

Řetězové zlomky I

prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc.

vlcek@fd.cvut.cz

22. listopadu 2007

Řetězové zlomky I

1. Ještě jednou Euklidův algoritmus
2. Definice řetězových zlomků

Ještě jednou Euklidův algoritmus

Hledejme nejvyššího společného dělitele čísel $u = 85$ a $v = 15$ pomocí Euklidova algoritmu.

krok	u	v
0	85	15
1	70	15
2	55	15
3	40	15
4	25	15
5	10 15	15 10
6	5 10	10 5
7	5	5
8	0	5

Jednoduchým pozorováním uvedeného algoritmu můžeme zjistit, že

$$\frac{85}{15} = 5 + \frac{1}{1 + \frac{5}{10}} = 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$$

Ještě jednou Euklidův algoritmus - cont.

Dělení dvou celých čísel $u = 85$ a $v = 15$ se zbytkem z dává v prvním kroku

$$85 = u_0 = q_0 \times v_0 + z_0 = 5 \times 15 + 10.$$

Opakujeme tento proces až obdržíme nulový zbytek.

Používáme dělitele $v_0 = u_1 = 15$ a zbytek $z_0 = v_1 = 10$ a platí

$$15 = u_1 = q_1 \times v_1 + z_1 = 1 \times 10 + 5.$$

Nakonec pro $u_2 = 10$ a $v_2 = 5$ platí

$$10 = u_2 = q_2 \times v_2 + z_2 = 2 \times 5 + 0.$$

Proces skončí vždy, protože zbytky tvoří klesající posloupnost celých čísel. Poslední nenulový zbytek, v našem případě $z_1 = 5$, je nejvyšším společným dělitelem.

Příklad 1

Nalezněte nevyššího společného dělitele čísel 10166 a 988. Protože postupně platí

$$10166 = 10 \times 988 + 286$$

$$988 = 3 \times 286 + 130$$

$$286 = 2 \times 130 + 26$$

$$130 = 5 \times 26 + 0$$

je nejvyšším společným dělitelem 26 a odpovídající řetězový zlomek má tvar

$$\frac{10166}{988} = 10 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}} \quad (1)$$

Tento výsledek říká dále, že $\frac{10166}{988} = \frac{391 \times 26}{38 \times 26}$ a že čísla 391, 38 jsou již nesoudělná, tj.

$$\gcd(391, 38) = 1.$$

Definice řetězových zlomků

anglicky - Continued Fractions

německy - Kettenbrüche

Výraz tvaru

$$r = q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2 + \frac{p_3}{q_3 + \frac{p_4}{q_4 + \cdots}}}} \quad (2)$$

nazýváme řetězovým zlomkem.

Pokud jsou všechna $p_k = 1$ jedná se o pravý řetězový zlomek

$$r = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{q_4 + \cdots}}}}, \quad (3)$$

pro který používáme značení

$$r = [q_0; q_1, q_2, q_3, q_4, \dots] \quad (4)$$

Sblíženým zlomkem řádu k rozumíme konečný zlomek

$$r_k = [q_0; q_1, q_2, q_3, \dots q_k] \quad (5)$$

Definice řetězových zlomků - cont.

Řetězový zlomek ...

- je konečný právě tehdy, jestliže reprezentuje racionální číslo
- je nekonečný právě tehdy, jestliže reprezentuje iracionální číslo
- je konečný, například při hledání soudělnosti čísel - Euklidův algoritmus
- je nekonečný například pro

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

Příklad 1

Odvod'te tvar nekonečného řetězového zlomku pro reprezentaci čísla $\sqrt{2}$.

Řešení

Tvar řetězového zlomku pro $\sqrt{2}$ vyplývá z identity

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Například sblížený zlomek řádu 5 dává

$$\sqrt{2} \approx \frac{41}{29} = 1.413793\dots$$

Příklad 2

Odvod'te tvar nekonečného řetězového zlomku pro $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.61803398874989 \equiv 2 \cos(\pi/5)$.

Tato hodnota udává je tzv. zlatý řez a je řešením klasické úlohy poměrů stran obdélníka tak, aby

$$\frac{b}{a} = \frac{b + a}{b}.$$

Označíme-li poměr větší strany obdélníka ku menší $z = \frac{b}{a}$ odbržíme kvadratickou rovnici

$$z = 1 + \frac{1}{z} \Rightarrow z^2 = z + 1$$

jejíž řešení jsou

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Slavná Fibonacciho posloupnost čísel $\{f(n)\}$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...

má tu vlastnost, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{f(n-1)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.61803398874989 \dots$$



Příklad 2 - cont.

Tvar odvozené rovnice

$$z = 1 + \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

již vede na řetězový zlomek

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} \quad (6)$$

Příklad 3

Odvoďte algoritmus, kterým lze vyjádřit π ve tvaru řetězového zlomku.

Řešení příkladu 3

Vyjdeme-li z numerické hodnoty

$$\pi = 3.14159265358979$$

dostáváme postupně

$$\begin{aligned} 3.14159265358979 &= 3 + 0.14159265358979 \\ &= 3 + \frac{1}{7.06251330593105} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7.06251330593105 &= 7 + 0.06251330593105 \\ &= 7 + \frac{1}{15.99659440668410} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15.99659440668410 &= 15 + 0.99659440668410 \\ &= 15 + \frac{1}{1.00341723101500} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.00341723101500 &= 1 + 0.00341723101500 \\ &= 1 + \frac{1}{292.6345908750125} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 292.6345908750125 &= 292 + 0.6345908750125 \\ &= 292 + \frac{1}{1.57581843574461} \end{aligned}$$

...

Řetězový zlomek pro π bude mít potom tvar

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \dots}}}}} \quad (7)$$

a konečné součty řetězového zlomku dávají racionální aproximace

$$\begin{aligned} \pi &\approx \frac{3}{1} = 3 \\ \pi &\approx \frac{22}{7} = 3.14285714285714 \\ \pi &\approx \frac{333}{106} = 3.14150943396226 \\ \pi &\approx \frac{355}{113} = 3.14159292035398 \\ &\dots \end{aligned}$$

Číslo π lze pomocí řetězových zlomků vyjádřit mnoha způsoby, například

$$\pi = 3 + \frac{1}{6 + \frac{9}{6 + \frac{25}{6 + \frac{49}{6 + \frac{81}{6 + \dots}}}}}$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{5 + \frac{9}{7 + \frac{16}{9 + \frac{25}{11 + \dots}}}}}$$

Platí, že odmocnina čísla N , které nemá celočíselnou odmocninu $N \neq n^2$, můžeme vyjádřit řetězovým zlomkem

$$\sqrt{N} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \dots}}}},$$

kde a je nejvyšší celé číslo pro které platí

$$a^2 < N \text{ a } b = N - a^2.$$

Podívejte se na stránku literatura. tam najdete také, jak se řetězovými zlomky zabývají studenti na MIT.