

6 OPAKOVANÉ HRY



VĚŽŇOVO DILEMA

Píší se třicátá léta dvacátého století. V tehdejším Sovětském svazu cestuje jistý dirigent vlakem do Moskvy, kde jej večer čeká koncert se symfonickým orchestrem. Pročítá si partituru a soustředí se na náročné představení. Při této činnosti jej pozorují dva agenti KGB, kteří si ve své nevzdělanosti myslí, že partitura je jakási tajná šifra. Dirigentova snaha o vysvětlení, že je to přece Čajkovskij, je zcela marná – je zatčen a uvězněn. Druhý den jej navštíví naše dvojice agentů se slovy: „Raději byste měl všechno přiznat. Našli jsme toho vašeho kamaráda Čajkovského a ten už mluví . . .“

Dva nevinní lidé, jeden proto, že studoval partituru, a druhý proto, že se shodou okolností jmenoval Čajkovskij, se tak ocitnou ve vězení, postaveni před následující problém: pokud by oba statečně zapírali, navzdory fyzickému a psychickému týrání, putovali by oba na tři roky do Gulagu, pak by byli propuštěni. Pokud by se jeden z nich k fiktivnímu zločinu špionáže doznal a udal zároveň toho druhého, který by zapíral, bylo by mu to přičteno jako polehčující okolnost a dostal by jen jeden rok, zatímco druhý by byl odsouzen na 25 let. Pokud by se doznali oba, byli by posláni do Gulagu na 10 let.

Situaci lze znázornit dvojmatricí:

		Hráč 1	
		Zapírat	Přiznat
Hráč 2	Zapírat	$(-3, -3)$	$(-25, -1)$
	Přiznat	$(-1, -25)$	$(-10, -10)$

Dilema se této situaci říká z toho důvodu, že všeobecně nejvýhodnější by bylo, kdyby oba zapírali a dostali tak 3 roky vězení; problém je však jednak v tom, že se nemohou domluvit, jednak v tom, že i kdyby se domluvili, stále je zde velké pokušení promluvit a vyváznout s pouhým jedním rokem. A i kdyby byl každý z nich solidární, může si o svém kolegovi myslet, že podlehne pokušení či mučení a dozná se – pak by mu hrozilo 25 let, což je ještě mnohem horší než 10 let. Každý proto raději zvolí svou druhou strategii a dozná se.

Skutečně, strategie **přiznat** dominuje strategii **zapírat** a dvojice **(přiznat, přiznat)** je jediným rovnovážným bodem ve hře.

➔ Příklad 1. Vězňovo dilema 2

Obecněji se vězňovým dilematem rozumí každá situace typu

		Hráč 1	
		Spolupráce	Zrada
Hráč 2	Spolupráce	(<i>odměna, odměna</i>)	(<i>oškubání, pokušení</i>)
	Zrada	(<i>pokušení, oškubání</i>)	(<i>trest, trest</i>)

kde

oškubání < trest < odměna < pokušení.

Pod spoluprací si můžeme představit prakticky cokoli – dvojice strategií (*spolupráce, spolupráce*) odpovídá vzájemně solidárnímu jednání; hráč 1 například pomůže hráči 2 postavit dům, hráč 2 mu to vzápětí oplatí a oba získají jistou hodnotu ve výši *odměna*. Dvojice (*spolupráce, zrada*) odpovídá situaci, kdy hráč 1 pomůže hráči 2, ten však podlehne *pokoušení* a první hráč skončí *oškubán*. Dvojice (*zrada, zrada*) představuje stav, kdy hráči navzájem nespolupracují, popř. se přímo navzájem poškozují a jsou za to *potrestáni*.

