8 KOOPERATIVNÍ HRY DVOU HRÁČŮ

V této kapitole se budeme zabývat situacemi, kdy hráči mohou před začátkem hry uzavřít závaznou dohodu o tom, jaké použijí strategie, vygenerovaný zisk si však nemohou přerozdělit (tak je tomu například vždy, kdy hodnoty výplatní funkce představují užitek jedince).

Ve čtvrté kapitole jsme uvažovali následující příklad:

✒ ***Příklad 1*** – **Konflikt typu manželský spor.**

Představme si manželský pár, v němž mají partneři poněkud odlišné názory na nejlepší využití volného večera: žena dává přednost návštěvě boxu, muž fotbalu. Půjdou-li na box, přinese to větší užitek ženě a menší muži, půjdou-li na fotbal, bude tomu naopak. Půjde-li však každý jinam, bude výsledkem celkové rozladění a užitek bude pro každého z nich menší, než by tomu bylo v případě návštěvy méně preferované akce. Situaci si můžeme znázornit například následující dvojmaticí popisující užitek pro ženu a muže při jednotlivých kombinacích trávení volného večera:

Pepíček

Strategie	Box		Balet
Box	$\boxed{(\mathbf{2},\mathbf{1})}$	$\leftarrow$	$(0,0)$
	$\uparrow$		$\downarrow$
Balet	$(0,0)$	$\rightarrow$	$\boxed{(1,2)}$

Maruška

Rovnovážné body v ryzích strategiích: (Box, Box), (Balet, Balet)

Rovnovážný bod ve smíšených strategiích:

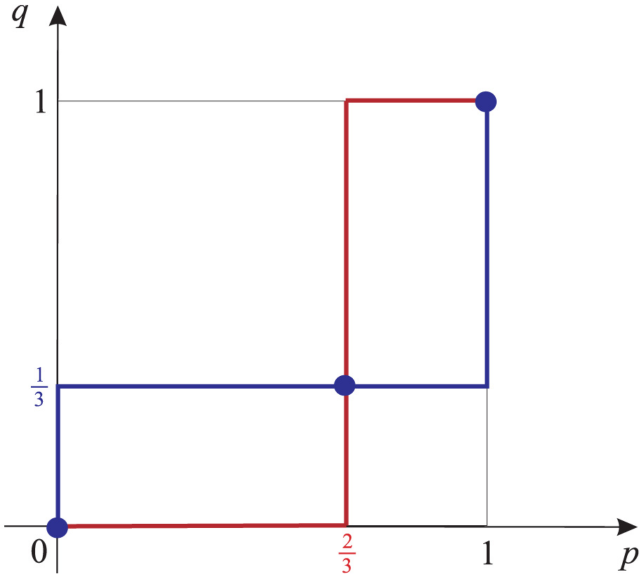
$$\pi_1(p,q) = 2pq + 1(1-p)(1-q) = 3pq - p - q + 1$$

$$\pi_2(p,q) = 1pq + 2(1-p)(1-q) = 3pq - 2p - 2q + 1$$

$$\pi_1(p,q) = p(3q-1) - q + 1, \quad \pi_2(p,q) = q(3p-2) - 2p + 1$$

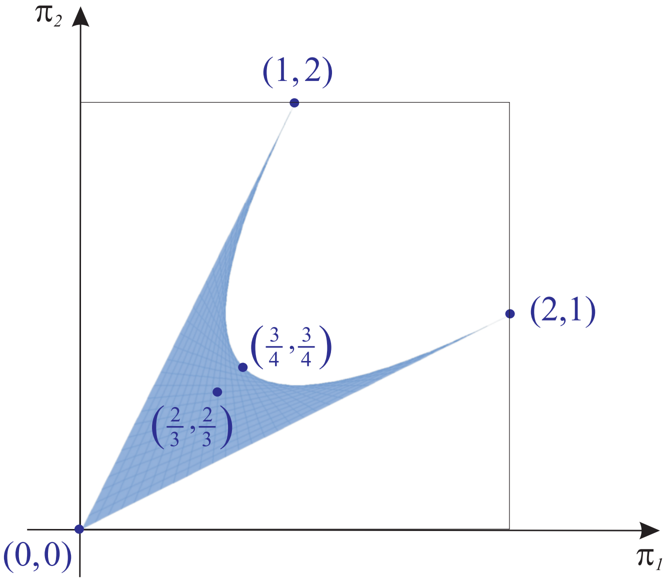
Reakční křivky:

$$R_1(q) = \begin{cases} 0 & \dots\ q \in \langle 0, \frac{1}{3}) \\ \langle 0, 1\rangle & \dots\ q = \frac{1}{3} \\ 1 & \dots\ q \in (\frac{1}{3}, 1\rangle \end{cases} \qquad R_2(p) = \begin{cases} 0 & \dots\ p \in \langle 0, \frac{2}{3}) \\ \langle 0, 1\rangle & \dots\ p = \frac{2}{3} \\ 1 & \dots\ p \in (\frac{2}{3}, 1\rangle \end{cases}$$



Rovnovážný bod	Očekávaná výhra
$((1,0),(1,0))$	$(2,1)$
$((\frac{2}{3},\frac{1}{3}),(\frac{1}{3},\frac{2}{3}))$	$(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$
$((0,1),(0,1))$	$(2,1)$

Následující obrázek zobrazuje všechny dvojice výplatních funkcí, tj. všechny body dosažitelné v rámci nekooperativní hry.



