

# TEORIE CHYB

Linda Mashehová

2. ledna 2007

# Osnova

- 1 Chyby měření a nejistoty
  - Chyby měření
  - Nejistoty měření

# Osnova

- 1 Chyby měření a nejistoty
  - Chyby měření
  - Nejistoty měření
- 2 Testy systematických chyb
  - Test znaménkový
  - Test znamének v uspořádané řadě

# Osnova

- 1 Chyby měření a nejistoty
  - Chyby měření
  - Nejistoty měření
- 2 Testy systematických chyb
  - Test znaménkový
  - Test znamének v uspořádané řadě
- 3 Zákony hromadění chyb

# Osnova

- 1 Chyby měření a nejistoty
  - Chyby měření
  - Nejistoty měření
- 2 Testy systematických chyb
  - Test znaménkový
  - Test znamének v uspořádané řadě
- 3 Zákony hromadění chyb
- 4 Vyrovnání

# Teorie chyb

Teorie chyb je založena na počtu pravděpodobnosti a umožňuje

## Teorie chyb

- Poznat vlastnosti měřických chyb a zákony, jimiž se řídí
- Definovat charakteristiky přesnosti měření
- Stanovit nejvyšší přípustné chyby
- Zjistit přítomnost systematických chyb

# Chyby měření

Skutečnou hodnotu měřené veličiny nelze měřením zjistit!

Důvody:

- nedokonalost metod měření, přístrojů, smyslů
- nemožnost registrace a kontroly všech podmínek

Výsledkem měření je tedy hodnota, která se od skutečné nějakým způsobem liší.

## Úplná chyba $\kappa(x)$

- rozdíl skutečné hodnoty a hodnoty naměřené
- nelze ji přesně stanovit

# Úplná chyba

## Absolutní úplná chyba

- charakterizuje absolutní odchylku naměřené hodnoty od skutečné
- vyjadřuje se ve stejných jednotkách jako měřená veličina

Někdy se velikost chyby vztahuje k hodnotě měřené veličiny:

## Relativní úplná chyba

$$\kappa_r(X) = \frac{\kappa(X)}{X}$$



# Omyl

- není způsoben objektivními podmínkami měření, vzniká nepozorností měřiče, nesprávnou manipulací s přístrojem, mylným zápisem naměřené hodnoty. . .
- nepatří mezi nevyhnutelné chyby,
- omyl se z výsledků měření vyloučí (nahradí se jiným měřením).

# Hrubé chyby

- vznikají vlivem nepříznivých podmínek při měření — nepříznivé okolnosti způsobí příliš velkou chybu a výsledek nápadně vybočuje z řady měření,
- nepatří do základního souboru nevyhnutelných chyb,
- tento výsledek je nutno vyloučit.

Pro každý přístroj a metodu je určena přesnost měřického úkonu — chyby v mezích této přesnosti jsou nevyhnutelné, mimo tyto meze se považují za omyly nebo hrubé chyby.

- omylům a hrubým chybám se předchází kontrolním měřeními nebo se měří nadbytečné veličiny

# Náhodné chyby

- při stejné měřené veličině, metodě i podmínkách mohou náhodně nabývat různé velikosti i znaménka,
- možné hodnoty oscilují kolem nuly a jejich střední hodnota je rovna nule,
- vyskytují se při každém měření, jednotlivě nepodléhají žádným zákonitostem,
- při větším množství měření stejného druhu stejné zákonitosti jako u náhodných jevů,
- vznikají náhodnou kombinací většího počtu elementárních chyb.

# Náhodné chyby

**Nejpravděpodobnější hodnotou je aritmetický průměr.**

Mírou rozptylu je směrodatná odchylka

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

# Systematické chyby

- obvykle souvisí s použitou metodou, měřicími přístroji či pozorovatelem
- jsou způsobeny kontrolovatelnými vlivy
- v principu je možné je vyloučit, v praxi je to ovšem neproveditelné

## Zdroje systematických chyb

### a) omezená přesnost přístrojů

- lze je podstatně zmenšit použitím lepších zařízení,
- výrobce může udávat největší přípustnou chybu

### b) použitá metoda

- lze je potlačit změnou metody nebo vyloučením chyby výpočtem

### c) osobní chyby

- lze je vyloučit nahrazením subjektivního měření objektivním

# Systematické chyby

## Systematická chyba stálá

- při každém měření má stejné znaménko i velikost, nelze ji tedy poznat při opakovaném měření téže veličiny



# Systematické chyby

## Systematická chyba proměnlivá

- souvisí s proměnlivou podmínkou měření,
- může nabývat náhodně různých možných hodnot,

## Systematická chyba jednostranná

- mění svoji hodnotu od měření k měření, je ale stále stejného znaménka

# Systematické chyby

## Systematická chyba postupná

- plynule mění svoji hodnotu v průběhu měření.

## Systematická chyba periodická

- průběh možných hodnot dává např. sinusoidu

# Nejistoty měření

- charakterizují rozsah hodnot měřené veličiny kolem výsledku měření,
- základem určení je statistický přístup,
- základní charakteristikou je **standardní nejistota**,
- podle zdrojů se dělí na typ **A** a typ **B**.

