

Příklady na Z-transformaci

Jan Přikryl

21. května 2004

Vím, že někteří se dožadovali příkladů řešených do posledních podrobností, ale u těch, které jsou uvedeny níže, myslím není třeba příliš pokynů k řešení. Vzhledem k výsledkům písemek z Laplaceovy transformace vám vřele doporučuji:

- procvičit si ještě jednou rozklad na parciální zlomky
- procvičit si algebraické úpravy rovnic

1 Příklad 1

$$\begin{aligned}x(n+2) + 3x(n+1) + 2x(n) &= 6 \cdot \mathbf{1}(n) \\x(0) &= 1 \\x(1) &= -1\end{aligned}$$

Rovnici převedeme na

$$z^2 X(z) - z^2 + z + 3zX(z) - 3z + 2X(z) = 6 \cdot \frac{z}{z-1}$$

a dále upravíme na

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{2z}{z+2} - \frac{2z}{z+1}$$

a z toho

$$x(n) = 1 + 2 \cdot (-2)^n - 2 \cdot (-1)^n.$$

2 Příklad 2

$$\begin{aligned}x(n+2) + 3x(n+1) + 2x(n) &= (-2)^n \\x(0) &= 1 \\x(1) &= -4\end{aligned}$$

Rovnici převedeme a upravíme na

$$X(z) = \frac{z(z+2)}{(z+1)(z+2)} + \frac{z}{(z+1)(z+2)^2} = \frac{2z}{z+1} - \frac{z}{z+2} - \frac{z}{(z+2)^2}$$

a z toho

$$x(n) = 2 \cdot (-1)^n - (-2)^n - n \cdot (-2)^n.$$

3 Příklad 3

$$\begin{aligned}x(n+3) + 7x(n+2) + 16x(n+1) + 12x(n) &= 0 \\x(0) &= 1 \\x(1) &= 0 \\x(2) &= -1\end{aligned}$$

Rovnici převedeme na

$$z^3 X(z) - z^3 + z + 7z^2 X(z) - 7z^2 + 7z + 16zX(z) - 16z + 12X(z) = 0$$

a dále upravíme na

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2 + 7z + 15}{z^3 + 7z^2 + 16z + 12} = \frac{z^2 + 7z + 15}{(z+3)(z+1)^2} = \frac{5}{(z+2)^2} - \frac{2}{z+2} + \frac{3}{z+3}.$$

Transformovaný výsledek je

$$X(z) = \frac{5z}{(z+2)^2} - \frac{2z}{z+2} + \frac{3z}{z+3}$$

a z toho

$$x(n) = \frac{5}{2}n \cdot (-2)^n - 2(-2)^n + 3(-3)^n = -5n(-2)^{n-1} + (-2)^{n+1} - (-3)^{n+1}$$

Tak si to užijte.