Kde se například věžňovo dilema objevuje

- **Budování čističky odpadních vod**

(dva velké hotely u jednoho jezera):

- *Spolupráce* = vybudovat čističku
- *Zrada* = nevybudovat čističku
- *Odměna* = čistá voda přitáhne turisty – zákazníky, zvýší se zisky, museli jsme však investovat jistou částku
- *Pokušení* = využít zlepšení způsobené vybudováním čističky u druhého hotelu, ale přitom ušetřit na investici
- *Trest* = špinavá voda odláká turisty, kteří raději pojedou jinam, zisk klesne na nulu

- **Duopolisté:**

- *Spolupráce* = dohodnout se na optimálním množství výroby (odpovídajícím monopolu)
- *Zrada* = porušit dohodu
- *Odměna* = největší zisk pro obě strany
- *Pokušení* = vyrábět o něco více a získat více na úkor druhého duopolisty
- *Trest* = celkově menší zisk pro oba

- **Vybírání čmelíků:**

- *Spolupráce* = vzájemné vybírání
- *Zrada* = nechat si vybrat čmelíky, ale neoplatit to
- *Odměna* = zbavím se čmelíků, nicméně za to zaplatím vybráním Vašich
- *Pokušení* = zbavím se čmelíků a přitom mne to nestojí žádnou námahu
- *Trest* = čmelíků se nezbavím a trápení s nimi je horší než trocha námahy s vybíráním Vašich

- **Veřejná doprava:**

- *Spolupráce* = poctivě platit
- *Zrada* = neplatit
- *Odměna* = veřejná doprava funguje, mohu ji využívat, jistou částku měsíčně však za to zaplatím
- *Pokušení* = využívat, ale neplatit
- *Trest* = (téměř) nikdo neplatí, doprava je zrušena, musím si platit taxi, což je mnohem dražší než původní poplatek za veřejnou dopravu

- **Koncesionářské poplatky:**

- *Spolupráce* = platit
- *Zrada* = neplatit
- *Odměna* = veřejnoprávní rozhlasové či televizní vysílání funguje, mohu jej sledovat, ale něco málo mne to stojí
- *Pokušení* = neplatit, ale sledovat
- *Trest* = (téměř) nikdo neplatí, vysílání je zrušeno

- **Bitva:**

- *Spolupráce* = bojovat
- *Zrada* = schovat se
- *Odměna* = vítězství, ovšem také riziko zranění
- *Pokušení* = vítězství bez rizika zranění
- *Trest* = nepřítel zvítězí bez boje

- **Nukleární zbrojení:**

- *Spolupráce* = odzbrojit
- *Zrada* = zbrojit
- *Odměna* = svět bez jaderného nebezpečí
- *Pokušení* = být jako jediný vyzbrojen
- *Trest* = všichni zbrojí, platí za to velké částky a navíc hrozí nebezpečí

Opakované věžňovo dilema

Jak jsme viděli dříve, uskuteční-li se hra jednou a není možné dopředu uzavřít skutečně závaznou dohodu, zvolí racionální hráč dominující strategii *zrada*. Ocítá-li se však daná dvojice hráčů ve stejné situaci opakovaně, v nekonečném či neurčitém časovém horizontu, pak *spolupráce* není nutně iracionální:

☞ **Příklad 2:** Věžňovo dilema 3

Uvažujme následující modifikaci věžňova dilematu:

		Hráč 1	
		Spolupráce	Zrada
Hráč 2	Spolupráce	(3, 3)	(0, 5)
	Zrada	(5, 0)	(1, 1)

Představme si, že hra se bude opakovat, přičemž v každém kole je pravděpodobnost, že se uskuteční ještě i kolo následující, rovna $2/3$.

Budou-li dva hráči spolupracovat, pak očekávaná hodnota výhry je pro oba rovna

$$\pi_S = 3 + 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots$$

Uvědomme si, že pravděpodobnost, že nastane druhé kolo, je

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

pravděpodobnost, že nastane třetí kolo, je

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3,$$

atd.

Strategie v opakované hře je kompletní plán, jak se hráč zachová v průběhu celé hry ve všech možných situacích, v nichž se může ocitnout.

Uvažujme například strategii **nevraživec**:

Spolupracuj, dokud Tě druhý nezradí, pak vždy zrad'

Setkají-li se dva nevraživci, budou navždy spolupracovat – dokud bude hra trvat – a každý získá hodnotu π_S .

Snadno lze dokonce ukázat, že dvojice strategií

(nevraživec, nevraživec)

je **rovnovážný bod** dané hry.

