

2 HRA V EXPLICITNÍM TVARU

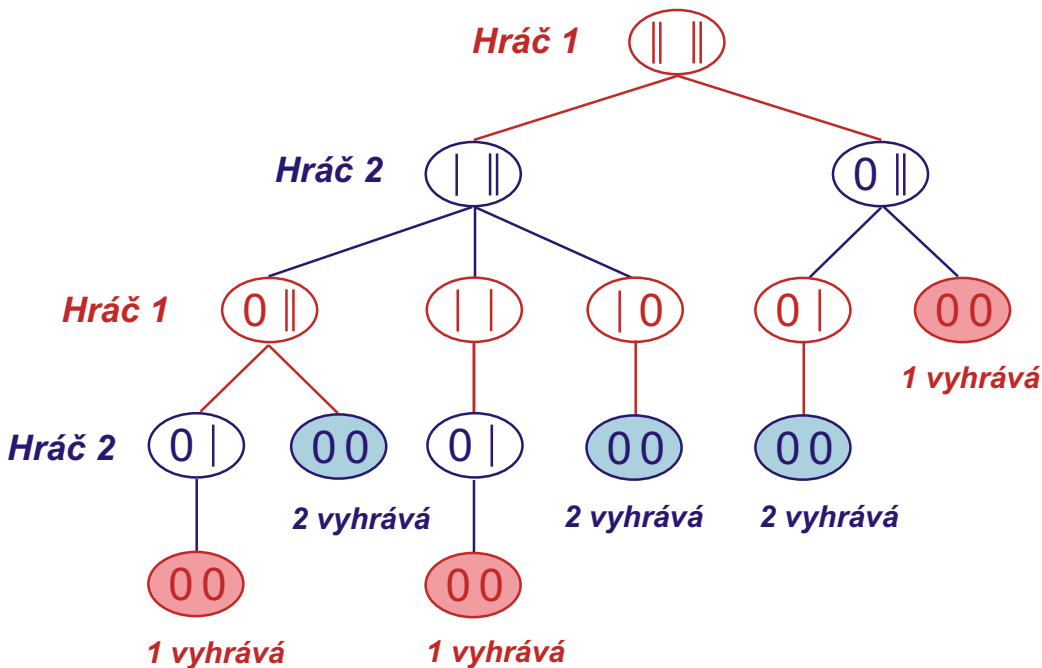


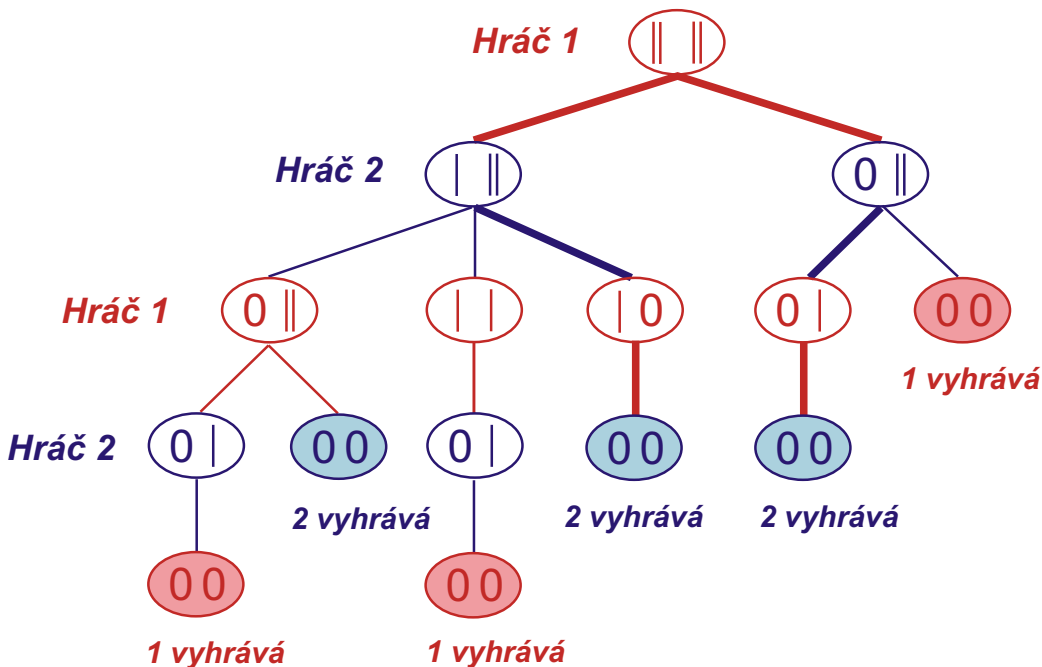
➡ **Příklad 1** – Hra Nim.

