

Řetězové zlomky.

Matematické algoritmy (K611MA)

Jan Příkryl, Miroslav Vlček

9. přednáška K611MA
čtvrtek 26. listopadu 2009

verze: 2009-11-26 01:01

1 Řetězové zlomky

1.1 Úvod

Řetězový zlomek Co to je

Racionální čísla – mnohá z nich nejdou reprezentovat vhodně jako čísla reálná.

Iracionální čísla – pouze aproximace, ale jak jsou tyto aproximace přesné.

Lze vyjádřit racionální a iracionální číslo jako posloupnost celých čísel?

Existuje „optimální“ aproximace racionálních a iracionálních čísel?

Princip řetězového zlomku Ještě jednou Euklidův algoritmus

Hledáme $\gcd(85, 15)$:

krok	u	v
-	85	15
1	70	15
2	55	15
3	40	15
4	25	15
5	$\frac{10}{15}$	$\frac{15}{10}$
6	$\frac{5}{10}$	$\frac{10}{5}$
7	5	5
8	0	5

Výsledný podíl lze vyjádřit také jako

$$\begin{aligned}\frac{85}{15} &= 5 + \frac{10}{15} = \\ &= 5 + \frac{1}{\frac{15}{10}} = \\ &= 5 + \frac{1}{1 + \frac{5}{10}} = \\ &= 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Princip řetězového zlomku Postup Euklidova algoritmu

Dělení dvou celých čísel $u_0 = 85$ a $v_0 = 15$ se zbytkem z dává v prvním kroku

$$85 = u_0 = q_0 \cdot v_0 + z_0 = 5 \cdot 15 + 10.$$

Opakujeme tento proces až obdržíme nulový zbytek.

1. Dělenec $u_1 = v_0 = 15$, dělitel $v_1 = z_0 = 10$:

$$15 = u_1 = q_1 \cdot v_1 + z_1 = 1 \cdot 10 + 5.$$

2. pro $u_2 = 10$ a $v_2 = 5$ platí

$$10 = u_2 = q_2 \cdot v_2 + z_2 = 2 \cdot 5 + 0.$$

Zbytky tvoří klesající posloupnost celých čísel $\Rightarrow$ proces skončí vždy.

Poslední nenulový zbytek, v našem případě $z_1 = 5$, je nejvyšším společným dělitelem.

Princip řetězového zlomku Postup Euklidova algoritmu

Příklad 1. Nalezněte nejvyššího společného dělitele čísel 10166 a 988.

Postupně platí

$$10\,166 = 10 \cdot 988 + 286$$

$$988 = 3 \cdot 286 + 130$$

$$286 = 2 \cdot 130 + 26$$

$$130 = 5 \cdot 26 + 0$$

Nejvyšším společným dělitelem je 26.

Princip řetězového zlomku Tvorba členů zlomku

Odpovídající řetězový zlomek má tvar

$$\frac{10\,166}{988} = 10 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}}$$

Tento výsledek říká dále, že $\frac{10\,166}{988} = \frac{391 \cdot 26}{38 \cdot 26}$ a že čísla 391 a 38 jsou již nesoudělná,

$$\gcd(391, 38) = 1.$$

1.2 Definice

Řetězové zlomky Definice

Definice 2. Řetězový zlomek Výraz tvaru

$$r = q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2 + \frac{p_3}{q_3 + \frac{p_4}{q_4 + \cdots}}}}$$

nazýváme **nekonečným řetězovým zlomkem**.

Řetězové zlomky Definice

Definice 3. Pravý řetězový zlomek Pokud jsou všechna $p_k = 1$, jedná se o **pravý řetězový zlomek**

$$r = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{q_4 + \cdots}}}}$$

Značíme $[q_0; q_1, q_2, q_3, q_4, \dots]$

Řetězové zlomky Vlastnosti

Definice 4. Řetězový zlomek, jehož rozvoj končí n -tým členem, nazýváme **konečným řetězovým zlomkem řádu n** . Konečný pravý řetězový zlomek značíme $[q_0; q_1, q_2, \dots, q_n]$.

