

Řetězové zlomky II

prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc.

vlcek@fd.cvut.cz

29. listopadu 2007

Řetězové zlomky II

1. Rekurentní algoritmus pro řetězové zlomky
2. Vztah mezi řetězovým zlomkem a nekonečnou řadou

Definice řetězových zlomků - cont.

Konečný řetězový zlomek má k -tý součet, tzv. **sblížený zlomek**

$$S_k = q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2 + \frac{p_3}{q_3 + \frac{p_4}{q_4 + \dots + \frac{p_k}{q_k}}}}} \quad (1)$$

První sblížené zlomky jsou

$$S_1 = q_0 + \frac{p_1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + p_1}{q_1} \equiv \frac{A_1}{B_1}$$

$$S_2 = q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2}} = \frac{q_0 q_1 q_2 + q_0 p_2 + p_1 q_2}{q_1 q_2 + p_2} \equiv \frac{A_2}{B_2}.$$

Rekurentní algoritmus pro řetězové zlomky

Pro čitatele A_k a jmenovatele B_k k -tého sblíženého zlomku $S_k = \frac{A_k}{B_k}$ platí pro $k \geq 1$ rekurentní formule

$$A_k = q_k A_{k-1} + p_k A_{k-2}$$

$$B_k = q_k B_{k-1} + p_k B_{k-2}$$

s počátečními podmínkami

$$A_{-1} = 1, \quad A_0 = q_0, \quad B_0 = 1, \quad B_1 = q_1.$$

Například tak platí

$$A_1 = q_1 A_0 + p_1 A_{-1} = q_1 q_0 + p_1$$

$$B_1 = q_1 B_0 + p_1 B_{-1} = q_1$$

$$A_2 = q_2 A_1 + p_2 A_0 = q_2 q_1 q_0 + q_2 p_1 + q_0 p_2$$

$$B_2 = q_2 B_1 + p_2 B_0 = q_2 q_1 + p_2$$

Nekonečná řada z řetězového zlomku

Rozdíl dvou následujících sblížených zlomků je

$$\begin{aligned}\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} - \frac{A_k}{B_k} &= \frac{A_{k+1}B_k - A_kB_{k+1}}{B_kB_{k+1}} \\&= \frac{(q_{k+1}A_k + p_{k+1}A_{k-1})B_k}{B_kB_{k+1}} \\&\quad - \frac{A_k(q_{k+1}B_k + p_{k+1}B_{k-1})}{B_kB_{k+1}} = \\&= \frac{-p_{k+1}(A_kB_{k-1} - A_{k-1}B_k)}{B_kB_{k+1}} = \\&= -p_{k+1} \left[\frac{(q_kA_{k-1} + p_kA_{k-2})B_{k-1}}{B_kB_{k+1}} \right. \\&\quad \left. - \frac{A_{k-1}(q_kB_{k-1} + p_kB_{k-2})}{B_kB_{k+1}} \right] = \\&= \frac{p_{k+1}p_k(A_{k-1}B_{k-2} - A_{k-2}B_{k-1})}{B_kB_{k+1}} = \\&\vdots\end{aligned}$$

S použitím rekurentní formulí tak dostáváme

$$\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} - \frac{A_k}{B_k} = (-1)^k \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{k+1}}{B_k B_{k+1}},$$

a tedy

$$\begin{aligned} \frac{A_1 B_0 - A_0 B_1}{B_1 B_2} &= \frac{p_0 \cdot p_1}{B_0 B_1} = \frac{p_1}{B_1}, \\ \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{B_1 B_2} &= -\frac{p_1 \cdot p_2}{B_1 B_2}, \\ \frac{A_3 B_2 - A_2 B_3}{B_2 B_3} &= \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3}{B_2 B_3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Protože

$$\begin{aligned} \frac{A_k}{B_k} &= \left(\frac{A_k}{B_k} - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} \right) + \left(\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} - \frac{A_{k-2}}{B_{k-2}} \right) + \dots \\ &\quad \dots + \left(\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_0}{B_0} \right) + \frac{A_0}{B_0} \end{aligned}$$

můžeme snadno odvodit

$$\frac{A_k}{B_k} = q_0 + \frac{p_1}{B_1} - \frac{p_1 p_2}{B_1 B_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{B_2 B_3} + \dots$$

$$\dots + (-1)^k \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{k+1}}{B_k B_{k+1}}$$

