y^2\,, \quad y^2 + z^2 \le 2y\,, \qquad x,\, z \ge 0$$

když víte, že její obsah je roven $\frac{\sqrt{2}}{2}\,\pi$. $\left[z_T = \frac{4}{3\pi}\right]$

---

Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose $z$, tj. integrál $J_z = \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S$, plochy dané vztahy

$$z = xy\,, \qquad x^2 + y^2 \le 1\,, \quad x,\, y \ge 0\,.$$

$\left[J_z = \frac{1}{15}\,\pi\big(\sqrt{2} + 1\big)\right]$

---

Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose $z$, tj. integrál $J_z = \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S$, plochy dané vztahy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, \quad z \ge 0\,.$$

$\left[J_z = \frac{4}{3}\,\pi\right]$

---

Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose $z$, tj. integrál $J_z = \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S$, plochy dané vztahy

$$4z^2 = x^2 + y^2\,, \quad 0 \le z \le 2\,.$$

$\left[J_z = 16\sqrt{5}\,\pi\right]$

---

Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose $z$, tj. integrál $J_z = \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S$, plochy dané vztahy

$$x + 2y - 2z = 4\,, \qquad x \ge 0\,, \quad y \ge 0\,, \quad z \le 0\,.$$

$\left[J_z = 20\right]$

---

Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose $z$, tj. integrál $J_z = \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S$, plochy dané vztahy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25\,, \qquad z \ge 4\,.$$

$\left[J_z = \frac{28}{3}\,\pi\right]$

---

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$, kde $\mathcal{S}$ je plocha daná parametrickými rovnicemi

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = \varphi\,, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi\,, \quad 1 \le r \le 2\,,$$

která je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. $\left[3\pi\right]$

---

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$, kde $\mathcal{S}$ je plocha daná parametrickými rovnicemi

$$x = 2uv\,, \quad y = u^2 - v^2\,, \quad z = u^2 + v^2\,, \qquad u^2 + v^2 \le 1\,, \quad v \ge 0\,,$$

která je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. $\left[0\right]$

---

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S}$, kde $\mathbf{f} = (z, 0, x)$ a plocha $\mathcal{S}$ dána parametrickými rovnicemi

$$x = \frac{u^2}{v}\,, \quad y = \frac{v^2}{u}\,, \quad z = uv\,, \qquad 1 \le u \le 2\,, \quad 1 \le v \le 2$$

je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je záporná. $\left[\frac{45}{4} - 7\ln 2\right]$

---

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$, kde $\mathcal{S}$ je plocha daná parametrickými rovnicemi

$$x = \tfrac{1}{2}\,(u^2 + v^2)\,, \quad y = uv\,, \quad z = u + v\,, \qquad 0 \le u \le v \le 2\,,$$

která je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. $\left[-\frac{16}{15}\right]$

---

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$, kde $\mathcal{S}$ je plocha daná parametrickými rovnicemi

$$x = \frac{u}{v}\,, \quad y = \frac{v}{u}\,, \quad z = uv\,, \qquad 1 < u < 4\,, \quad 1 < v < 2\,,$$

která je orientovaná tak, že první složka vektoru její normály je kladná. $\left[20\right]$

---

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x)$, kde $\mathcal{S}$ je plocha

$$z = xy \qquad x,\, y > 0\,, \quad x + y \le 1\,,$$

která je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. $\left[-\frac{1}{12}\right]$

---

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$, kde $\mathcal{S}$ je trojúhelník s vrcholy v bodech $A = [3,0,0]$, $B = [0,2,0]$ a $C = [0,0,6]$ orientovaný tak, že třetí složka vektoru jeho normály je kladná. $\left[18\right]$

---

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$, kde $\mathcal{S}$ je plocha

$$z = x^2 + y^2 \qquad 0 \le z \le 4\,,$$

která je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. $\left[8\pi\right]$

---

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x)$, kde $\mathcal{S}$ je plocha

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad z \ge 0\,,$$

která je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. $\left[\frac{4}{3}\,\pi\right]$

---

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} \Big(x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)$, kde $\mathcal{S}$ je plocha

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad -1 \le z \le 2\,,$$

která je orientovaná tak, že v bodě $A = [1,0,0]$ je první složka vektoru její normály je kladná. $\left[0\right]$

---

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x)$, kde $\mathcal{S}$ je plocha

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad -1 \le z \le 2\,,$$

která je orientovaná tak, že v bodě $A = [1,0,0]$ je první složka vektoru její normály je záporná. $\left[-6\pi\right]$

---

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} \Big((x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (x+y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)$, kde $\mathcal{S}$ je plocha

$$z = x^2 + y^2 \qquad 0 \le z \le 1\,,$$

která je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. $\left[-\frac{1}{2}\,\pi\right]$

---

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\, \mathrm{d}\mathbf{S}$, kde $\mathbf{f} = (y, x, z)$ a plocha $\mathcal{S}$ popsána vztahy

$$z = 4 - x^2 - y^2\,, \qquad z \geq 0$$

je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je záporná. $\left[-8\pi\right]$

---

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\, \mathrm{d}\mathbf{S}$, kde $\mathbf{f} = (yz, xz, xy)$ a plocha $\mathcal{S}$ popsána vztahy

$$x^2 + y^2 = 4\,, \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq 13\,, \quad x,\, y,\, z \geq 0$$

je orientovaná tak, že první složka vektoru její normály je záporná. $\left[-6\right]$

