

Jemný úvod do numerických metod.

Matematické algoritmy (K611MA)

Jan Přikryl

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

10. přednáška K611MA
čtvrtek 3. prosince 2009

verze: 2009-11-26 01:16



Obsah přednášky

① Úvod do numerické matematiky

Matematické modelování

Zobrazení čísel v počítači

Typy chyb

Typy numerických úloh

② Výpočet kořenů nelineární funkce

③ Složitější případy výpočtu kořenů

④ Závěr



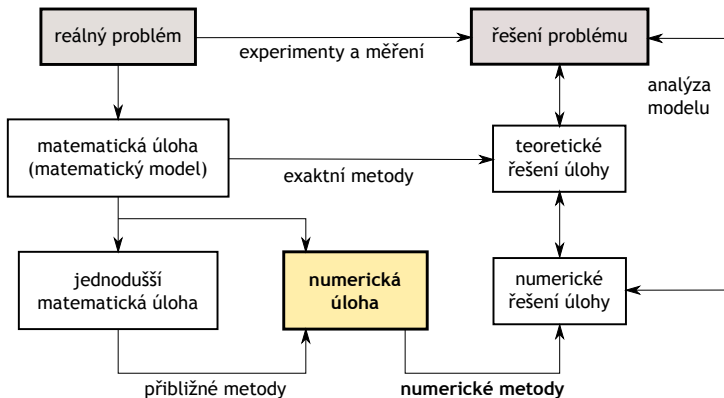
Matematické modelování

Zopakujme si MSAP



Matematické modelování

Pozice numerické matematiky



Čím se numerická matematika zabývá

Numerické úlohy a metody

Numerická úloha – jasný a jednoznačný popis funkčního vztahu mezi *konečným* počtem vstupních a výstupních dat.

Data – vyjádřitelná konečným počtem čísel.

⇒ Je to matematickým model reálného problému, jenž může být v konečném čase realizován na počítači.

Numerický algoritmus – zajímá nás realizace aritmetických operací s čísly, nikoliv logické operace

Konstrukce a analýza metod a algoritmů pro realizaci numerických úloh na počítačích: **numerická matematika**.



Numerické úlohy

Příklady

Toto je numerická úloha

Řešení rovnice $x^4 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ je možno počítat numericky pro konkrétní vstupní vektor $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3] \in \mathbb{R}^3$.

Výstupem numerické metody řešení bude vektor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{C}^4$$

Toto není numerická úloha

Řešení rovnice $y''(x) - y(x)^2 = 0$ za daných počátečních podmínek nelze hledat numericky.

Numerický přístup pouze pro vyšetření hodnot ve vybraných bodech $x \in \{x_i\}_1^n$



Zobrazení čísel v počítači

Celá čísla, pevná a plovoucí řádová čárka

Počítač $\Rightarrow$ binární logika, binární reprezentace čísel.

Celá čísla – ekvivalenty ve dvojkové soustavě, jeden (nejvyšší) bit na znaménko

Příklad

$$66_{10} = 01000010_2, -126_{10} = 11111110_2$$

Pevná řádová čárka – pevný počet bitů pro celou a desetinnou část čísla

Příklad

$$5,3100_{10} \approx 10101010_2 (= 101,01010_2), 7,5625_{10} = 11110010_2$$

Plovoucí řádová čárka – převod na tvar $m \cdot 10^n$



Zobrazení čísel v počítači

Mantisa a exponent

Definice

Číslo x lze reprezentovat v **semilogaritmickém tvaru s normalizovanou mantisou** jako

$$x = \operatorname{sgn} x \left(\frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \cdots + \frac{a_l}{q^l} \right) q^b$$

kde $q > 1$ je *základ*, $a_i \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ jsou *číslíčky mantisy* a $b \in \{m_1, \dots, m_2\}$ je *exponent*.