DVOJMATICOVÁ HRA

Hráč 2

Hráč 1

Strategie	t_1	t_2	$\dots$	t_n
s_1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	$\dots$	(a_{1n}, b_{1n})
s_2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	$\dots$	(a_{2n}, b_{2n})
$\vdots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$
s_m	(a_{m1}, b_{m1})	(a_{m2}, b_{m2})	$\dots$	(a_{mn}, b_{mn})

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Kooperativní hry dvou hráčů

Definice 1. Nechť G je dvojmaticová hra dvou hráčů s výplatními maticemi A, B typu $m \times n$. **Společnou strategií** budeme rozumět matici pravděpodobností $P = (p_{ij})$ typu $m \times n$, tj.

$$p_{ij} \geq 0 \quad \text{pro} \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

Společná strategie tedy přiřazuje pravděpodobnost každé dvojici ryzích strategií. Očekávané hodnoty výplatní funkce jsou pro jednotlivé hráče při společné strategii P rovny

$$u(P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} a_{ij}, \qquad v(P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} b_{ij}$$

☛ *Příklad 2*

Ve hře Manželský spor: společnou strategií je například matice

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Očekávaná hodnota výhry Marušky:

$$u(P) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{5}{4}$$

Očekávaná hodnota výhry Pepíčka:

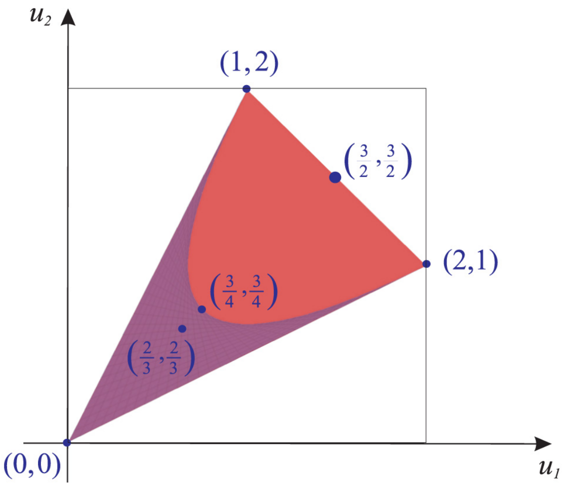
$$v(P) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 1$$

V **kooperativní hře** hráči uzavírají dohodu o tom, jakou společnou strategii mají zvolit.

Definice 2. Kooperativní výplatní oblast je množina

$$\mathbf{K} = \{(u(P), v(P)) : \ P \text{ je společná strategie}\}. \qquad (8.1)$$

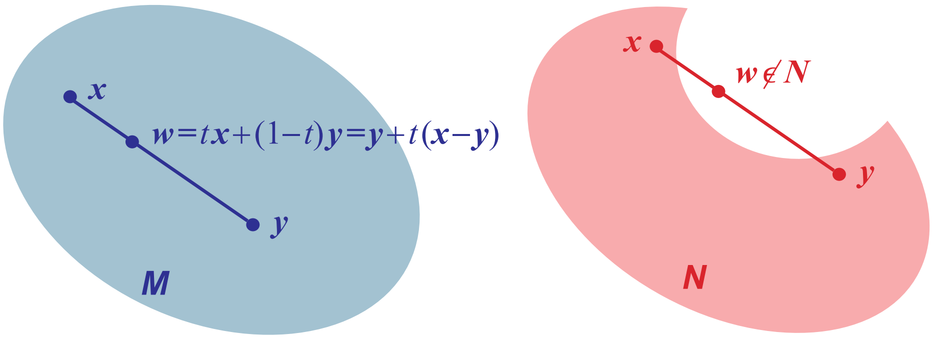
K je **konvexní, uzavřená a omezená množina** obsahující odpovídající nekooperativní oblast



KONVEXNÍ MNOŽINY

Definice 3. Množina **M** $\subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **konvexní**, jestliže pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in$ **M** a každé reálné číslo t, $0 \leq t \leq 1$, platí:

$$t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$$



Jinými slovy, množina **M** je konvexní, jestliže každá úsečka, jejíž koncové body leží v **M**, leží celá v **M**.

Definice 4. Nechť $F = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k\}$ je konečná podmnožina $\mathbb{R}^n$. **Konvexní kombinací** množiny F se rozumí vektor

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{k} t_i \boldsymbol{x}_i, \qquad \text{kde } t_1 \geq 0, \dots, t_k \geq 0, \quad t_1 + \cdots t_k = 1.$$

Tvrzení 1. *Množina všech konvexních kombinací množiny* $F = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k\}$ *je konvexní.*

Důkaz. Pro libovolné dvě konvexní kombinace

$$y = t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n, \quad z = s_1 x_1 + \cdots + s_n x_n$$

a libovolné $k \in \langle 0, 1 \rangle$ platí:

$$ky + (1-k)z = [kt_1 + (1-k)s_1]x_1 + \cdots + [kt_{n-1} + (1-k)s_{n-1}]x_{n-1} +$$

$$+[k(1 - t_1 - \cdots - t_{n-1}) + (1-k)(1 - s_1 - \cdots - s_{n-1})]x_n =$$

$$= a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n, \quad \text{kde } \; a_1 + \cdots + a_n = 1 \; \square$$

Tvrzení 2. *Je-li daná množina **M** konvexní, pak každá konvexní kombinace bodů z **M** opět leží v **M**.*

Důkaz. Indukcí dokážeme: $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\} \subset M \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} t_i \boldsymbol{x}_i \in M$.

$\underline{n = 1:}$ OK

$\underline{n \Rightarrow n+1:}$ Uvažujme $z = t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1}$,

$t_1 + \cdots + t_{n+1} = 1$; označme $t_1 + \cdots + t_n = t,\ t_{n+1} = 1 - t$.

Zřejmě platí:

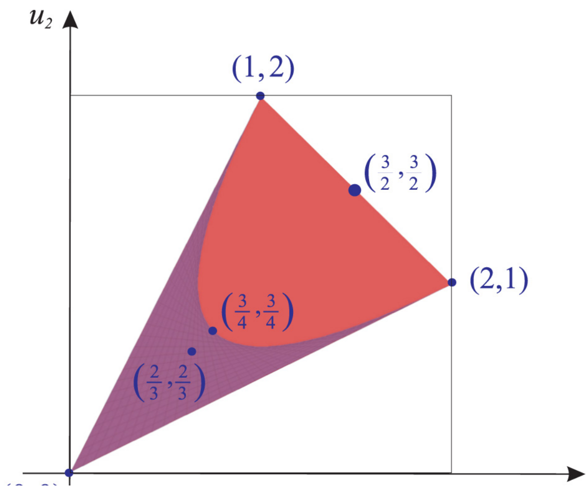
$z = t\left(\frac{t_1}{t} x_1 + \cdots + \frac{t_n}{t} x_n\right) + (1-t) x_{n+1}, \quad \frac{t_1}{t} + \cdots + \frac{t_n}{t} = 1.$

Podle indukčního předpokladu je $\frac{t_1}{t} x_1 + \cdots + \frac{t_n}{t} x_n \in M$. $\square$

Definice 5. Nechť **A** je podmnožina $\mathbb{R}^n$. **Konvexním obalem** množiny **A** se nazývá nejmenší konvexní množina obsahující **A**. Konvexní obal budeme značit symbolem conv(**A**).