Definice 5. Pro $1 \leq k < n$ nazýváme **úsekem řádu k** řetězový zlomek, který vznikne vynecháním posledních $n - k$ členů.

Řetězové zlomky Vlastnosti

Vlastnosti:

- je konečný právě tehdy, jestliže reprezentuje racionální číslo (například při hledání soudělnosti čísel Euklidovým algoritmem)
- je nekonečný právě tehdy, jestliže reprezentuje iracionální číslo, například pro

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}}}$$

Příklady výpočtu řetězových zlomků Výpočet $\sqrt{2}$

Příklad 6. Tvar řetězového zlomku pro $\sqrt{2}$ vyplývá z identity

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Například úsek řádu 5 dává

$$\sqrt{2} \approx s_5 = \frac{41}{29} = 1,413793 \dots$$

Příklady výpočtu řetězových zlomků Zlatý řez (1/3)

Definice 7. Hodnota **zlatého řezu** je řešením klasické úlohy poměrů stran obdélníka tak, aby $\frac{b}{a} = \frac{b+a}{b}$. Označíme-li poměr větší strany obdélníka ku menší $z = \frac{b}{a}$, obdržíme kvadratickou rovnici

$$z = 1 + \frac{1}{z} \Rightarrow z^2 = z + 1$$

jejíž řešení jsou

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Odvoďte tvar nekonečného řetězového zlomku pro $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803398874989 = 2 \cos(\pi/5)$.

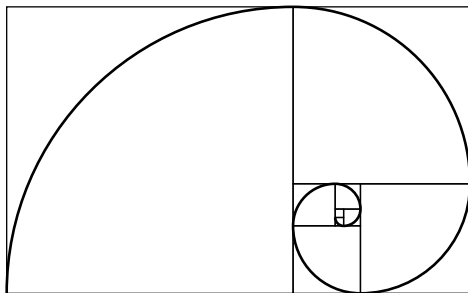
Příklady výpočtu řetězových zlomků Zlatý řez (2/3)

Pro Fibonacciho posloupnost

$$\{F_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots\}$$

platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803398874989 \dots$$



Příklady výpočtu řetězových zlomků Zlatý řez (3/3)

Tvar odvozené rovnice

$$z = 1 + \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

již vede na řetězový zlomek

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Ale pozor, číslo

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

už podobným způsobem nevyjádříme. V případě, že má kvadratická rovnice dva reálné kořeny, řetězový zlomek bude vždy konvergovat k tomu kořenu, jenž má větší absolutní hodnotu.

Příklady výpočtu řetězových zlomků Algoritmus reprezentace čísla π (1/4)

Vyjdeme-li z numerické hodnoty $\pi = 3,14159265358979 \dots$, dostáváme postupně

$$\begin{aligned}
 3,14159265358979 &= 3 + 0,14159265358979 = 3 + \frac{1}{7,06251330593105} \\
 7,06251330593105 &= 7 + 0,06251330593105 = 7 + \frac{1}{15,99659440668410} \\
 15,99659440668410 &= 15 + 0,99659440668410 = 15 + \frac{1}{1,00341723101500} \\
 1,00341723101500 &= 1 + 0,00341723101500 = 1 + \frac{1}{292,6345908750125} \\
 292,6345908750125 &= 292 + 0,6345908750125 = 292 + \frac{1}{1,57581843574461} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Příklady výpočtu řetězových zlomků Reprezentace čísla π (2/4)

Řetězový zlomek pro π bude mít tvar

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

Příklady výpočtu řetězových zlomků Reprezentace čísla π (3/4)

Konečné součty řetězového zlomku dávají racionální aproximace

$$\begin{aligned}
 \pi \approx s_1 &= \frac{3}{1} = 3 \\
 \pi \approx s_2 &= \frac{22}{7} = 3.14285714285714 \\
 \pi \approx s_3 &= \frac{333}{106} = 3.14150943396226 \\
 \pi \approx s_4 &= \frac{355}{113} = 3.14159292035398 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Příklady výpočtu řetězových zlomků Reprezentace čísla π (4/4)

