

PŘÍKLADY – DVOJMATICOVÉ HRY

Příklad 1 – SOUTĚŽ O ZAKÁZKY

Investor chce vybudovat dva hotely. Jeden nazveme Velký (zkratka V); ze získání zakázky na něj se očekává zisk ve výši 30 milionů. Druhý nazveme Malý (zkratka M); ze získání zakázky na něj se očekává zisk ve výši 16 milionů.

O získání zakázek se ucházejí dvě firmy, které označíme jako 1 a 2. Žádná z firem nemá kapacitní možnosti na vybudování obou hotelů v plném rozsahu. Každá z firem se může u investora ucházet buď o stavbu jednoho z hotelů nebo nabídnout kooperaci na obou. Investor musí prostřednictvím obou firem stavbu hotelů realizovat a podle došlých nabídek rozdělí zakázky takto:

1. Jestliže se o jeden hotel uchází pouze jedna firma, získá celou tuto zakázku.
2. Jestliže se o jeden hotel ucházejí obě firmy a o druhý žádná, nabídne investor kooperaci oběma firmám na obou hotelech s tím, že se o provedení prací i o zisky budou dělit stejným dílem.
3. Jestliže se jedna z firem uchází o stavbu celého hotelu a druhá nabízí kooperaci na obou, získá firma, která nabízí realizaci celé stavby 70% a druhá 30%, jde-li o V. Jde-li o M, získá firma, která nabízí celou realizaci, 75% a druhá 25%. Na zbývajícím hotelu pak firmy kooperují stejným dílem a o zisk se dělí napůl.

Ať se firmy rozhodnou jakkoli, bude mezi ně vždy rozdělen celý potenciální zisk $30+16=46$ milionů.

Jaké nabídky je výhodné investorovi učinit, aby byl maximalizován celkový zisk ze zakázek?

Příklad 2 – OPTIMÁLNÍ MARKETING 1

Předpokládejme, že o dva trhy, A a B, se zajímají dvě firmy, 1 a 2. Na trhu A se očekávají zakázky představující zisk 150 milionů, na trhu B se očekávají zakázky představující zisk 90 milionů. Každá z firem má finanční prostředky buď na velkou propagační akci na kterémkoli z trhů, anebo na kampaň na obou trzích. Účinnost propagace obou firem je stejná a zakázky se rozdělují podle těchto pravidel:

1. Vede-li na trhu reklamní kampaň nábor pouze jedna firma, získá všechny zakázky tohoto trhu.
2. Vedou-li obě firmy na trhu akci téhož „typu“, popř. neprovádějí-li vůbec propagaci, získají obě firmy polovinu zakázek.
3. Vede-li jedna firma na trhu malý nábor a druhá velký, získá firma, která vede malý nábor, 1/3 zakázek a konkurující firma 2/3 zakázek.

Určete optimální strategie obou firem.

Příklad 3 – OPTIMÁLNÍ MARKETING 2

V příkladu 2 předpokládejme, že každá z firem má na propagaci částku M (částka je stejná pro obě firmy). Předpokládejme, že zvětšení zakázek probíhá podle pravidel uvedených v následující tabulce, která jsou stejná pro oba trhy:

Rozsah propagace	Zvýšení zakázek
$M/2$	+5%
M	+20%
$3M/2$	+40%
$2M$	+60%

Klíč pro dělení zakázek mezi firmy 1 a 2 je stejný jako v příkladu 5b. Sestavte model této rozhodovací situace a určete optimální strategie.

Příklad 4 – OPTIMÁLNÍ MARKETING 3

Dvě firmy mají zájem proniknout na trh do Prahy, Bratislavy a Brna. V Praze lze očekávat zisk 90 milionů korun, v Bratislavě 60 milionů korun a v Brně 36 milionů korun. První podnik má finanční zdroje na provedení velké reklamní kampaně v jednom z měst nebo na provedení malých kampaní ve dvou různých městech. Druhý podnik může investovat jen do malé kampaně v jednom z měst. Předpokládejme, že zisk je mezi firmami rozdělen podle následujících pravidel:

1. Jestliže v jednom městě povede kampaň (malou nebo velkou) jen jedna firma, získá celý zisk z tohoto města.
2. Povedou-li v jednom městě obě firmy malou kampaň, zisk si rozdělí rovným dílem.
3. Povede-li v jednom městě jedna firma velkou kampaň a druhá firma malou, pak firma s velkou kampaní získá $2/3$ zisku z tohoto města a firma s malou kampaní získá $1/3$ zisku z tohoto města.
4. Neprovádí-li v daném městě kampaň žádná firma, pak také žádná firma z tohoto města nezíská žádný zisk.