# Nejistoty měření

## Standardní nejistoty typu A ( $u_A$ )

- způsobovány náhodnými vlivy,
- stanoví se z opakovaných měření,
- zmenšují se s rostoucím počtem měření.

## Standardní nejistoty typu B ( $u_B$ )

- způsobovány známými a odhadnutelnými příčinami,
- určení vychází z odhadu systematických chyb,
- pochází z různých zdrojů — výsledná  $u_B$ :

$$u_{B_{celk}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_{B_i}^2}$$

# Kombinovaná standardní nejistota

- udává interval či rozsah hodnot, ve kterém se s poměrně velkou pravděpodobností může vyskytovat skutečná hodnota,
- nejistoty typu **A** i **B** je možné skládat:

$$u^2 = u_{A_{celk}}^2 + u_{B_{celk}}^2$$

## Znaménkový test

- v základním souboru ( $n \rightarrow \infty$ ) je stejný počet chyb kladných a záporných
- ve výběru o rozsahu  $n$  nutno připustit všechny možné počty kladných chyb:  $k = 0, 1, \dots, n$
- největší pravděpodobnost má počet  $E(k) = \frac{n}{2}$  kladných chyb.

Střední odchylka od nejpravděpodobnějšího počtu chyb

$$\sqrt{npq} = \sqrt{E \left( k - \frac{n}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{n},$$

střední rozdíl mezi počtem  $k$  kladných chyb a  $(n - k)$  záporných chyb bude  $\sqrt{n}$ .

## Znaménkový test

Je-li absolutní rozdíl počtu kladných a záporných chyb větší než  $\sqrt{n}$ , lze usuzovat na vliv systematické chyby. Překročí-li  $2\sqrt{n}$ , jsme o tom prakticky přesvědčeni.

$$R = |2k - n|; \quad P(R > t_\alpha \sqrt{n}) = \alpha$$

Testuje se tedy nulová hypotéza  $H_0 : E(\epsilon) = 0$  (systematická chyba neexistuje).

Při  $R > 2\sqrt{n}$  hypotézu zamítáme.

# Znaménkový test

## Výhoda

- ze souboru chyb je pro dostatečně velké  $n$  na první pohled zřejmé, že některé ze znamének převládá.

## Nevýhoda

- nepřihlíží se k velikosti chyb
- nehodí se pro malé soubory



## Test znamének v uspořádané řadě

Předpokládá-li se, že při měření působil systematicky určitý vliv, uspořádají se výsledky (chyby) podle tohoto faktoru a zjistí se počet sledů  $f$  a počet změn  $\omega$ .

Pro

$$|f - \omega| > \sqrt{n - 1}$$

se předpokládá, že při měření působil systematicky ten faktor, podle kterého byly výsledky uspořádány.

## Zákon hromadění skutečných chyb

Je-li zadán konkrétní funkční vztah mezi proměnnými

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a jsou-li splněny tyto předpoklady:

- $f$  má spojité parciální derivace podle všech,
- skutečné chyby proměnných jsou relativně malé, pak platí:

$$\epsilon_y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \epsilon_{x_i}$$

## Příklad

Jak se změní plocha obdélníka ( $a = 25$  m,  $b = 15$  m), když zvětšíme každou stranu o 5 cm?

**Řešení:**

$$P = ab, \epsilon_a = \epsilon_b = +5 \text{ cm}$$

$$\epsilon_P = \frac{\partial P}{\partial a} \epsilon_a + \frac{\partial P}{\partial b} \epsilon_b = b \epsilon_a + a \epsilon_b = 15 \cdot 0,05 + 25 \cdot 0,05 = +2,0 \text{ m}^2$$

Plocha pozemku se zvětší o 2,0 m<sup>2</sup>.

## Zákon hromadění středních chyb

Vyjadřuje vztah mezi středními chybami proměnných zadané funkce.

c) proměnné  $x_i$  jsou vzájemně nezávislé,

d) pro skutečné chyby všech proměnných platí  $E(\epsilon_{x_i}) = 0$

$$\overline{m}_y^2 \doteq \sum_n^{i=1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \overline{m}_{x_i}^2 \right)^2$$

# Vyrovnání



Úkolem je

- vypočítat nejspolehlivější odhad *neznámých hodnot* měřených veličin
- z rozporů mezi výsledky odhadnout *přesnost* metody měření
- uspořádat výpočty tak, aby byl umožněn mechanický výpočet

## Způsoby vyrovnání

- vyrovnání měření přímých — jediná neznámá veličina měřena vícekrát
- vyrovnání měření zprostředkujících — nepřímé měření
- vyrovnání měření podmínkových — veličiny se měří přímo, ale současně musí splňovat nějakou podmínku

# Literatura I

-  J. Böhm, V. Radouch, M. Hampacher  
*Teorie chyb a vyrovnávací počet.*  
GKP Praha, 1990.
-  R. Novák, D. Nováková  
*Základy měření a zpracování dat*  
ČVUT, 1999.