Představme si, že jeden z hráčů se od strategie *nevraživec* odchýlí, tj. zvolí jinou strategii, kterou si označíme jako *deviant*. V některém kole tedy tento *deviant* zradí, přestože protihráč dosud spolupracoval (toto kolo může být i první). Nechť k této odchylce došlo poprvé v kole $n + 1$. Protože *deviant* hraje s *nevraživcem*, v dalším kole bude protivník volit strategii *zrada* a již u ní zůstane. *Deviant* tedy nemůže získat více než

$$\begin{aligned}\pi_D &= 3 + 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \\ &\quad + 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \dots\end{aligned}$$

(mohl by získat ještě méně, kdyby v některém z následujících kol volil *spolupráci*).

Protože

$$\begin{aligned}\pi_N - \pi_D &= (3 - 5) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + (3 - 1) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \dots + (3 - 1) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+k} + \dots \\ &= -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \dots + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+k} + \dots \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(-2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 2 > 0,\end{aligned}$$

nevplatí se odchýlit.

Podobně můžeme uvažovat strategii *půjčka za oplátku*, která začne spoluprací a pak v každém kole vždy opakuje předchozí tah

protivníka. Dvojice

(půjčka za oplátku, půjčka za oplátku)

rovněž představuje rovnovážný bod.

Příklady strategií v opakovaném vězňově dilematu

Vždy spolupracuje (Always Cooperates)

Vždy zradí (Always Defects)

Nevraživec (Grudger, Spiteful): Spolupracuje, dokud jej protihráč nezradí, pak navždy zrazuje (neodpouští).

Půjčka za oplátku (Tit for Tat): V prvním tahu spolupracuje, v dalších opakuje tah protihráče (zradí-li v jednom kole protihráč, v kole následujícím půjčka za oplátku zradí, na spoupráci odpoví v následujícím kole spoluprací).

Podezřivá půjčka za oplátku (Mistrust): V prvním kole zradí, v dalších se chová jako půjčka za oplátku – opakuje předchozí tah protihráče.

Naivní pokušitel (Naive Prober): Jako půjčka za oplátku, ale občas, zradí (např. náhodně, v průměru jednou za 10 tahů).

Kající pokušitel (Remorseful Prober): Jako naivní pokušitel, ale snaží se o ukončení cyklu S–Z způsobeného vlastní zradou: na

zradu, která následuje jako odpověď na jeho vlastní nespravedlivou zradu, jednou zareaguje spoluprací

Nelítostná půjčka za oplátku (Hard Tit for Tat): Spolupracuje s výjimkou situace, kdy protivník zradil aspoň jednou v posledních dvou kolech.

Postupná (Gradual): Spolupracuje, dokud protivník nezradí. Potom po první zradě jednou zradí a dvakrát spolupracuje, po druhé zradě dvakrát po sobě zradí a dvakrát spolupracuje, . . . , po n -té zradě n -krát po sobě zradí a dvakrát spolupracuje, atd.

Postupný zabiják (Gradual Killer): V prvních pěti kolech zradí, pak dvakrát spolupracuje. Jestliže protivník v 6. a 7. kole zradí, pak postupný zabiják zůstane navždy u zrady, v opačném případě navždy spolupracuje.

Nelítostná půjčka za dvě oplátky (Hard Tit for 2 Tats): Spolupracuje kromě případu, kdy protivník zradil aspoň dvakrát po sobě v posledních třech kolech.

Něžná půjčka za dvě oplátky (Soft Tit for 2 Tats): Spolupracuje kromě případu, kdy protivník zradil ve dvou po sobě jdoucích kolech.

Pomalá půjčka za oplátku (Slow Tit for Tat): Hraje S–S, potom pokud protivník hrál dvakrát po sobě stejný tah, hraje tah opačný.

Periodicky ZZS (Periodically DDC): Hraje periodicky Zrada–Zrada–Spolupráce

Periodicky SSZ (Per. CCD): Hraje periodicky Spolupráce–Spolupráce–Zrada

Něžná většinová (Soft Majority): Spolupracuje, pak použije strategii, kterou protivník použil nejčastěji; jsou-li četnosti obou protivnickových strategií stejné, pak spolupracuje.

Krutá většinová (Hard Majority): Spolupracuje, pak použije strategii, kterou protivník použil nejčastěji; jsou-li četnosti obou protivnickových strategií stejné, pak zradí.

Pavlov: Spolupracuje právě tehdy, když v předchozím kole zvolili oba hráči stejnou strategii, jinak zradí.