Poznámka. Z předchozích tvrzení plyne:

- conv(**A**) průnikem všech konvexních množin obsahujících **A**.
- Konvexní obal množiny **A** je množinou všech konvexních kombinací bodů z **A**.



Věta 1. *Nechť G je hra je hra dvou hráčů určená dvojmaticí C typu $m \times n$. Kooperativní výplatní oblast je konvexní uzávěr množiny bodů v $\mathbb{R}^2$, jejichž souřadnice jsou prvky dvojmatice C.*

Důkaz. Je-li P společná strategie, pak odpovídající dvojice hodnot výplatních funkcí je

$$(u(P), v(P)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} c_{ij}.$$

Všechny tyto body vytvoří konvexní uzávěr množiny

$$\{c_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Naopak, jakýkoli bod konvexního uzávěru této množiny je výplatní dvojicí. □

Definice 6. Množina **S** $\subset \mathbb{R}^2$ se nazývá **symetrická,** jestliže pro každé $u, v \in \mathbb{R}$ platí:

$$(v, u) \in \mathbf{S} \iff (u, v) \in \mathbf{S}.$$

Definice 7. Uvažujme množinu $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^2$. **Symetrický konvexní obal** množiny $\mathbf{A}$ je definován jako konvexní obal množiny

$$\mathbf{A} \cup \{(v,u) : \ (u,v) \in \mathbf{A}\}$$

a značí se symbolem $\mathrm{sconv}(\mathbf{A})$.

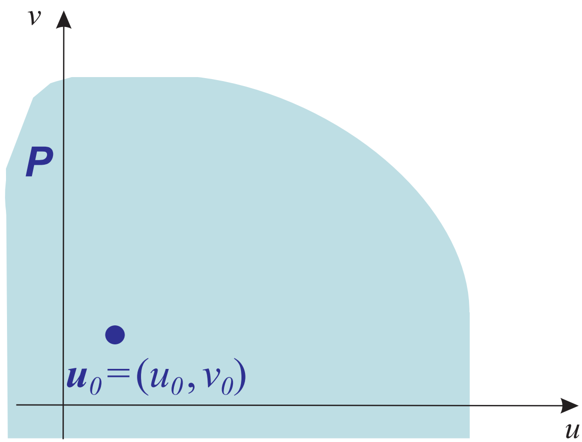
Tvrzení 3. *Nechť $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^2$ a k je takové číslo, že pro každý bod $(u,v) \in \boldsymbol{A}$ platí:*

$$u + v \leq k.$$

Potom stejná nerovnost platí pro každý bod symetrického konvexního uzáveru $\mathrm{sconv}(\mathbf{A})$.

VYJEDNÁVACÍ PROBLÉM

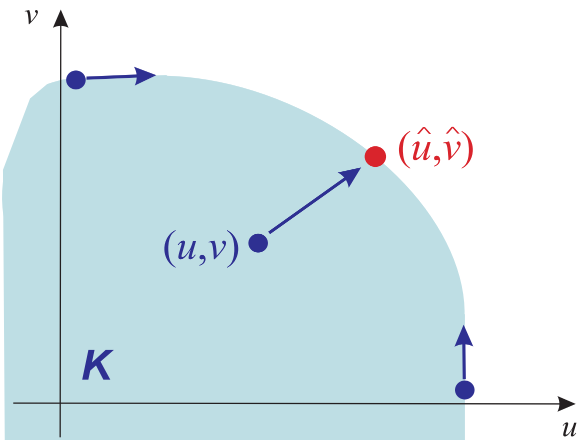
Definice 8. Vyjednávacím problémem budeme rozumět uspořádanou dvojici $(\mathbf{P}, u)$, kde **P** je kooperativní výplatní oblast, $\boldsymbol{u}_0 = (u_0, v_0)$, kde u_0, v_0 jsou výplaty v případě nedosažení dohody („hrozby“).



Definice 9. Dvojice hodnot výplatních funkcí $(\hat{u}, \hat{v}) \in \mathbf{K}$ se nazývá **paretovská** či **nedominovaná**, jestliže neexistuje žádná jiná výplatní dvojice $(u, v) \in \mathbf{K}$, pro kterou by bylo

$$u \geq \hat{u} \qquad \text{a zároveň} \qquad v \geq \hat{v},$$

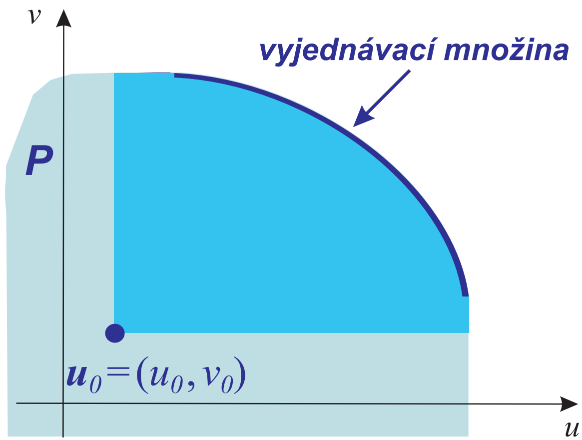
přičemž alespoň jedna nerovnost by byla ostrá.