Nalezněte optimální strategie obou firem.

Příklad 5 – AUKCE – OBÁLKOVÁ METODA

Uvažujme aukci, kde dva se investoři ucházejí o tři různé nemovitosti. Každý z nich podá svou nabídku písemně v obálce, po vyhodnocení získá nemovitost ten investor, který nabídl více. Minimální prodejní cena (levněji je majitel neprodá) každého objektu je 10 milionů. Hodnoty nemovitostí jsou $s_1 = 40$ milionů, $s_2 = 22$ milionů, $s_3 = 20$ milionů. První investor má k dispozici částku 20 milionů, druhý 10 milionů. Pro jednoduchost uvažujme, že přijatelné nabídky jsou pouze v desítkách milionů, zde tedy 10 nebo 20.

Nalezněte optimální strategie pro oba investory.

Příklad 6 – AUKCE – OBÁLKOVÁ METODA

Uvažujme aukci, kde dva se investoři ucházejí o tři různé nemovitosti. Každý z nich podá svou nabídku písemně v obálce, po vyhodnocení získá nemovitost ten investor, který nabídl více. Minimální prodejní cena (levněji je majitel neprodá) každého objektu je 10 milionů. Hodnoty nemovitostí jsou $s_1 = 36$ milionů, $s_2 = 24$ milionů, $s_3 = 20$ milionů. První investor má k dispozici částku 20 milionů, druhý 10 milionů. Pro jednoduchost uvažujme, že přijatelné nabídky jsou pouze v desítkách milionů, zde tedy 10 nebo 20.

Příklad 7 – BOJ O ZÁKAZNÍKY

V jisté rekreační oblasti jsou dva hotely: U Krále a U Libuše. Oba hotely mají stejnou kapacitu, celková kapacita dvojnásobně převyšuje poptávku (všichni hosté mohou bydlet jen v jednom z nich). Až na vzácné a zanedbatelné výjimky pocházejí hosté z Německa, Polska a České republiky. Management každého z hotelů má prostředky na reklamní kampaň v jedné z uvedených zemí. Účinnost reklamní kampaně je u obou hotelů stejná. Pokud v zemi vede kampaň pouze jedna firma, pak získá všechny návštěvníky z této země a tím i následující zisk: v případě Německa 20 milionů, v případě Polska 16 milionů a v případě České republiky 14 milionů. Vedou-li v zemi kampaň obě firmy, anebo nevede-li kampaň žádná z nich, získá každá polovinu uvedeného zisku.

Určete optimální strategie pro obě firmy.

Příklad 8 – VYJEDNÁVÁNÍ O PLATECH

Představme si situaci, kdy skončí platnost pracovní smlouvy skupině zaměstnanců a je třeba dohodnout smlouvu novou – obě strany, tedy firma a zaměstnanci zastupovaní Svazem zaměstnanců, nyní budou vyjednávat. Zaměstnanci budou žádat vysoký plat, ale také zkrácení pracovní doby, více dovolené, lepší pracovní podmínky apod. Společnost se naopak bude snažit jakékoli další náklady minimalizovat. Předtím, než začne vyjednávání, se musí jednotlivé strany rozhodnout pro konkrétní strategii.

Možné strategie pro Svaz zaměstnanců:

- S_1 : Svaz není ochoten udělat žádný ústupek a snaží se všemi prostředky o dosažení cíle (pomocí stávek aj.).
- S_2 : Svaz je připraven slevit v některých bodech, ale má určité minimální požadavky, které bude požadovat za každou cenu (stávka aj.).
- S_3 : Svaz je ochoten vyjednávat a ponechává minimální požadavky k rozhodnutí nestranným zprostředkovatelem.
- S_4 : Svaz je ochoten dosáhnout svých cílů pouhým vyjednáváním, konfliktní kroky jsou vyloučeny.
- F_1 : Firma není ochotna udělat žádné ústupky, zaměstnance potrestá snížením platu, prodloužením pracovní doby, propuštěním aj.

F₂: Firma je připravena na kompromis v některých bodech. Nicméně má určité limity, nad které nepůjde a bude se bránit všemi prostředky.

F₃: Firma je ochotna ponechat konflikt k vyřešení expertní komisí jako zprostředkovatelem.