Uvažujme jednoduchou hru, kdy dva hráči – označme je čísly 1, 2 – mají před sebou dvě hromádky, z nichž každá je tvořena dvěma fazolemi. Hráč 1 musí vzít z jedné hromádky jednu nebo dvě fazole, fazole se nevracejí zpět. Potom je na řadě hráč 2, který také musí vzít z jedné hromádky jednu nebo dvě fazole. Takto se hráči střídají, až jeden z nich vezme poslední fazoli – a ten prohrává.

Pokud byste si mohli vybrat, zda budete začínat, či budete-li hráčem 2, pro co byste se rozhodli?

Všechny možné situace, které ve hře mohou nastat, lze znázornit pomocí **stromu hry**:





Ze stromu hry je patrné, že ať zvolí první hráč jakoukoli strategii, druhý může zvolit takovou strategii, která jej dovede k vítězství.

HRA V EXPLICITNÍM TVARU

Matematický model rozhodovací situace, v níž rozhodnutí jednotlivých hráčů probíhá ve formě postupně prováděných tahů (etap)

Strom hry . . . zachycuje všechny situace, které ve hře mohou nastat. Každé situaci odpovídá jeden **uzel**, z každého uzlu vychází určitý počet **hran** odpovídajících možným rozhodnutím, tzv. **tahům** daného hráče. Jestliže se hráč, který je na řadě, rozhodne pro nějaký tah, navodí novou situaci, v níž se rozhoduje druhý hráč – této nové situaci opět odpovídá jistý uzel stromu spojený s předchozím hranou. Při znázorňování se většinou postupuje ve směru shora dolů (popř. zleva doprava) a pravidelně se střídají uzly, v nichž se rozhoduje první hráč, a uzly, v nichž se rozhoduje druhý hráč.

Hra = soubor pravidel

Partie hry = jedna realizace hry

Právě jeden uzel má tu vlastnost, že do něj nevchází žádná hrana; takový uzel se nazývá **počáteční uzel** nebo také **kořen** stromu. Dále jsou zde uzly, z nichž žádná hrana nevychází; tyto uzly se nazývají **koncové** a odpovídají pozicím, kdy je rozhodnuto o výsledku a hra končí.

☞ **Příklad 2** – Hra Nim – obměna

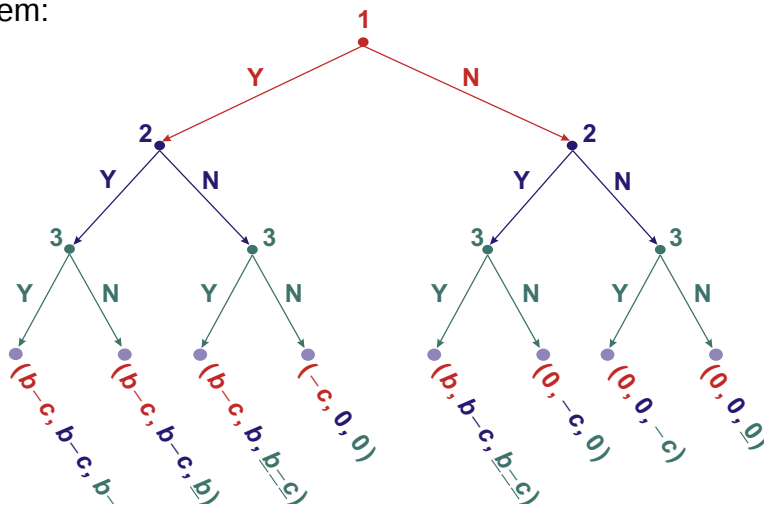
Ve hře Nim místo dvou hromádek uvažujme tři hromádky po dvou fazolích, pravidla jsou jinak stejná. Který hráč má nyní zaručenou výhru?

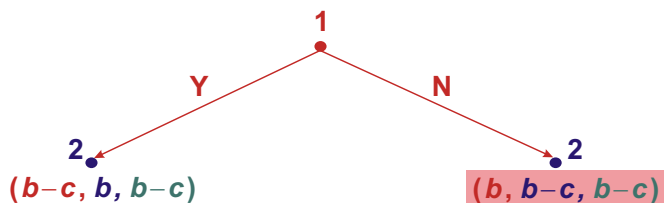
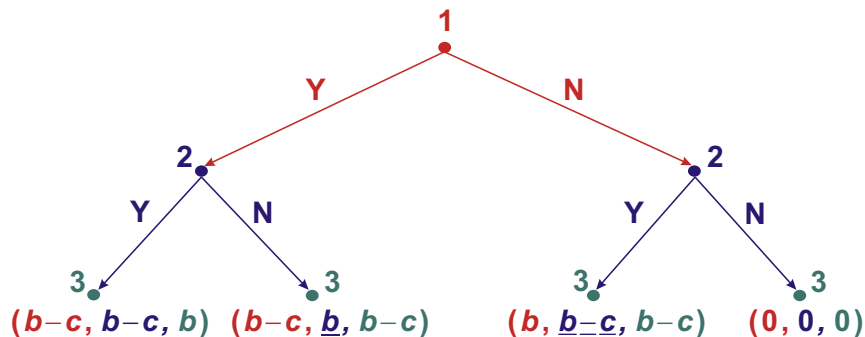
Řešení. Návod: První hráč může na začátku odebrat jednu hromádku a tím postavil protihráče do pozice hráče č. 1 v předchozí variantě se dvěma hromádkami.