Definice 10. Vyjednávací množina pro daný vyjednávací problém je množina všech **Paretovských** výplatních dvojic $(u, v) \in$ **P** takových, že

$$u \geq v_0, \qquad v \geq v_0,$$

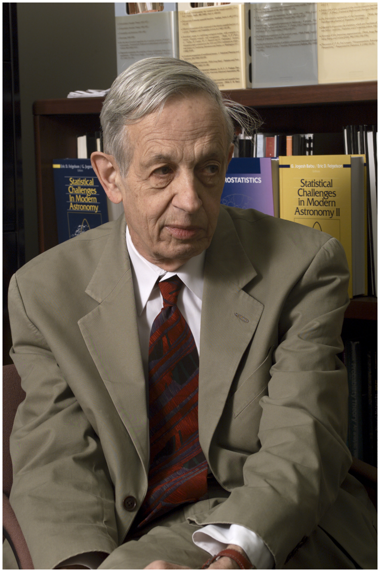
kde $u = (u_0, v_0)$ je důsledek nedosažení dohody.

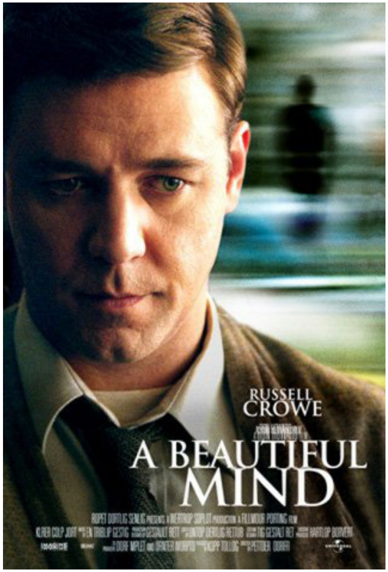


JOHN FORBES NASH (*1928)

1950 The bargaining problem, Econometrica 18

1953 Two-person cooperative games, Econometrica 21





Nashovy vyjednávací axiomy

Uvažujme vyjednávací problém $(\mathbf{P}, (u_0, v_0))$, označme jeho řešení $\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u^*, v^*)$.

Podmínka 1 (Individuální racionalita)

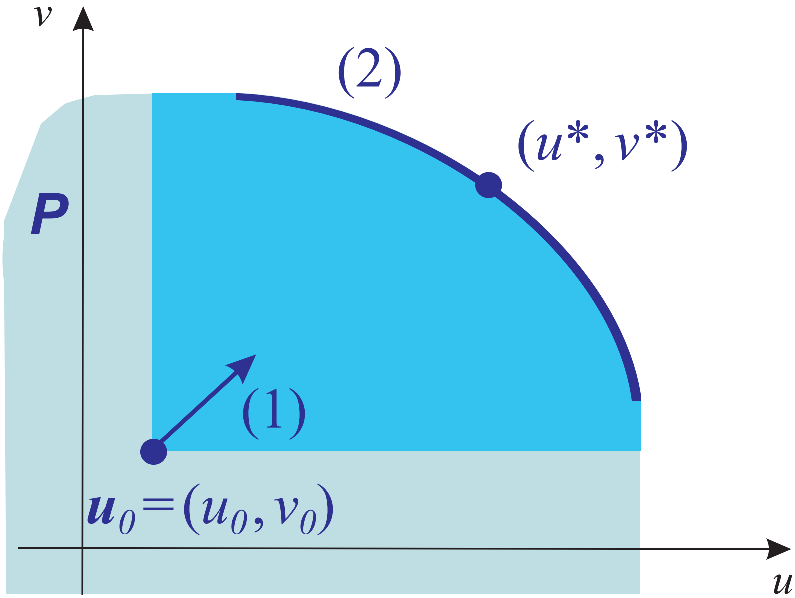
$$u^* \geq u_0,\ v^* \geq v_0$$

Podmínka 2 (Paretovská optimalita)

Dvojice (u^*, v^*) je paretovsky optimální.

Podmínka 3 (Dosažitelnost)

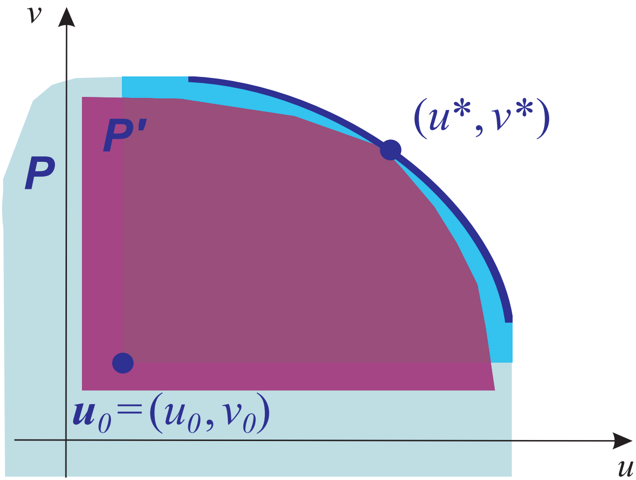
$$(u^*, v^*) \in P.$$


v
(2)
(u*, v*)
P
(1)
u0=(u0, v0)
u

Podmínka 4 (Nezávislost na irelevantních alternativách)

Je-li P' výplatní oblast obsažená v P a obě dvojice $(u_0, v_0),\ (u^*, v^*) \in P'$, pak

$$\Psi(P', (u_0, v_0)) = (u^*, v^*).$$



Podmínka 5 (Nezávislost na lineární transformaci)

Je-li P' získáno z P lineární transformací

$$u' = au + b, \qquad v' = cv + d, \qquad \text{kde} \quad a, c > 0,$$

pak

$$\Psi(P', (au_0 + b, cv_0 + d)) = (au^* + b, cv^* + d).$$

Podmínka 6 (Symetrie)

Je-li množina P symetrická (tj. $(u, v) \in P \Leftrightarrow (v, u) \in P$) a $u_0 = v_0$, pak je $u^* = v^*$.

Věta 2. *Existuje právě jeden* **„arbitrážní proces“** Ψ *splňující podmínky 1–6.*

Důkaz.

• **Konstrukce** Ψ.

Případ (i) Existuje $(u, v) \in \mathbf{P}$, kde $u > u_0$ a $v > v_0$.