S₄: Firma se pokusí dosáhnout svých cílů pouhým vyjednáváním.

Uvažujme nyní, že nezávislý expert určí důsledky jednotlivých strategií; omezíme se pouze na případ vyjednávání o výši platu – za užitek zvolíme přímo peněžní jednotky.

Předpokládejme, že expert určil následující zisk Svazu zaměstnanců (a tedy zároveň ztrátu firmy):

	Firma				
	Strategie	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄
Svaz	S ₁	20	15	12	35
	S ₂	25	14	8	10
	S ₃	40	2	10	5
	S ₄	-5	4	11	0

Určete optimální strategie obou vyjednávajících stran.

Jak se změní situace, bude-li hodnota pro (S₃, F₃) rovna 19 místo 10?

Příklad 9 – KONFLIKT TYPU KUŘATA

Existují problémy, při jejichž řešení je důležitější, aby jednající strany neztratily svou prestiž, než problém sám. Model takové situace představuje hra

Hráč 1	Hráč 2		
	Strategie	Ústupnost	Neústupnost
	Ústupnost	(0,0)	(-5,5)
	Neústupnost	(5,-5)	(-100,-100)

Jestliže oba hráči ustoupí, je výsledek neutrální, jednostranná ústupnost vede ke ztrátě prestiže toho, kdo ustoupil, oboustranná neústupnost vede ke krajně nepříznivému výsledku u obou hráčů.

Název od následující „hry“: dva mladíci se baví tím, že se proti sobě rozjedou středem vozovky a kdo první uhne, ztratí prestiž. Pokud oba zvolí strategii neuhnout, skončí hra havárií.

Příklad 10 – KONFLIKT TYPU MANŽELSKÝ SPOR

Maruška	Pepíček		
	Strategie	Box	Balet
	Box	(2,1)	(0,0)
	Balet	(0,0)	(1,2)

Příklad 11

Předpokládejme, že dvě strany mezi sebou mají spor, přičemž každá ze stran může podniknout jednu z těchto tří akcí:

1. podat žalobu u soudu,
2. nabídnout společný postup,
3. navrhnout ústupek.

Následky jednotlivých akcí jsou takovéto:

Hráč 1	Hráč 2			
	Strategie	Žaloba	Společ.	Ústupek
	Žaloba	(-2,-3)	(9,-10)	(9,-10)
	Společ.	(-10,9)	(-5,30)	(0,0)
	Ústupek	(-10,9)	(0,0)	(5,6)

Diskutujeme možné strategie hráčů.

Příklad 12 – VĚŽŇOVO DILEMA

Věžňovo dilemma je model konfliktu, v němž obtížnost situace, v jinak přehledném střetnutí zájmů, spočívá v tom, že řešení pro obě strany výhodné sice existuje, ale je nedostupné vzhledem k tomu, že jednostranné porušení solidárního jednání vede k podstatné výhodě pro toho, kdo se odchýlil a k nevýhodě pro toho, kdo na oboustrannou solidárnost spoléhal:

Hráč 1	Hráč 2		
	Strategie	Zapírat	Přiznat
	Zapírat	(3,3)	(0,5)
	Přiznat	(5,0)	(1,1)

Například: dva pachatelé loupeže jsou zatčeni a uvěznění odděleně jeden od druhého. Při vyšetřování mají dvě strategie: Z – loupež zapírat, P – přiznat se. Jednostranné zapírání poškodí toho, kdo zapírá, neboť tomu, kdo se přizná, je to uznáno jako polehčující okolnost a tím, že se dostane dříve z vězení, získá ukrytý lup.

12. Nekooperativní hra dvou hráčů s nenulovým součtem je dána dvojmatricí

$$\begin{pmatrix} (-3, -2) & (-1, -2) & (8, 9) \\ (-1, -1) & (4, 4) & (-4, -3) \\ (8, 9) & (-1, -2) & (-3, -3) \end{pmatrix}.$$

Určete dvojice rovnovážných a dominujících strategií.

13. Nekooperativní hra dvou hráčů s nenulovým součtem je dána dvojmatricí

$$\begin{pmatrix} (-1, 3) & (1, 0) \\ (2, -1) & (0, 1) \\ (1, 1) & (-2, 1) \end{pmatrix}.$$

Vypočítejte maximinní hodnoty (nejmenší zaručené výhry) pro oba hráče.