---

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\, \mathrm{d}\mathbf{S}$, kde $\mathbf{f} = (x, y, z)$ a plocha $\mathcal{S}$ popsána vztahy

$$4(x^2 + y^2) = (1 - z)^2\,, \qquad 0 \leq z \leq 1$$

je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. $\left[\frac{1}{4}\,\pi\right]$

---

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\, \mathrm{d}\mathbf{S}$, kde $\mathbf{f} = (x, y, z)$ a plocha $\mathcal{S}$ popsána vztahy

$$z(x^2 + y^2) = 1\,, \qquad 1 \leq z \leq 4$$

je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. $\left[6\pi \ln 2\right]$

---

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru souřadných os $x$, $y$, resp. $z$. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ plochou $\mathcal{S}$, která je popsána parametrickými rovnicemi

$$\mathbf{x} = r\cos t\,\mathbf{i} + r\sin t\,\mathbf{j} + r^2\,\mathbf{k}\,, \qquad 0 < t < \pi\,, \quad 0 < r < 1\,,$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. $\left[\frac{1}{3}\,\pi\right]$

---

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru souřadných os $x$, $y$, resp. $z$. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou $\mathcal{S}$, která je popsána parametrickými rovnicemi

$$x = r\cos^2 t\,, \quad y = r\sin^2 t\,, \quad z = r^2\,, \qquad 0 \leq r \leq 1\,, \quad 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2}\,\pi$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. $\left[-\frac{1}{4}\right]$

---

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru souřadných os $x$, $y$, resp. $z$. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{k}$ plochou $\mathcal{S}$, která je dána vztahy

$$x^2 + y^2 = 4\,, \qquad 0 \leq z \leq 3\,, \quad x,\, y > 0\,,$$

a je orientována tak, že první složka vektoru její normály je záporná. $\left[-\frac{3}{2}\right]$

---

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru souřadných os $x$, $y$, resp. $z$. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou $\mathcal{S}$, která je dána vztahy

$$z = x^2 + y^2\,, \qquad z \leq 4$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. $\left[8\pi\right]$

---

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru souřadných os $x$, $y$, resp. $z$. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou $\mathcal{S}$, která je dána vztahy

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad x,\, y,\, z \geq 0$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. $\left[\frac{1}{12}\,\pi\right]$

---

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru souřadných os $x$, $y$, resp. $z$. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou $\mathcal{S}$, která je dána vztahy

$$x^2 + 4y^2 = z^2\,, \qquad 0 \leq z \leq 2$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je záporná. $\left[0\right]$

---

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru souřadných os $x$, $y$, resp. $z$. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou $\mathcal{S}$, která je dána vztahy

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad 0 \leq z \leq 1$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. $\left[\pi\right]$

---

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru souřadných os $x$, $y$, resp. $z$. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ plochou $\mathcal{S}$, která je dána vztahy

$$z^2 = 4x^2 + y^2\,, \qquad 0 \leq z \leq 2$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je záporná. $\left[\frac{8}{3}\,\pi\right]$

---

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru souřadných os $x$, $y$, resp. $z$. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou $\mathcal{S}$, která je dána vztahy

$$x + y = z^2\,, \qquad y,\, z \geq 0\,, \qquad y + z \leq 2$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. $\left[\frac{4}{3}\right]$

Nechť jsou **i**, **j**, resp. **k** jednotkové vektory ve směru souřadných os $x$, $y$, resp. $z$. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou $\mathcal{S}$, která je popsána rovnicemi

$$z = 1 - x^2 - y^2\,, \qquad z \geq 0$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. $\left[\frac{1}{2}\,\pi\right]$

---

Nechť jsou **i**, **j**, resp. **k** jednotkové vektory ve směru souřadných os $x$, $y$, resp. $z$. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ částí roviny, které prochází body $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, 2, 0]$ a $C = [0, 0, 3]$, leží v prvním oktantu, tj. $x$, $y$, $z \geq 0$ a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. $\left[3\right]$

---

Spočítejte plošný integrál $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S}$, kde

$$\mathbf{f} = \left(x^2 + xy + y^2, y^2 + yz + z^2, x^2 + xz + z^2\right)$$

a plocha $\mathcal{S}$ je kladně orientovaná hranice čtyřstěnu

$$x \geq 0\,, \qquad y \geq 0\,, \qquad z \geq 0\,, \qquad x + y + z \leq 1\,.$$

$\left[\frac{3}{8}\right]$

---

Najděte plošný integrál

$$\iint_{\mathcal{S}} \Big( (x^2 + yz)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y^2 + xz)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z^2 + xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \Big),$$

kde $\mathcal{S}$ je kladně orientovaná hranice polokoule

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,, \qquad z \geq 0\,.$$

$\left[\frac{1}{2}\,\pi\right]$

---

Nechť jsou **i**, **j**, resp. **k** jednotkové vektory ve směru souřadných os $x$, $y$, resp. $z$. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ kladně orientovaným povrchem válce

$$x^2 + y^2 \leq 4\,, \qquad 0 \leq z \leq 1\,.$$

$\left[2\pi\right]$

---

Nechť jsou **i**, **j**, resp. **k** jednotkové vektory ve směru souřadných os $x$, $y$, resp. $z$. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ povrchem tělesa

$$x^2 + y^2 \leq z^2\,, \qquad 0 \leq z \leq 1\,,$$

který je orientován tak, že vektor normály na ploše $z = 1$ má zápornou třetí složku.

$\left[\frac{1}{4}\,\pi\right]$