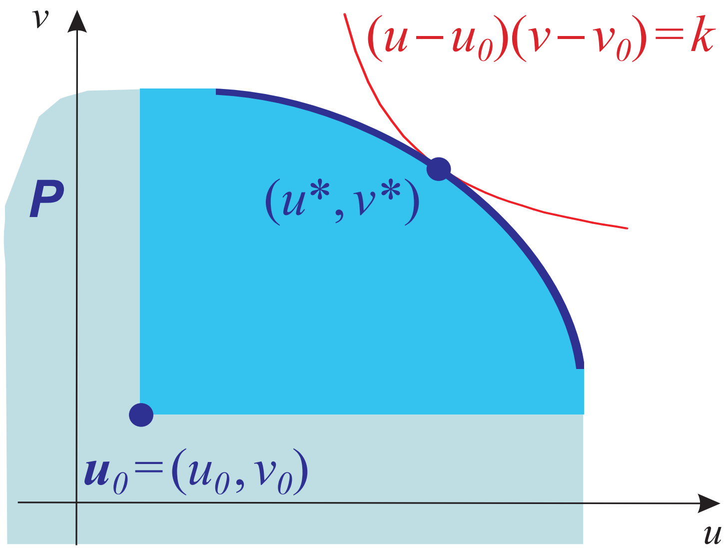
Označme $\mathbf{K} = \{(u, v) \in \mathbf{P}, u > u_0, v > v_0\}$ a definujme

$$g(u, v) = (u - u_0)(v - v_0) \quad \text{pro} \quad (u, v) \in \mathbf{K}.$$

Existuje právě jeden bod (u^*, v^*), v němž $g(u, v)$ nabývá maximální hodnoty.

Položme

$$\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u^*, v^*).$$



Případ (ii)

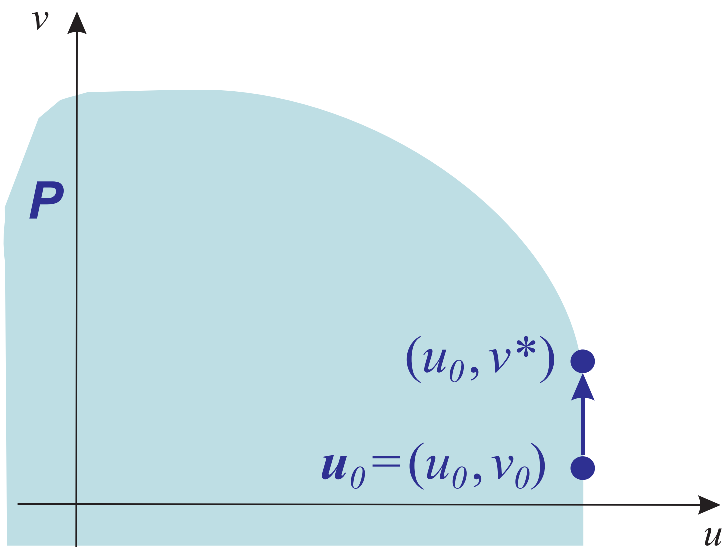
Pro žádný bod $(u, v) \in$ **P** neplatí zároveň $u > u_0$ a $v > v_0$.

Případ (iia) Existuje bod $(u_0, v) \in \mathbf{P}$, pro který $v > v_0$.

Největší v s touto vlastností, kde $(u_0, v) \in \mathbf{P}$, označme v^*.

Položme

$$\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u_0, v^*).$$

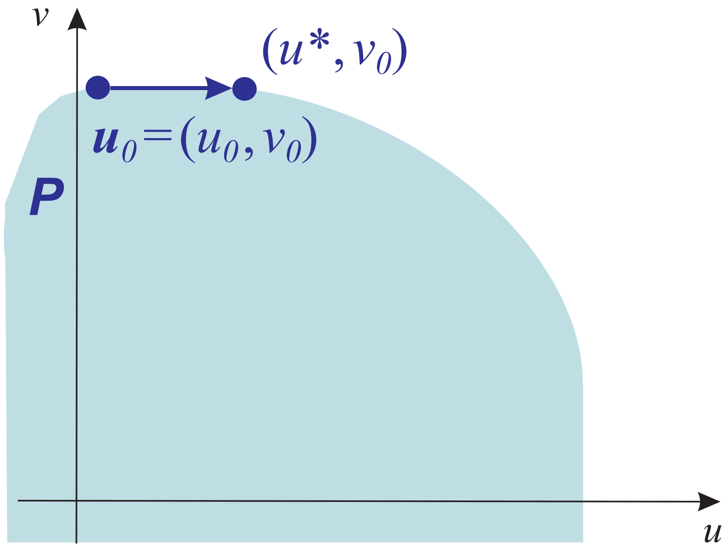


Případ (iib) Existuje bod $(u, v_0) \in \mathbf{P}$, pro který $u > u_0$.

Největší u s touto vlastností, pro něž $(u, v_0) \in \mathbf{P}$, označme u^*.

Položme

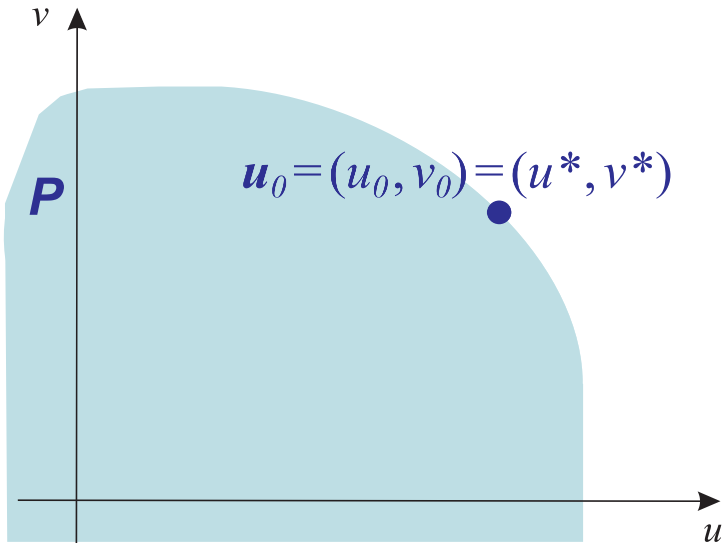
$$\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u^*, v_0).$$



Případ (iic) Nenastává ani jeden z případů (iia), (iib).