14. Nekooperativní hra dvou hráčů s nenulovým součtem je dána dvojmatricí

$$\begin{pmatrix} (1, 1) & (0, 1) & (2, 0) \\ (1, 2) & (-1, -1) & (1, 2) \\ (2, -1) & (1, 0) & (-1, -1) \end{pmatrix}.$$

Určete rovnovážné a maximinní hodnoty pro oba hráče.

15. Nekooperativní hra dvou hráčů s nenulovým součtem je dána dvojmatricí

$$\begin{pmatrix} (-2, 3) & (-1, 1) & (1, -2) \\ (0, 1) & (-1, -2) & (1, 1) \\ (2, 2) & (2, -1) & (0, 0) \end{pmatrix}.$$

Vypočítejte maximinní hodnoty pro oba hráče.

16. Nekooperativní hra dvou hráčů s nenulovým součtem je dána dvojmatricí

$$\begin{pmatrix} (2, -3) & (-1, 3) \\ (0, 1) & (1, -2) \end{pmatrix}.$$

Určete rovnovážné a maximinní hodnoty pro oba hráče.

17. Nekooperativní hra dvou hráčů s nenulovým součtem je dána dvojmatricí

$$\begin{pmatrix} (2, -1) & (-1, 1) \\ (0, 2) & (1, -1) \end{pmatrix}.$$

Určete rovnovážné a maximinní hodnoty pro oba hráče.

18. Nekooperativní hra dvou hráčů s nenulovým součtem je dána dvojmatricí

$$\begin{pmatrix} (2, 1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (1, 5) \end{pmatrix}.$$

Určete rovnovážné a maximinní hodnoty pro oba hráče.

19. Uvažujte nekooperativní hru určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (-3, -2) & (-1, -2) & (8, 9) \\ (-1, -1) & (4, 4) & (-4, -3) \\ (8, 9) & (-1, -2) & (-3, -3) \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že tato hra nemá řešení v ryzích strategiích, odvozené pomocí pojmů rovnovážné strategie, dominování a záměnnost. Prověřte správnost tohoto tvrzení: Ve hře je optimální, jestliže hráči volí dvojici rovnovážných strategií $(2, 2)$, neboť v tomto případě je výhra obou hráčů vyšší než je jejich střední hodnota výhry v situaci, kdy oba hráči volí strategie 1 a 3 s pravděpodobností $1/2$, ve snaze sejít sena dominujících dvojicích rovnovážných strategií. Je možné tuto úvahu systematicky propracovat tak, aby z ní vznikl další dodatečný princip pro řešení neantagonistických nekooperativních her?

20. Dokažte toto tvrzení: Jestliže je dvojmaticová hra určena maticemi A a B a jestliže ke všem prvkům matice A přičteme číslo c a ke všem prvkům matice B přičteme číslo d , rovnovážné strategie smíšeného rozšíření hry s maticemi A a B a rovnovážné strategie smíšeného rozšíření hry s maticemi s přičtenými čísly c a d jsou stejné.

21. Uvažujte dvojmaticovou hru určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (2, 1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (1, 2) \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že dvojice strategií $\bar{\mathbf{x}} = (1/3, 2/3)$, $\bar{\mathbf{y}} = (2/3, 1/3)$ a $\bar{\bar{\mathbf{x}}} = (2/3, 1/3)$, $\bar{\bar{\mathbf{y}}} = (1/3, 2/3)$ jsou rovnovážné. Dále ukažte, že konvexní kombinace

$$\mathbf{x} = k_1 \bar{\mathbf{x}} + k_2 \bar{\bar{\mathbf{x}}} \quad \text{a} \quad k_1 \bar{\mathbf{y}} + k_2 \bar{\bar{\mathbf{y}}}, \quad k_1 \geq 0, \quad k_2 \geq 0, \quad k_1 + k_2 = 1$$

obecně netvoří rovnovážné dvojice strategií v uvažované hře.

22. Rozhodněte, zda pro hry dvou hráčů s nekonstantním součtem je pravdivé toto tvrzení: Jestliže existuje jediná dvojice rovnovážných strategií, pak pro hodnoty charakteristické funkce platí: $v(\{1\}) = \bar{v}(\{1\})$, $v(\{2\}) = \bar{v}(\{2\})$.
23. U her, pro jejichž charakteristickou funkci platí $v(\{1\}) + v(\{2\}) = v(\{1, 2\})$, je výsledek konfliktu pro oba hráče stejný, ať jej považují za konflikt s přenosnou nebo nepřenosnou výhrou. Může obdobný případ nastat i u podstatných her?