➡ Příklad 3 – Hlasování o platech

Tři zákonodárci hlasují o tom, zda mají zvýšit své platy. Všichni tři si zvýšení přejí, zároveň však každého z nich v případě hlasování "pro" čeká ztráta u voličů v hodnotě c . Prospěch ze zvýšení b převyšuje ztrátu c , $b > c$. Hlasují-li postupně a otevřeně, je lepší volit jako první nebo jako poslední? Kdo volí jako poslední, vidí, jaká je situace a může případně rozhodnout o tom, zda zvýšení projde či nikoli. Je to tedy nejvýhodnější?

Řešení. Návod: Situaci si můžeme znázornit následujícím obrázkem:





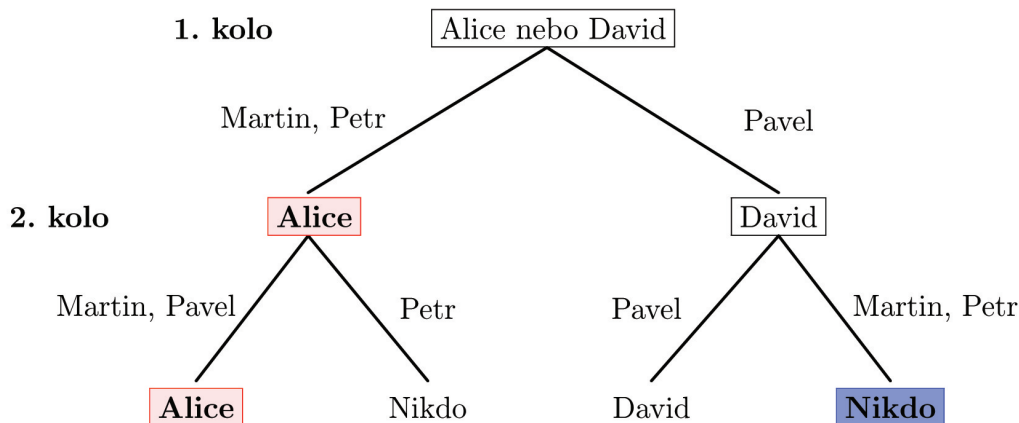
Zpětná indukce: na základě předvídání budoucího vývoje jsou vybírány nejvhodnější alternativy na začátku rozhodování

➡ **Příklad 4** – Dvoukolová volba do výboru

Martin, Petr a Pavel jsou členy výboru velmi exkluzivní Společnosti burzovních makléřů. Závěrečným bodem jednoho jejich dopoledního jednání je návrh, aby Alice byla přijata za nového člena. V návrhu chyběla zmínka o jiném možném kandidátovi, Davidovi, a tak se objevil pozměňovací návrh, aby Alice byla nahrazena Davidem. Podle jednacích pravidel je třeba hlasovat nejprve o pozměňovacím návrhu, tj. má-li David nahradit Alici. Potom se hlasuje o tom, zda bude vítěz přijat, či zda nebude přijat nikdo. Preference jednotlivých členů výboru jsou následující:

Pořadí	Martin	Petr	Pavel
1.	Alice	Nikdo	David
2.	Nikdo	Alice	Alice
3.	David	David	Nikdo