Položme

$$\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u_0, v_0).$$



• Ověření Nashových axiomů.

Podmínky (1) a (3) jsou zřejmě splněny ve všech případech.

Podmínka (2): Pokud by nebyla splněna, pak by existoval bod $(u, v) \in$ **P**, $(u, v) \neq (u^*, v^*)$, který by dominoval bodu (u^*, v^*).

V případě **(i)** by platilo

$$(u - u_0) \geq (u^* - u_0), \ (v - v_0) \geq (v^* - v_0)$$

a aspoň jedna z těchto nerovností by byla ostrá ($(u, v) \neq (u^*, v^*)$). Proto

$$g(u, v) > g(u^*, v^*),$$

což je **spor s konstrukcí** (u^*, v^*).

V případě **(iia)** musí být $u^* = u_0 = u$, protože neplatí zároveň (iib); proto $v > v^*$, což je **spor s definicí** v^*. Analogicky pro **(iib)**.

V případě **(iic)** je $(u^*, v^*) = (u_0, v_0)$; pokud by bylo $u > u_0$, pak by platilo (iib), při $v > v_0$ by nastal případ (iia), což je **spor**.

Podmínka (4): V případě **(i)** je maximální hodnota funkce g na průniku **K** ∩ **P**′ menší nebo rovna její maximální hodnotě na **K**.

Protože je $(u^*, v^*) \in P'$, jsou si tato maxima rovna.

Proto

$$\Psi(P', (u_0, v_0)) = \Psi(P, (u_0, v_0)).$$

V případech **(iia)**, **(iib)** lze postupovat podobně, případ **(iic)** je snadný.

Podmínka (5): V případě **(i)** platí **(i)** i pro výplatní oblast P' se status quo bodem $(au_0 + b, cv_0 + d)$. Proto

$$(u' - (au_0 + b))(v' - (cv_0 + d)) = ac(u - u_0)(v - v_0).$$

Protože $a, c > 0$, nabývá funkce na levé straně rovnice svého maxima v bodě $(au^* + b, cv^* + d)$. V případě **(i)** tedy podmínka **(5)** platí. Postup v ostatních případech je obdobný.

Podmínka (6): Pokud by bylo $u^* \neq v^*$, pak by ze symetrie plynulo $(v^*, u^*) \in P$; v případě **(i)** by platilo

$$g(v^*, u^*) = g(u^*, v^*).$$

Podle tvrzení 3 nabývá funkce g svého maxima pouze v jednom bodě, což je spor. Případy **(iia)** a **(iib)** nemohou vzhledem k symetrii nastat.

- **Jednoznačnost.**

Důkaz se provede sporem, k němuž se dojde z předpokladu, že existuje jiný arbitrážní proces $\overline{\Psi}$ splňující Nashovy axiomy. Protože jsou tyto procesy různé, existuje výplatní oblast **P** a bod „status quo“ $(u_0, v_0) \in P$, pro něž

$$(\overline{u}, \overline{v}) = \overline{\Psi}(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) \neq \Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u^*, v^*).$$

Věta 3. *Nechť **P** je výplatní oblast a* $(u_0, v_0) \in P$*. Předpokládejme, že existuje bod* $(u, v) \in P$ *s vlastností*

$$u > u_0, \quad v > v_0;$$

množinu všech bodů (u, v) *uvedené vlastnosti označme symbolem **K**. Definujme na množině **K** funkci*

$$g(u, v) = (u - u_0)(v - v_0).$$

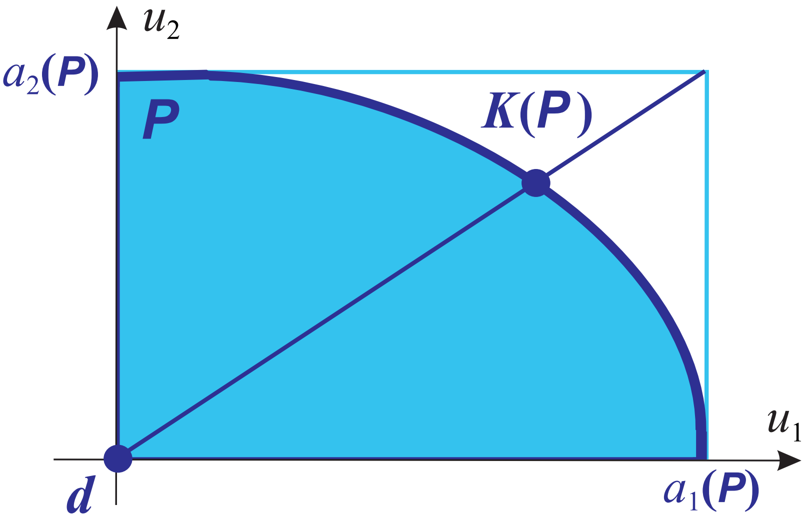
Potom g *dosahuje svého maxima na **K** v právě jednom bodě.*

Ehud Kalai, Meir Smorodinsky

Other Solutions to Nash's Bargaining Problem, 1975

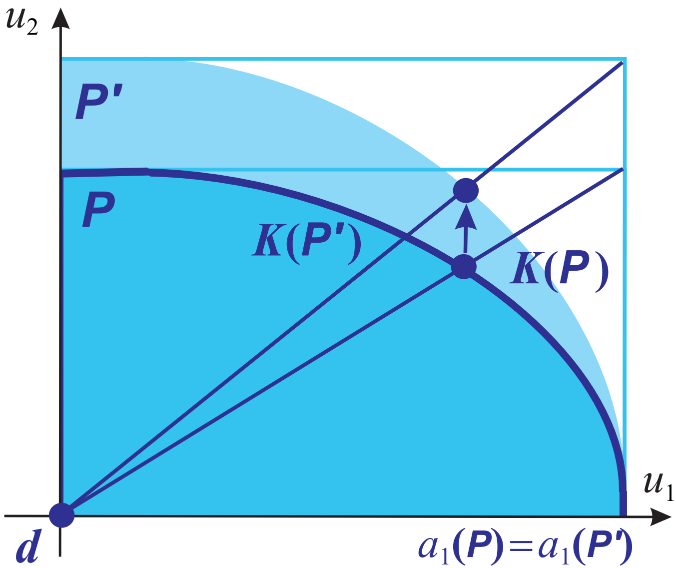
(Econometrica 43, 513–518)