Sblížené zlomky jsou částečnými součty nekonečné řady

$$q_0 + \frac{p_1}{B_1} - \frac{p_1 p_2}{B_1 B_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{B_2 B_3} - \frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{B_3 B_4} - \dots$$

Pro pravý řetězový zlomek je

$$q_0 + \frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_1 B_2} + \frac{1}{B_2 B_3} - \frac{1}{B_3 B_4} - \dots$$

Nekonečná řada vyjádřená řetězovým zlomkem

Nechť

$$\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} - \dots \quad (2)$$

je nekonečná konvergentní řada s c_k přirozenými čísly.

Chceme nalézt p_k a q_k přirozená čísla tak, aby nekonečná řada (2) byla shodná s

$$\frac{p_1}{B_1} - \frac{p_1 p_2}{B_1 B_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{B_2 B_3} - \frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{B_3 B_4} - \dots$$

Řešení

Položme $p_1 = 1$ a $q_1 = B_1 = c_1$.

Dále nalezneme podíl dvou následujících členů

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{B_{k+1}}{B_{k-1} \times p_{k+1}}.$$

Protože pro B_{k+1} platí rekurentní relace

$$B_{k+1} = q_{k+1} \times B_k + p_{k+1} \times B_{k-1},$$

můžeme psát

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{B_{k+1}}{B_{k-1} \times p_{k+1}} = \frac{B_k \times q_{k+1}}{B_{k-1} \times p_{k+1}} + 1,$$

nebo také

$$\frac{B_k}{B_{k-1}} = \frac{(c_{k+1} - c_k) \times p_{k+1}}{c_k \times q_{k+1}}.$$

Odtud

$$\begin{aligned} \frac{(c_{k+1} - c_k)p_{k+1}}{c_k q_{k+1}} &= \frac{B_k}{B_{k-1}} = \frac{q_k B_{k-1} + p_k B_{k-2}}{B_{k-1}} \\ &= q_k + p_k \frac{c_{k-1} q_k}{(c_k - c_{k-1}) p_k}. \end{aligned}$$

Z těchto vztahů nakonec obdržíme

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1} q_k} = \frac{c_k^2}{(c_{k+1} - c_k)(c_k - c_{k-1})}.$$

Protože požadujeme, aby p_k a q_k byla přirozená čísla, můžeme toho dosáhnout přirozenou volbou

$$p_{k+1} = c_k^2 \quad q_{k+1} = c_{k+1} - c_k$$

Tuto formuli odvodil, kdo jiný než Euler v roce 1748.

$$\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} - \dots =$$

$$\frac{1}{c_1 + \frac{c_1^2}{c_2 - c_1 + \frac{c_2^2}{c_3 - c_2 + \frac{c_3^2}{c_4 - c_3 + \dots}}}}$$

Příklad - Odvod'te tvar řetězového zlomku pro $\frac{\pi}{4}$ s použitím rozvoje funkce $\arctan(x)$ do nekonečné řady.

Řešení

Protože platí

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

obdržíme pro $x = \frac{\pi}{4}$ slavnou Leibnitzovu formuli (1682)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}.$$

Můžeme pravděpodobně souhlasit s Leibnitzem, který prohlásil, že "Bůh miluje lichá čísla". Po několika iteracích však dojdeme k závěru, že k vyčíslení čísla π je tato suma krajně nevhodná.

Abychom získali $\frac{\pi}{4}$ na 7 platných cifer musíme použít 5 miliónů členů této řady. Proto se snažíme nalézt efektivnější metody nalezení čísla π . Uvedenou řadu převedeme na řetězový zlomek

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots =$$

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 \dots}}}}}}$$

v očekávání, že řetězový zlomek bude vhodnějším algoritmem pro vyčíslení.

Výkonnější algoritmus výpočtu čísla π lze nalézt s využitím součtových vzorců pro funkci

$$\arctan u + \arctan v = \arctan \frac{u + v}{1 - uv}.$$

Jedna z těchto formulí je Eulerův vztah z roku 1738

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right).$$

V roce 1706 John Machin našel formuli

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right),$$

která umožňuje velmi efektivní počítání čísla π .

Děkuji za pozornost