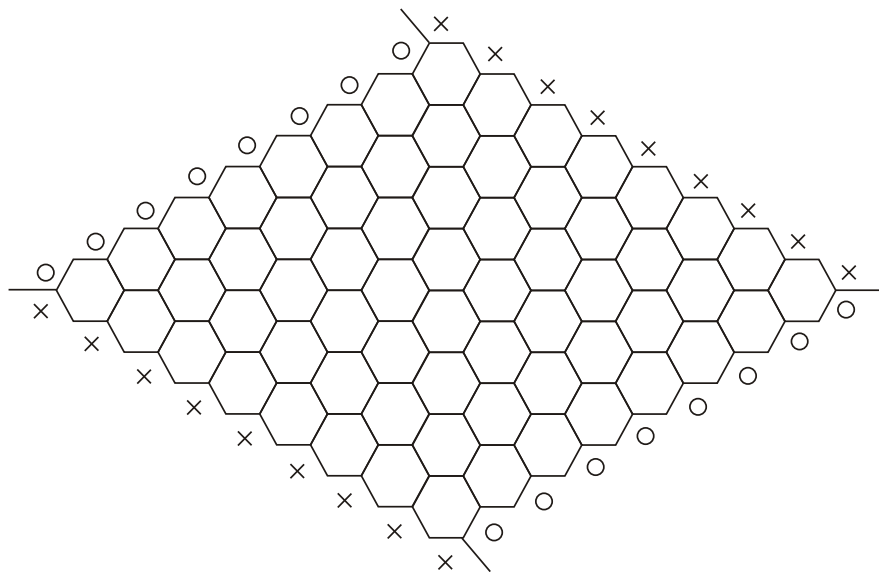
Pokud by všichni volili v obou kolech pouze podle svých preferencí, pak by volby proběhly takto: Při volbě mezi Alicí a Davidem by zvítězila Alice, protože jak Martin, tak Petr ji upřednostňují před Davidem – Pavel by tak byl přehlasován. V druhém kole by Alice získala hlasy od Martina a Pavla, neboť je v žebříčku jejich hodnot výše než „nikdo“, a stala by se tak vítězem voleb.



Bude-li však Petr prozíravý, zvolí v prvním kole Davida, protože vidí, že v druhém kole v tom případě zvítězí varianta „nikdo“, což je pro něj ta nejvítanější možnost. Pavel by ovšem mohl předvídat, že Petr bude tímto způsobem taktizovat, a mohl by rovněž volit strategicky: v prvním kole by místo Davida zvolil Alici, která by pak zvítězila, což Pavel preferuje více než variantu „nikdo“. Jinými slovy, z obrázku či ze zpětné indukce je patrné, že první kolo je v podstatě rozhodování mezi Alicí a nikým, kteří by zvítězili v druhém kole v jednotlivých případech. Protože Alice je před nikým preferována u Martina a Pavla, zvítězí.

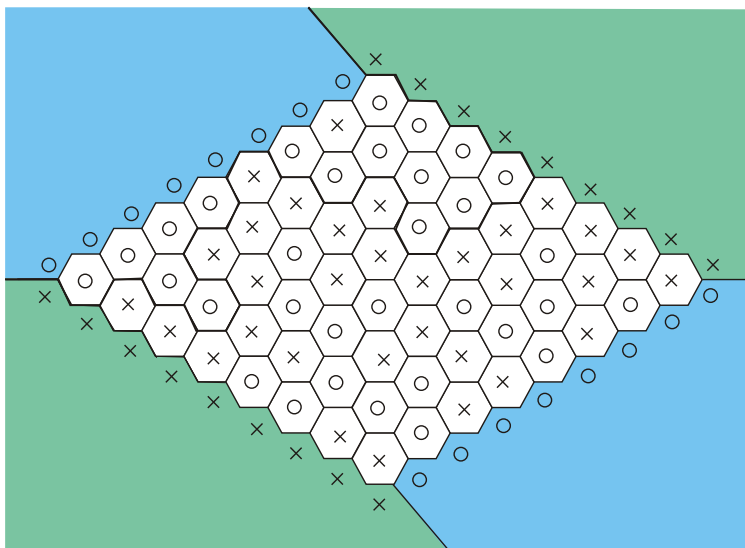
➡ Příklad 5 – Hra Hex

Hra Hex se hraje na desce sestávající z n^2 šestiúhelníků uspořádaných do rovnoběžníka:

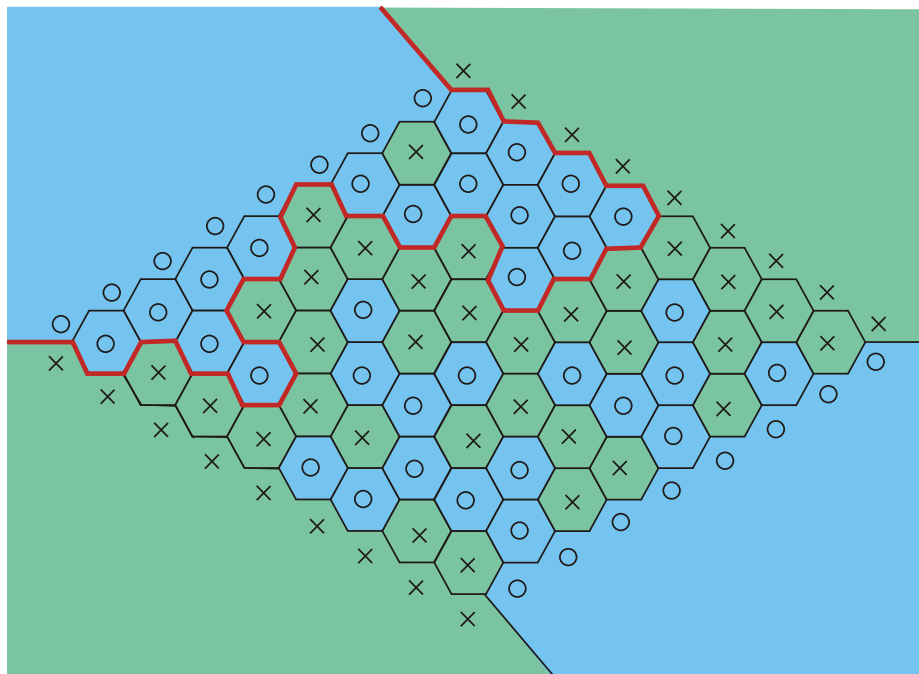


Hráči se střídají jeden po druhém. V každém tahu hráč označí volný šestiúhelník svým symbolem: hráč I kroužkem, hráč II křížkem. Označený šestiúhelník se stane „zabraným územím“ toho hráče, který jej označil. Na začátku sestávají teritoria obou hráčů vždy ze dvou protilehlých stran desky. Vítězem je ten, kdo jako první spojí své strany desky souvislým řetězem šestiúhelníků označenými vlastním symbolem.

Například na následujícím obrázku je vítězem hráč II:



Například na následujícím obrázku je vítězem hráč II:



Lze dokázat:

➤ **Hex nemůže skončit remízou**

Je-li každý hexagon označen kroužkem nebo křížkem, pak lze dokázat, že jedna z dvojice protějších stran musí být spojena.

➤ **Hráč I má vítěznou strategii (ale není známo jakou)**

Z Zermelovy věty lze vyvodit, že jeden z hráčů má vítěznou strategii, sporem pak dokážeme, že to nemůže být hráč II.

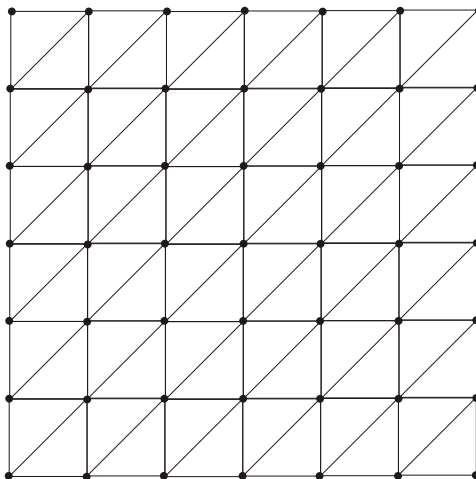
Věta (Zermelo). Nechť T je libovolná množina výsledků v konečné hře dvou hráčů s úplnou informací, bez náhodných tahů. Pak buď hráč I může zajistit výsledek z množiny T nebo hráč II může zajistit výsledek z doplňku $\sim T$.

➡ Příklad 6 – Gangsteři ve městě

Herní deska představuje síť ulic v centru města. Hráči I, resp. II představuje gangsterský gang. Hráč I má pod kontrolou oblasti na severu a na jihu města, hráč II na východě a na západě. Uzly v plánu znázorňují křižovatky. Hráči se střídají v označování uzlů, které dosud nebyly označeny. Hráč I používá kroužky, hráč II křížky. Hráč, kterému se podaří označit oba konce ulice, má tuto ulici pod kontrolou. Hráč I vítězí, spojí-li sever a jih cestou, kterou má pod kontrolou.

Podobně hráč II vítězí, spojí-li východ a západ.

Ukažte, že hra je ekvivalentní s hrou Hex.



➡ **Příklad 7. Sofistikovaná volba v soudních systémech**

Uvažujme tři právní systémy, v nichž vždy rozhodují tři soudci:

1. Status quo (používaný např. v USA):

Nejprve se rozhoduje o vině či nevině obžalovaného, v případě viny se dále rozhoduje o trestu.

2. Římská tradice:

Po předložení důkazů se začne s hlasováním sestupně od nej přísnějšího trestu k nejmírnějšímu, popř. k propuštění (např. zda uložit trest smrti; pokud ne, zda doživotí, atd.).

3. Mandatorní soud:

Nejprve se určí trest pro daný zločin, pak se určí, zda má být obžalovaný uznán vinným.