Řešení vycházející z nejoptimističtějších očekávání:

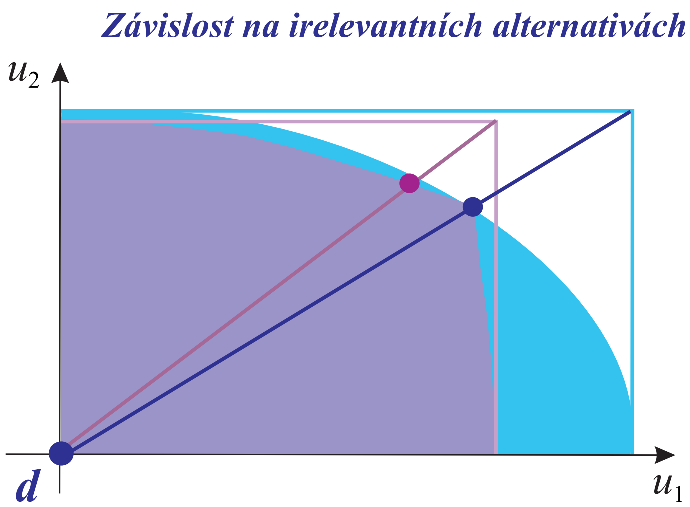


Místo podmínky 4 (nezávislost na irelevantních alternativách):

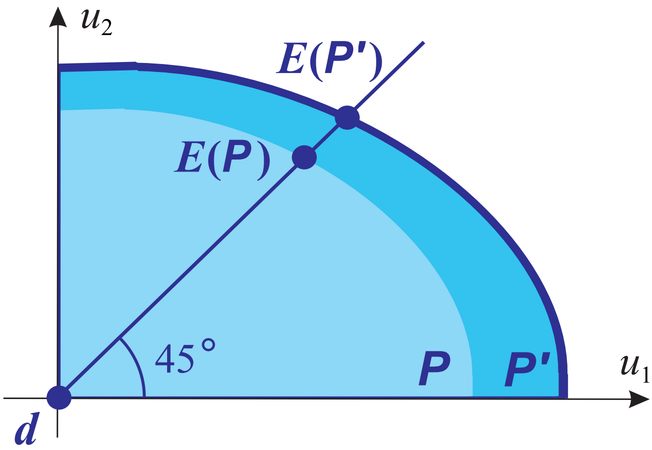
Individuální monotonie: Je-li $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{P}'$ a pro $j \neq i$ je $a_j(\mathbf{P}') = a_j(\mathbf{P})$, pak $K_i(\mathbf{P}, d) \leq K_i(\mathbf{P}', d)$.



Věta 4. *Kalai-Smorodinského řešení je jediné řešení splňující podmínky paretovské optimality, symetrie, nezávislosti na lineárních transformacích a individuální monotonie* $(n = 2)$.



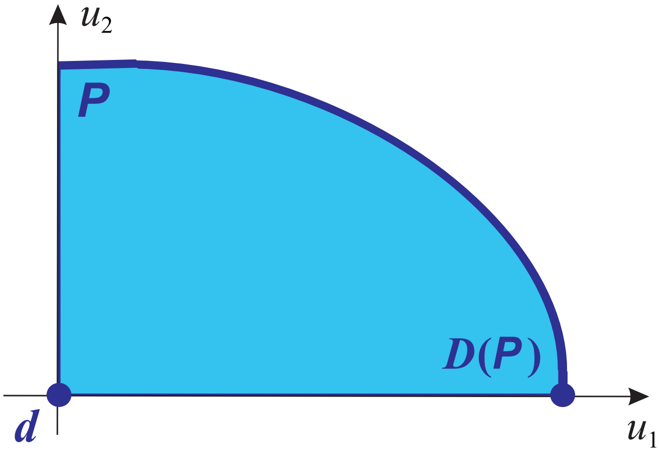
Rovnostářské řešení – Ehud Kalai, 1977



Silná monotonie: Je-li $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{P}'$, pak $K_i(\mathbf{P}, d) \leq K_i(\mathbf{P}', d)$ pro všechna i.

Věta 5. *Rovnostářské řešení je jediné řešení splňující podmínky slabé paretovské optimality, symetrie, a silné monotonie.*

Diktátorské řešení



☛ ***Příklad 3***. Uvažujme kooperativní hru určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (2,-1) & (-2,1) & (1,1) \\ (-1,2) & (0,2) & (1,-2) \end{pmatrix}.$$

Hodnoty u_0, v_0 nalezneme jako minimální zaručené výhry jednotlivých hráčů v nejhorší možné situaci, která pro ně v rámci dané hry může nastat, tj. v situaci, kdy by se je oponent snažil co nejvíce poškodit (to znamená: čím méně dostane první hráč, tím větší užitek pro druhého a naopak). Každý hráč tedy uvažuje antagonistickou hru, kde on má své původní hodnoty a protihráč má vždy opačný zisk.

Z pohledu prvního hráče:

$$\begin{pmatrix} (2,-2) & (-2,2) & (1,-1) \\ (-1,1) & (0,0) & (1,-1) \end{pmatrix}.$$

Můžeme eliminovat poslední sloupec, dále musíme najít smíšené strategie. Protože se nám jedná o zisk prvního hráče v rovnovážném bodě, budeme rovnou pracovat se ziskem prvního hráče a ptát se, kdy je tento hráč indiferentní mezi svými strategiemi, tj. mezi prvním a druhým řádkem:

$$2q - 2(1-q) = -q \qquad \Leftrightarrow \qquad q = 2/5$$

V rovnici máme přímo zisk prvního hráče, stačí tedy dosadit $2/5$ do libovolné strany rovnice a získáme $u_0 = -2/5$.

