Stabilita systémů

Jan Přikryl

20. května 2004

1 Stabilita spojitého systému

Lineární časově invariantní (LTI) systém, popsaný přenosovou funkcí

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{M}(p - p_{0i})}{\prod_{i=1}^{N}(p - p_{\infty i})} \qquad (1)$$

je

- *stabilní*, pokud póly přenosové funkce leží v levé polorovině komplexní roviny,
- *nestabilní*, pokud alespoň jeden pól přenosové funkce $H(p)$ leží v pravé polorovině komplexní roviny,
- *na mezi stability*, pokud jeho pól leží na imaginární ose komplexní roviny.

Je to trošku zjednodušené, ale pro naše účely to takto snad postačí.

Mějme LTI systém popsaný rovnicí

$$y''(t) + m \cdot y'(t) + n \cdot y(t) = u(t) \qquad (2)$$

kde $u(t) = \mathbf{1}(t)$ a s nulovými počátečními podmínkami, $y'(0) = y(0) = 0$. Zkusme zjistit, pro jaká m a n bude systém stabilní, nestabilní a na mezi stability.

Přenosová funkce systému popsaného rovnicí (2) bude

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + mp + n}. \qquad (3)$$

Zajímá nás poloha pólů přenosové funkce. Polohu můžeme vyšetřit buď použitím rozkladu

$$p^2 + mp + n = (p - p_{\infty 1})(p - p_{\infty 2}), \qquad (4)$$

kde platí

$$\begin{aligned} p_{\infty 1} p_{\infty 2} &= n \\ p_{\infty 1} + p_{\infty 2} &= -m \end{aligned}$$

a nebo použitím klasického vzorce pro řešení kvadratické rovnice,

$$p_{\infty 1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{2}. \qquad (5)$$

Projděme si postup s využitím tohoto vzorce, postup řešení podle zápisu (2) je podobný, podle mého názoru však kostrbatější.

Pro vyhodnocení stability systému (2) nás zajímá, jestli reálné části pólů přenosové funkce (3) jsou všechny záporné (pak je systém stabilní) nebo má-li alespoň jeden pól reálnou část kladnou (pak půjde o systém nestabilní). Řešení se nám rozpadá na tři rozdílné případy podle toho, jaké hodnoty bude nabývat výraz pod odmocninou ve vzorci (5):

$m^2 < 4n$: V tomto případě dá odmocnina imaginární složku dvou komplexně sdružených kořenů a pro reálnou část platí

$$\Re(p_{\infty 1,2}) = -\frac{m}{2}.$$

Protože $4n > m^2$, je nutně $n > 0$. Zvolíme-li $m \in (0, 2\sqrt{n})$, dostáváme stabilní systém, pro $m \in (-2\sqrt{n}, 0)$ dostáváme systém nestabilní. Pro $m = 0$ půjde o systém na mezi stability, jehož přenosová funkce má dva komplexně sdružené imaginární póly.

$m^2 = 4n$: Výraz pod odmocninou je roven nule, platí

$$p_{\infty 1,2} = -\frac{m}{2}$$

a pokud $n \neq 0$, pro $m = -2\sqrt{n}$ dostáváme stabilní systém a pro $m = 2\sqrt{n}$ systém nestabilní. Pro $n = 0$ je $m = 0$ a přenosová funkce má dvojnásobný pól v nule – systém je na mezi stability.

$m^2 > 4n$: Zde je situace komplikovanější, póly leží oba na reálné ose. Aby systém byl stabilní, musí platit

$$p_{\infty 1,2} < 0$$

a tedy

$$-m \pm \sqrt{m^2 - 4n} < 0$$

(jenom pro pořádek: celý výraz na pravé straně (5) jsme vynásobili dvěma, což na nerovnosti nic nezmění). Vzhledem k tomu, že

$$-m + \sqrt{m^2 - 4n} > -m - \sqrt{m^2 - 4n},$$

stačí, když pro stabilní systém splníme podmínku

$$-m + \sqrt{m^2 - 4n} < 0, \qquad (6)$$

a podmínka

$$-m - \sqrt{m^2 - 4n} < 0,$$

bude splněna automaticky.

Podmínka (6) bude splněna pouze v případě, kdy $m > 0$ a výraz pod odmocninou bude menší, než m^2, což je splněno pro $n \in (0, \frac{1}{4}m^2)$.

Sečteno podtrženo: Systém popsaný rovnicí (2) bude stabilní, pokud $m > 0 \wedge n > 0$. Na mezi stability se bude systém nalézat, pokud $m = 0 \wedge n \geq 0$. Pro ostatní volby m a n půjde o systém nestabilní.

2 Stabilita diskrétního systému

Diskrétní LTI systém, popsaný přenosovou funkcí

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{M}(1 - z_{0i}z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N}(1 - z_{\infty i}z^{-1})} \qquad (7)$$

je

- *stabilní*, pokud všechny póly přenosové funkce leží uvnitř jednotkové kružnice z,
- *nestabilní*, pokud alespoň jeden pól přenosové funkce $H(z)$ leží vně jednotkové kružnice,
- *na mezi stability*, pokud jeho pól leží na jednotkové kružnici.

3 Vnitřní a vnější popis systému

Bližší podrobnosti máte uvedeny ve skriptech, zde chci zmínit pouze to, že vnější popis diferenciální rovnicí n-tého řádu lze převést na vnitřní popis pomocí n diferenciálních rovnic prvního řádu a rovnice pro výstup. Vnitřní (stavový) popis lze zapsat v maticovém tvaru jako

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathrm{d}u(t) \end{aligned}$$

V Simulinku lze vnitřní popis odsimulovat blokem `state space`. Parametry spojitého systému lze určit pomocí funkce `tf2ss()`. U diskrétních LTI systémů je to obdobné, viz nápověda v Matlabu.

4 Blokové zapojení

Podívejte se do skript MSP na kapitolu 7, kde jsou uvedeny vztahy pro *kaskádní*, *paralelní* a *zpětnovazební* řazení subsystémů. Nezapomeňte na to, že zpětná vazba může být kladná nebo záporná.

Napište přenosovou funkci následujícího bloku.