Pavlov P_n : Přizpůsobuje pravděpodobnost spolupráce v jednotkách $1/n$ podle toho, jak si vedla v předchozím kole: Jestliže v předchozím kole spolupracovala s pravděpodobností p , pak v následujícím spolupracuje s pravděpodobností

$p \oplus \frac{1}{n} = \min(p + \frac{1}{n}, 1)$, získala-li Od ;

$p \ominus \frac{1}{n} = \max(0, p - \frac{1}{n})$, získala-li T ;

$p \oplus \frac{2}{n}$, získala-li P ;

$p \ominus \frac{2}{n}$, získala-li Os .

Náhodná (Random): Spolupracuje s pravděpodobností $1/2$.

Nelítostná Joss (Hard Joss): Hraje jako půjčka za oplátku, ale spolupracuje jen s pravděpodobností $0,9$ (Joss – čínská modla).

Něžná Joss (Soft Joss): Hraje jako půjčka za oplátku, ale zradí jen s pravděpodobností $0,9$.

Velkorysá půjčka za oplátku (Generous Tit for Tat): Hraje jako půjčka za oplátku, ale po zradě spolupracuje s pravděpodobností

$$g(Od, T, P, Os) = \min \left(1 - \frac{P - Od}{Od - Os}, \frac{Od - T}{P - T} \right).$$

Lepší a lepší (Better and Better) Zradí s pravděpodobností $(1000 - \text{pořadí kola})/1000$, tedy s pravděpodobností menší a menší.

Horší a horší (Worse and Worse): Zradí s pravděpodobností pořadí kola/ 1000 , tedy s pravděpodobností větší a větší.

Axelrodův turnaj

V roce 1981 uspořádal Robert Axelrod počítačový turnaj, v němž se 15 různých strategií pro opakované vězňovo dilema, zaslaných předními herními teoretiky, utkaly každá s každou v zápasech o 200 tazích (celkem 15×15 zápasů). Sčítaly se vždy body získané na základě matice

		Hráč 1	
		Spolupráce	Zrada
Hráč 2	Spolupráce	(3, 3)	(0, 5)
	Zrada	(5, 0)	(1, 1)

Ke značnému překvapení všech zúčastněných získala nejvíce bodů velmi jednoduchá strategie: *půjčka za oplátku*, kterou do soutěže zaslal Anatol Rapoport, psycholog a odborník na teorii her.

V rozboru turnaje Axelrod rozlišil následující kategorie strategií:

- **Milá strategie** – nikdy nezradí jako první (jen v odvetě),
- **Podlá strategie** – aspoň někdy zradí i jako první.

V soutěži bylo 8 milých strategií a obsadily prvních 8 míst (nejúspěšnější získala 504,5 bodů, což odpovídá 84% standardu 600 bodů, další milé získaly 83,4%–78,6%; nejúspěšnější z podlých získala 66,3%).

- **Odpouštějící strategie** – může odplácet, ale má krátkou paměť, zapomíná staré křivdy,

Neodpouštějící strategie – staré křivdy nikdy nezapomene, nevymaní se z cyklu vzájemných odvet ani proti smířlivému protivníkovi.

- **Nezávistivá strategie** – jde jí o vlastní zisk, ne o porážku soupeře,

Závistivá strategie

- **Vyprovokovatelná strategie** – nenechá se „oškubat“ nemilými strategiemi,

Nevyprovokovatelná strategie

Druhý turnaj

V druhém Axelrodově turnaji, který následoval nedlouho po prvním, nebyl pevně stanoven počet kol, ale turnaj probíhal analogicky s evolucí přírodním výběrem: všem strategiím byla přiřazena výhra určující počet potomků (při stálém celkovém počtu jedinců) – úspěšnější strategie se množily na úkor méně úspěšných, asi po 1000 generacích bylo dosaženo stability. I zde zvítězila *půjčka za oplátku*.