Číslo π lze pomocí řetězových zlomků vyjádřit mnoha způsoby, například

$$\pi = 3 + \frac{1}{6 + \frac{9}{6 + \frac{25}{6 + \frac{49}{6 + \frac{81}{6 + \dots}}}}}$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{5 + \frac{9}{7 + \frac{16}{9 + \frac{25}{11 + \dots}}}}}$$

Výpočet $\sqrt{N} \notin \mathbb{N}$ Algoritmus

Odmocninu čísla N , které nemá celočíselnou odmocninu $N \neq n^2, n \in \mathbb{N}$, můžeme vyjádřit řetězovým zlomkem

$$\sqrt{N} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \dots}}}},$$

kde a je nejvyšší celé číslo, pro které platí $a^2 < N$, a kde $b = N - a^2$.

Výpočet $\sqrt{N} \notin \mathbb{N}$ Příklad opět na $\sqrt{2}$ a nově $\sqrt{6}$

Pro $\sqrt{2}$ máme $a = 1$ a $b = 1$.

Pro $\sqrt{6}$ máme $a = 2$ a $b = 2$ a výsledný zlomek bude

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{2}{4 + \frac{2}{4 + \frac{2}{4 + \frac{2}{4 + \dots}}}}$$

2 Sblížené zlomky

Sblížené zlomky Definice

Mějme polynomy $\mathbf{A}_n$ a $\mathbf{B}_n$ s celočíselnými koeficienty takové, že pro každé $q_0 \in \mathbb{Z}$, $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{N}$ a $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ platí

$$q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2 + \frac{p_3}{q_3 + \frac{p_4}{q_4 + \dots}}}} = \frac{\mathbf{A}_n(q_0, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)}{\mathbf{B}_n(q_0, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)}.$$

Definice 8. Sblíženým zlomkem řádu k k řetězovému zlomku rozumíme zlomek $\frac{A_k}{B_k}$ takový, že $A_k = \mathbf{A}_k(q_0, q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k)$ a $B_k = \mathbf{B}_k(q_0, q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k)$, kde A_k a B_k jsou nesoudělné polynomy popsané výše.

Obecná definice sblíženého zlomku [2] (angl. *convergent* či *continuant* [1, strana 340]) vyžaduje pouze, aby q_i a p_i byla obecná čísla. Naše definice je užší.

Vzhledem k tomu, že podle Definice 8 jsou jednotliví čitatelé a jmenovatelé sblížených zlomků nesoudělné polynomy (tedy $\gcd(A_k, B_k) = 1$), platí při rozvoji racionálního čísla $\frac{u}{v}$ v konečný řetězový zlomek řádu n (připomeňme si, že racionální číslo je vždy reprezentováno konečným složeným zlomkem) pro poslední možný sblížený zlomek $\frac{A_n}{B_n}$

$$\frac{u}{v} = \frac{A_n \cdot d}{B_n \cdot d}$$

respektive

$$\begin{aligned} u &= A_n \cdot d, \\ v &= B_n \cdot d, \end{aligned}$$

kde $d = \gcd(u, v)$ [1, odstavec 4.5.3, strana 343]).

Sblížené zlomky První hodnoty

První sblížené zlomky jsou

$$\begin{aligned} S_1 &= q_0 + \frac{p_1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + p_1}{q_1} = \frac{A_1}{B_1} \\ S_2 &= q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2}} = \frac{q_0 q_1 q_2 + q_0 p_2 + p_1 q_2}{q_1 q_2 + p_2} = \frac{A_2}{B_2}. \end{aligned}$$

Sblížené zlomky Rekurentní algoritmus (1/2)

Definice 9. Pro čitatele A_k a jmenovatele B_k k -tého sblíženého zlomku $S_k = \frac{A_k}{B_k}$ platí pro $k \geq 1$ rekurentní formule

$$\begin{aligned} A_k &= q_k A_{k-1} + p_k A_{k-2}, \\ B_k &= q_k B_{k-1} + p_k B_{k-2}. \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} A_{-1} &= 1, \quad A_0 = q_0, \\ B_{-1} &= 0, \quad B_0 = 1. \end{aligned}$$

Sblížené zlomky Rekurentní algoritmus (2/2)