Uvažujme pro jednoduchost tři možné výsledky, trest smrti, doživotní vězení, propuštění, a následující preference jednotlivých soudců:

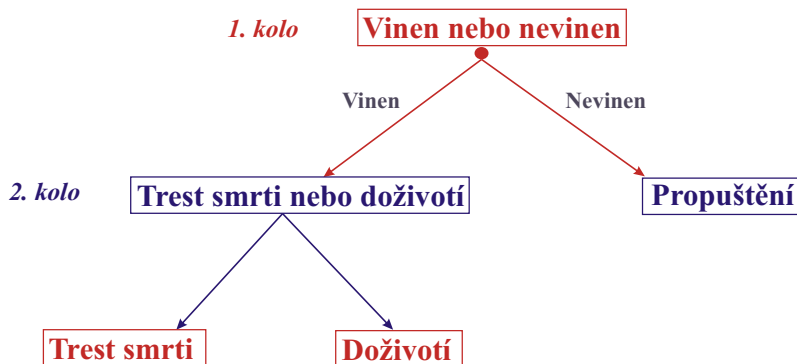
Pořadí	Soudce A	Soudce B	Soudce C
1.	trest smrti	doživotí	propuštění
2.	doživotí	propuštění	trest smrti
3.	propuštění	trest smrti	doživotí

1. Status quo

V prvním kole se hlasuje o vině či nevině; při upřímném hlasování by zvítězilo „vinen“ (soudci A, B), v druhém kole, při rozhodování mezi trestem smrti a doživotím, by zvítězil trest smrti (soudci A, C). První kolo je tedy v podstatě hlasováním mezi propuštěním a trestem smrti – při sofistikované volbě, tedy budou-li soudci uvažovat racionálně a budou předvídat, co se stane v druhém kole, proto v prvním kole zvítězí **propuštění** (kromě soudce C dá v prvním kole hlas propuštění i B , neboť v opačném případě by druhé kolo vedlo k jeho nejméně preferované variantě).

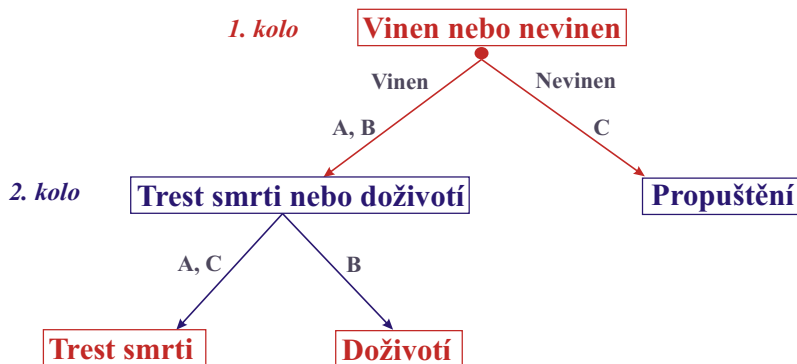
1. Status Quo:

Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#



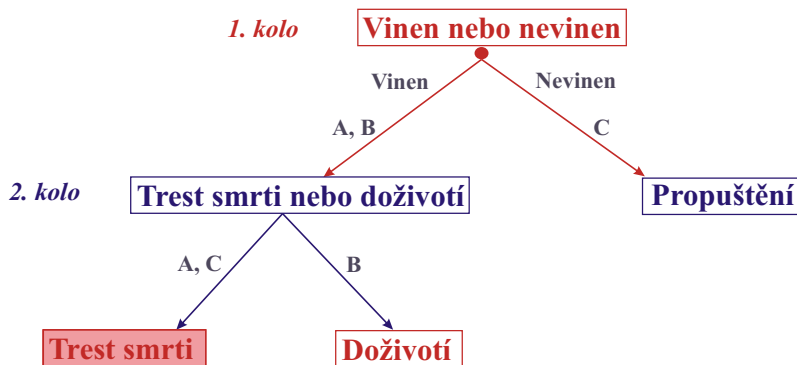
1. Status Quo:

Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#



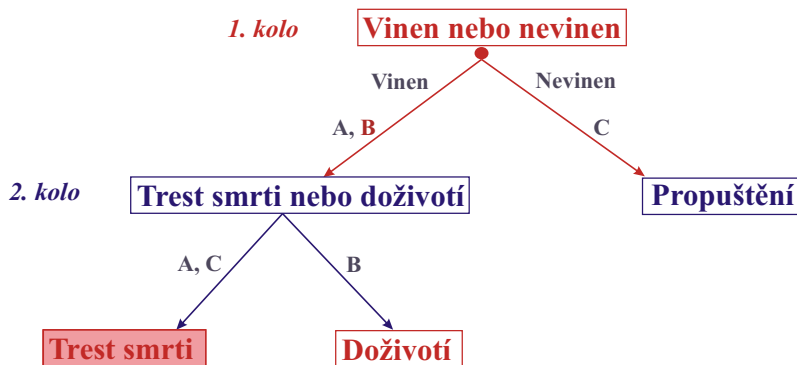
1. Status Quo:

Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#



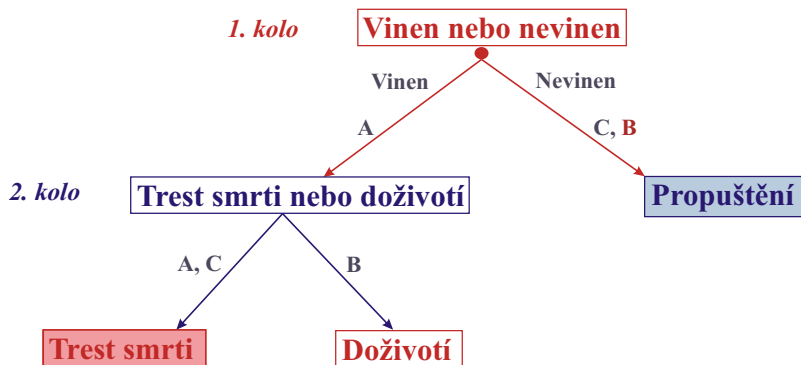
1. Status Quo:

Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#



1. Status Quo:

Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#



2. Římská tradice

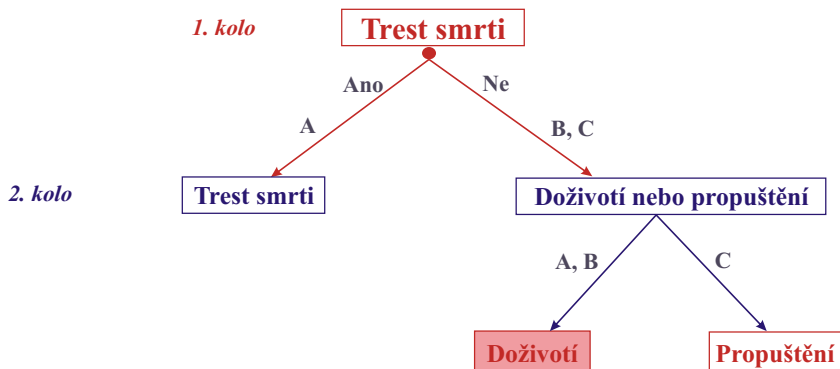
V prvním kole se hlasuje o nejpřísnějším trestu, tj. zda uložit trest smrti či nikoli. Pokud ano, je trest vykonán, pokud ne, nastane druhé kolo, v němž se bude hlasovat, zda doživotí či propuštění.

Protože v druhém kole by zvítězilo doživotí (soudci A, B), je první kolo v podstatě hlasováním mezi trestem smrti a doživotím – při sofistikované volbě proto v prvním kole zvítězí **trest smrti** (kromě soudce A dá v prvním kole hlas trestu smrti i C, neboť v opačném případě by druhé kolo vedlo k jeho nejméně preferované variantě).

2. Římská tradice:

Upřímná volba:

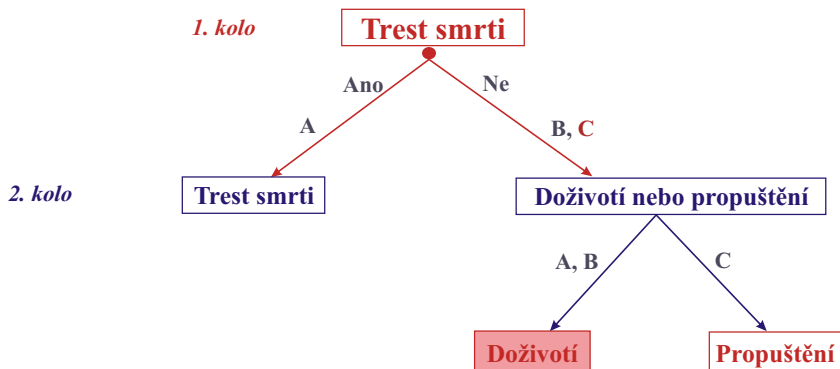
Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#



2. Římská tradice:

Sofistikovaná volba:

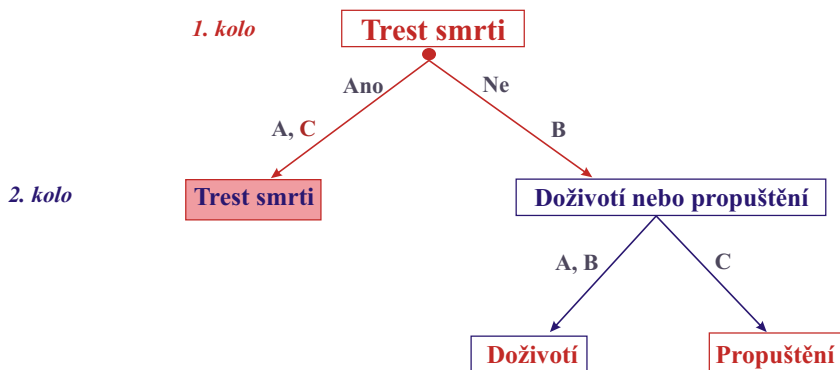
Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#