Výskyt opakovaného věžňova dilematu

(další příklady)

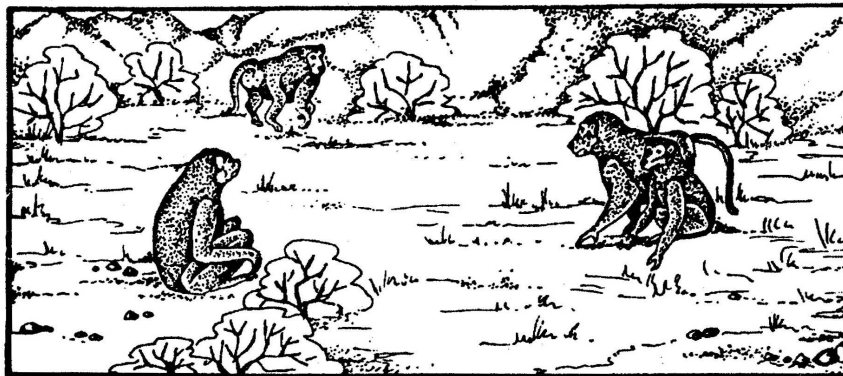
- **Válečná fronta – žij a nech žít:**

- *Spolupráce* = žít a nechat žít
- *Zrada* = zabít každého, kdo k tomu dá příležitost
- *Odměna* = přežití dlouhých válečných let
- *Pokušení* = zneužít toho, že protivník je snadnou kořistí, a dopomoci si například k vyznamenaní – přeci jen je lepší se nepřítele zbavit
- *Trest* = všichni stále ve střehu, dokonale krytí, . . .

- **Výpomoc samců paviána anubiho:**

- *Spolupráce* = pomoci druhému samečkovi při páření zahánět nepřítele
- *Zrada* = neoplatit pomoc
- *Odměna* = úspěšné páření, mláďata
- *Pokušení* = využít pomoc, ale neoplatit ji a tím ušetřit čas a námahu
- *Trest* = méně mláďat

V přírodě: čím častěji sameček *A* podporuje samečka *B*, tím častěji i *B* podporuje *A*.



- **Fíkovník a vosičky chalcidky:**

- *Spolupráce* = vyvážený poměr mezi květy, které chalcidka uvnitř fíku opyluje, a květy, do nichž naklade vajíčka
- *Zrada* = naklást vajíčka do více květů
- *Odměna* = šíření genů
- *Pokušení* = naklást vajíčka do více květů a tím zvýšit počet potomků
- *Trest* = fík i s celou „zrádnou rodinou“ schozen, rodina vymírá

- **Střídání pohlavních rolí u hermafrodita kanice:**

- *Spolupráce* = jsem-li nyní sameček, stanu se příště samičkou
- *Zrada* = po samečkovi se opět stát samečkem
- *Odměna* = harmonické soužití, mnoho potomků
- *Pokušení* = zopakovat si snadnou úlohu samečka
- *Trest* = vztah se rozpadne

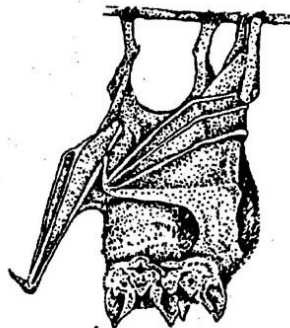
- **Upír *Desmodus rotundus* (netopýr sající krev savců) – krmení hladových jedinců:**

- *Spolupráce* = po úspěšném lovu nakrmit neúspěšné „kolegy“
- *Zrada* = nechat si vše pro sebe
- *Odměna* = dlouhodobé úspěšné přežívání
- *Pokušení* = v případě nouze se nechat nakrmit, o svůj úlovek se však nedělit
- *Trest* = v případě neúspěšného lovu smrt vyhladověním

V přírodě: Jedinci, kteří se vrátili z neúspěšného lovu, jsou úspěšnými, a to i nepříbuznými, krmeni; poznají se.



a



b

Definice 1. Úplný rovnovážný bod – subgame perfect equilibrium (Selten, 1975)

rovnovážný bod pro každou podhru původní hry; tj. dané strategií jsou nejlepší odpovědí jedna na druhou bez ohledu na to, kterého uzlu ve stromu hry bylo dosaženo

☛ Příklad 3.

Vždy zrad – úplný rovnovážný bod

Půjčka za oplátku – rovnovážný bod, ale ne úplný

Tvrzení. Pro každé p ; $0 \leq p \leq 1$, existuje rovnovážný bod, v němž se p objevuje jako zlomek času, kdy dochází ke vzájemné spolupráci