Například tak platí

$$\begin{aligned} A_1 &= q_1 A_0 + p_1 A_{-1} = q_1 q_0 + p_1 \\ B_1 &= q_1 B_0 + p_1 B_{-1} = q_1 \\ \\ A_2 &= q_2 A_1 + p_2 A_0 = q_2 q_1 q_0 + q_2 p_1 + q_0 p_2 \\ B_2 &= q_2 B_1 + p_2 B_0 = q_2 q_1 + p_2 \end{aligned}$$

2.1 Řetězový zlomek jako nekonečná řada

Sblížené zlomky Nekonečná řada ze sblížených zlomků (1/4)

Rozdíl dvou následujících sblížených zlomků je

$$\begin{aligned} \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} - \frac{A_k}{B_k} &= \frac{A_{k+1}B_k - A_kB_{k+1}}{B_kB_{k+1}} = \\ &= \frac{(q_{k+1}A_k + p_{k+1}A_{k-1})B_k}{B_kB_{k+1}} - \frac{A_k(q_{k+1}B_k + p_{k+1}B_{k-1})}{B_kB_{k+1}} = \\ &= \frac{-p_{k+1}(A_kB_{k-1} - A_{k-1}B_k)}{B_kB_{k+1}} = \\ &= -p_{k+1} \left[\frac{(q_kA_{k-1} + p_kA_{k-2})B_{k-1}}{B_kB_{k+1}} - \frac{A_{k-1}(q_kB_{k-1} + p_kB_{k-2})}{B_kB_{k+1}} \right] = \\ &= \frac{p_{k+1} \cdot p_k(A_{k-1}B_{k-2} - A_{k-2}B_{k-1})}{B_kB_{k+1}} = \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sblížené zlomky Nekonečná řada ze sblížených zlomků (2/4)

S použitím rekurentních formulí tak postupně dostáváme

$$\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} - \frac{A_k}{B_k} = (-1)^k \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{k+1}}{B_k B_{k+1}},$$

a tedy

$$\begin{aligned}\frac{A_1 B_0 - A_0 B_1}{B_1 B_2} &= -\frac{p_0 \cdot p_1}{B_0 \cdot B_1} = \frac{p_1}{q_1}, \\ \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{B_1 B_2} &= -\frac{p_1 \cdot p_2}{B_1 \cdot B_2}, \\ \frac{A_3 B_2 - A_2 B_3}{B_2 B_3} &= \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3}{B_2 \cdot B_3}, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Sblížené zlomky Nekonečná řada ze sblížených zlomků (3/4)

Protože

$$\frac{A_k}{B_k} = \left(\frac{A_k}{B_k} - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} \right) + \left(\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} - \frac{A_{k-2}}{B_{k-2}} \right) + \dots + \left(\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_0}{B_0} \right) + \frac{A_0}{B_0}$$

můžeme snadno odvodit

$$\frac{A_k}{B_k} = q_0 + \frac{p_1}{B_1} - \frac{p_1 p_2}{B_1 B_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{B_2 B_3} - \dots + (-1)^k \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{k+1}}{B_k B_{k+1}}$$

Sblížené zlomky Nekonečná řada ze sblížených zlomků (4/4)

Věta 10. *Sblížené zlomky jsou částečnými součty nekonečné řady*

$$q_0 + \frac{p_1}{B_1} - \frac{p_1 p_2}{B_1 B_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{B_2 B_3} - \frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{B_3 B_4} + \dots$$

Věta 11. *Pro pravý řetězový zlomek je*

$$q_0 + \frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_1 B_2} + \frac{1}{B_2 B_3} - \frac{1}{B_3 B_4} + \dots$$

2.2 Nekonečná řada jako řetězový zlomek

Nekonečná řada jako řetězový zlomek Reprezentace konvergentní řady (1/4)

Nechť

$$\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} - \dots$$

je nekonečná konvergentní řada s $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{N}$.