2. Římská tradice:

Sofistikovaná volba:

Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#



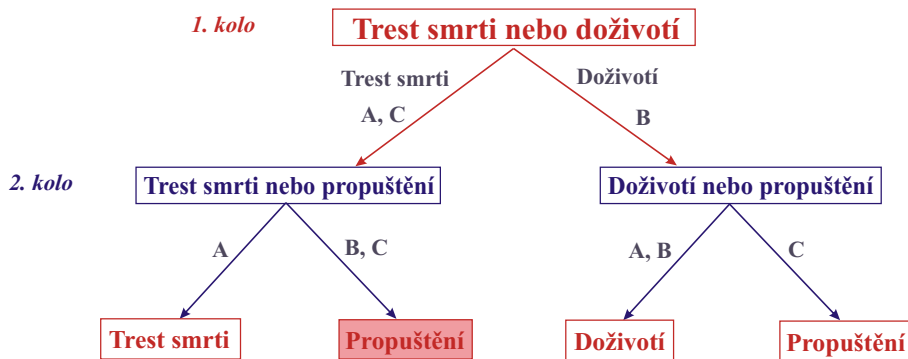
3. Mandatorní systém

V prvním kole se hlasuje o trestu za daný zločin, tj. zda uložit trest smrti či doživotí. V druhém kole se pak hlasuje o tom, zda daný trest uložit či nikoli (tj. propustit). Při rozhodování mezi trestem smrti a propuštěním by zvítězilo propuštění (B, C), při rozhodování mezi doživotím a propuštěním by zvítězilo doživotí (A, B). První kolo je tedy rozhodováním mezi propuštěním a doživotím, takže vězeň bude odsouzen na doživotí (A dá v prvním kole hlas raději doživotí, než aby byl propuštěn).

3. Mandatorní systém:

Upřímná volba:

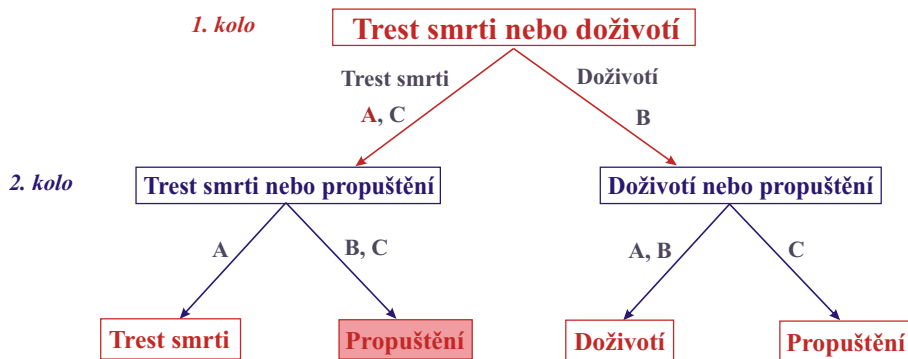
Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#



3. Mandatorní systém:

Sofistikovaná volba:

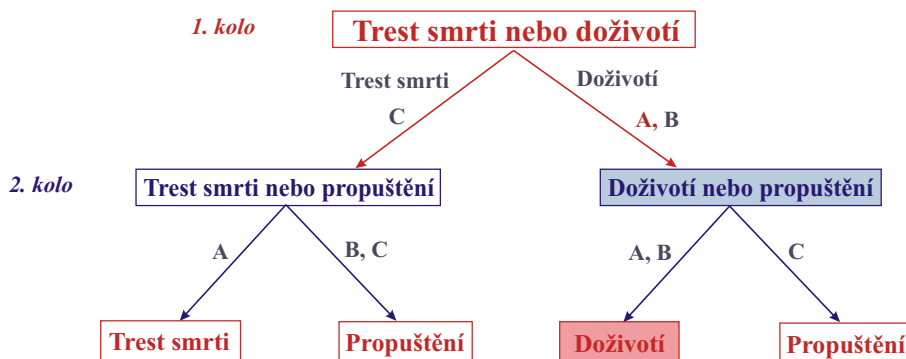
Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#



3. Mandatorní systém:

Sofistikovaná volba:

Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#



Tento příklad velmi názorně ilustruje, jak se pouhou změnou volebních pravidel může výsledek hlasování zcela zásadně změnit: při stejných preferencích soudců by byl obžalovaný v jednom systému propuštěn, v jiném popraven a v jiném odsouzen k doživotnímu žaláři.