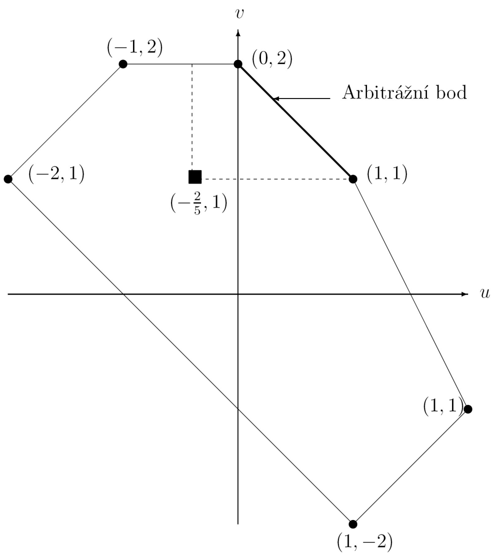
Z pohledu druhého hráče:

$$\begin{pmatrix} (1,-1) & (-1,1) & (-1,1) \\ (-2,2) & (-2,2) & (2,-2) \end{pmatrix}.$$

Druhý sloupec dominuje prvnímu i třetímu, které tedy můžeme eliminovat, v druhém sloupci vidíme rovnovážný bod $(-1, 1)$. Nyní nás zajímá zisk druhého hráče, proto $v_0 = 1$.

$$\begin{pmatrix} (2,-1) & (-2,1) & (1,1) \\ (-1,2) & (0,2) & (1,-2) \end{pmatrix}.$$

Maximinní hodnoty: $u_0 = -\frac{2}{5}, v_0 = 1$.



Položme $(u_0, v_0) = (-\frac{2}{5}, 1)$. Arbitrážní bod zřejmě musí být nalezen mezi body výplatní oblasti, které dominují $(-\frac{2}{5}, 1)$ a které nejsou dominovány žádnými jinými body – tj. na úsečce s krajními body $(0, 2)$ a $(1, 1)$, která představuje vyjednávací množinu. Podle konstrukce arbitrážního bodu hledáme maximum funkce

$$g(u, v) = (u - u_0)(v - v_0) = \left(u + \frac{2}{5}\right)(v - 1)$$

na úsečce dané rovnicí $v = -u + 2$. Jedná se tedy o nalezení extrému funkce jedné reálné proměnné

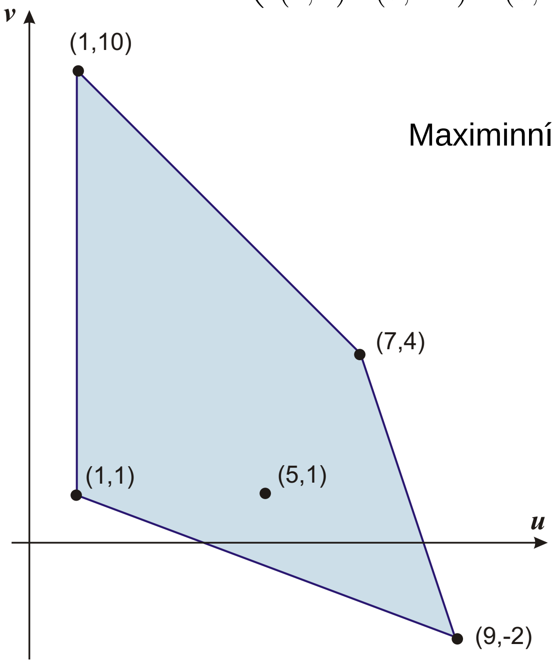
$$g(u, -u + 2) = \left(u + \frac{2}{5}\right)(-u + 1) = -u^2 + \frac{3}{5}u + \frac{2}{5}\ .$$

Pomocí diferenciálního počtu obdržíme

$$u = \frac{3}{10}\ , \quad v = \frac{17}{10}\ .$$

☛ ***Příklad 4***. Uvažujme kooperativní hru určenou dvojmaticí

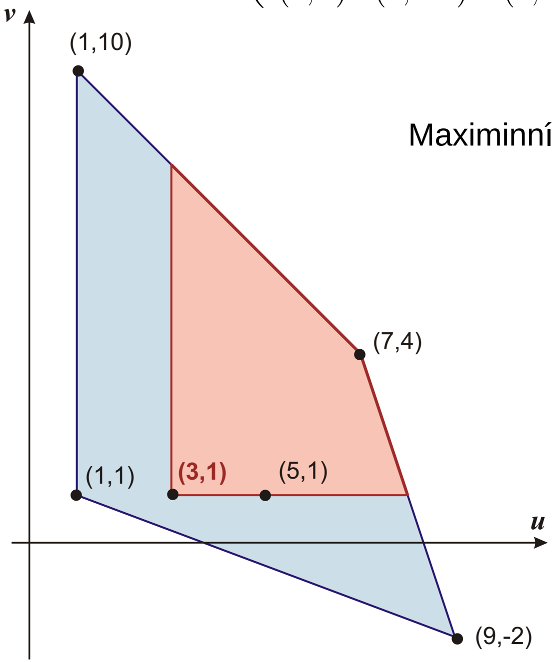
$$\begin{pmatrix} (5,1) & (7,4) & (1,10) \\ (1,1) & (9,-2) & (5,1) \end{pmatrix}.$$



Maximinní hodnoty: $u_0 = 3, v_0 = 1$.

☛ ***Příklad 5***. Uvažujme kooperativní hru určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (5,1) & (7,4) & (1,10) \\ (1,1) & (9,-2) & (5,1) \end{pmatrix}.$$



Maximinní hodnoty: $u_0 = 3, v_0 = 1$.

Vyjednávací množina je nyní tvořena dvěma úsečkami, stejný postup jako v předchozím příkladu se použije na obě úsečky, přičemž pro jednu vyjde bod maxima mimo ni, pro druhou získáme arbitrážní bod

$$u = \frac{13}{2}\,, \quad v = \frac{9}{2}\,.$$