Hledejme $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}$ a $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{N}$ tak, aby členy této řady byly shodné s členy řady vzniklé rozvojem sblížených zlomků

$$\frac{p_1}{B_1} - \frac{p_1 p_2}{B_1 B_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{B_2 B_3} - \frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{B_3 B_4} + \dots$$

Nekonečná řada jako řetězový zlomek Reprezentace konvergentní řady (2/4)

Položme $p_1 = 1$ a $q_1 = B_1 = c_1$. Podíl dvou následujících členů je

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{B_{k+1}}{B_{k-1} \cdot p_{k+1}}.$$

Pro B_{k+1} platí dříve definovaná *rekurentní relace*

$$B_{k+1} = q_{k+1} \cdot B_k + p_{k+1} \cdot B_{k-1},$$

a můžeme proto psát

$$\begin{aligned} \frac{c_{k+1}}{c_k} &= \frac{B_{k+1}}{B_{k-1} \cdot p_{k+1}} = \frac{B_k \cdot q_{k+1}}{B_{k-1} \cdot p_{k+1}} + 1, \\ \frac{B_k}{B_{k-1}} &= \frac{(c_{k+1} - c_k) \cdot p_{k+1}}{c_k \cdot q_{k+1}}. \end{aligned}$$

Nekonečná řada jako řetězový zlomek Reprezentace konvergentní řady (3/4)

Odtud opětovným použitím rekurentní relace pro B_k

$$\begin{aligned} \frac{(c_{k+1} - c_k)p_{k+1}}{c_k q_{k+1}} &= \frac{B_k}{B_{k-1}} = \frac{q_k B_{k-1} + p_k B_{k-2}}{B_{k-1}} = \\ &= q_k + p_k \frac{c_{k-1} q_k}{(c_k - c_{k-1})p_k}. \end{aligned}$$

Z těchto vztahů nakonec obdržíme

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1} q_k} = \frac{c_k^2}{(c_{k+1} - c_k)(c_k - c_{k-1})}.$$

Nekonečná řada jako řetězový zlomek Reprezentace konvergentní řady (4/4)

Požadavek $p_k, q_k \in \mathbb{N}$ lze splnit volbou

$$p_{k+1} = c_k^2 \quad q_{k+1} = c_{k+1} - c_k$$

Tuto formuli neodvodil nikdo jiný, než Leonhard Euler v roce 1748.

$$\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} - \dots = \frac{1}{c_1 + \frac{c_1^2}{c_2 - c_1 + \frac{c_2^2}{c_3 - c_2 + \frac{c_3^2}{c_4 - c_3 + \dots}}}}$$

Příklad na rozvoj nekonečné řady Jak spočítat $\pi/4$ (1/2)

Rozvojem $\arctan x$ v Maclaurinovu řadu

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

obdržíme pro $\arctan x = \frac{\pi}{4}$ slavnou Leibnizovu formuli (1682)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}.$$

Můžeme pravděpodobně souhlasit s Leibnizem, který prohlásil, že „Bůh miluje lichá čísla“. Po několika iteracích však dojdeme k závěru, že k vyčíslení čísla π je tato suma krajně nevhodná.

Maclaurinova řada je Taylorova řada pro $a = 0$.

Příklad na rozvoj nekonečné řady Jak spočítat $\pi/4$ (2/2)

Převodem Leibnizovy řady na řetězový zlomek

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \frac{81}{2 + \cdots}}}}}}$$

lze získat řešení rychleji.

Zkuste si to doma ověřit.

3 Závěr

Poznámka na závěr A co bude příště

Nehonorované zamyšlení na doma

Pokuste se nalézt výkonnější algoritmus výpočtu čísla π s využitím součtových vzorců pro funkci

$$\arctan u + \arctan v = \arctan \frac{u+v}{1-uv}.$$

Příště:

- První domácí úloha
- Numerika (zobrazení čísel v počítači, zdroje chyb, typy úloh)

Reference

- [1] Knuth, D. E. *The Art of Computer Programming*. Volume 2, Seminumerical Algorithms. 2nd Edition. Addison-Wesley, 1981.
- [2] Chinčín, A.J. *Řetězové zlomky*. Přírodovědecké vydavatelství Praha, 1952. (Existuje také například anglické vydání Khinchin, A.Ya. *Continued Fractions*. Phoenix Books, 1964.)