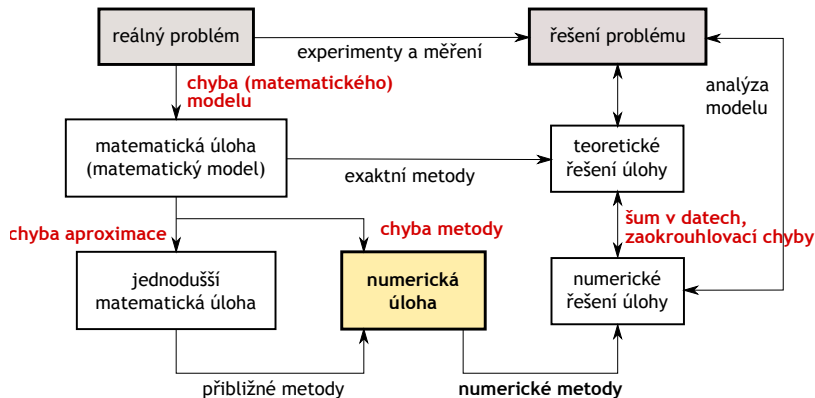
Reprezentace x pokrývá pouze podmnožinu $\mathbb{R}$ – má pouze $2(q-1)q^{l-1}(m_2 - m_1 + 1) + 1$ prvků

$\Rightarrow$ některá reálná čísla nelze přesně reprezentovat.



Chyby výpočtu

Typy



Chyby výpočtu

Relativní a absolutní chyba

Číslo x v numerickém algoritmu reprezentováno přiblížením $\tilde{x}$

Definice

Absolutní chyba $\mathcal{A}(x)$ aproximace čísla x číslem $\tilde{x}$ označujeme rozdíl

$$\mathcal{A}(x) = |x - \tilde{x}|$$

Relativní chyba $\mathcal{R}(x)$ aproximace čísla x číslem $\tilde{x}$ označujeme podíl

$$\mathcal{R}(x) = \frac{\mathcal{A}(x)}{|x|} = \left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right|, x \neq 0$$



Chyby výpočtu

Vlastnosti $\mathcal{A}(x)$ a $\mathcal{R}(x)$

Aritmetické operace mohou mít na nepřesné reprezentace čísel devastující vliv (například podíl velkého a malého čísla).

Relativní chyba se vždy výrazně zvětší při odčítání dvou blízkých čísel:

$$\mathcal{R}(x \pm y) = \frac{\mathcal{A}(x \pm y)}{|x \pm y|}$$

Násobení ani dělení nemají na $\mathcal{A}(x)$ a $\mathcal{R}(x)$ výraznější vliv.



Chyby výpočtu

Příklad

Mějme čísla $x_1 = 758320$, $x_2 = 757940$, reprezentována jako $\tilde{x}_1 = 758330$ a $\tilde{x}_2 = 757930$. Platí $\mathcal{A}(x_1) = 10$, $\mathcal{A}(x_2) = 10$,

$$\mathcal{R}(x_1) = \frac{10}{758320} \leq 1,32 \cdot 10^{-5}, \mathcal{R}(x_2) = \frac{10}{757940} \leq 1,32 \cdot 10^{-5}.$$

Odčítání

Máme-li $v = x_1 - x_2 = 380$, bude $\tilde{v} = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = 400$. Proto $\mathcal{A}(v) = |v - \tilde{v}| = 20$ a

$$\mathcal{R}(v) = \frac{\mathcal{A}(v)}{|v|} = \frac{20}{380} \leq 0,053.$$

Relativní chyba rozdílu $v = x_1 - x_2$ je o tři řády vyšší.



Matematická úloha

A její formalizace

Mějme dány dva vektorové prostory $\mathcal{B}_x$ (vstupní data) a $\mathcal{B}_y$ (výstupní data).

Definice

Úlohou rozumíme relaci

$$y = U(x), \quad x \in \mathcal{B}_x, y \in \mathcal{B}_y$$

$\Rightarrow$ transformuje posloupnost vstupních dat na posloupnost výsledků.



Korektní úlohy

Definice

Definice

Řekneme, že úloha je **korektní**, pokud

- 1 ke každému $x \in \mathcal{B}_x$ existuje jediné $y \in \mathcal{B}_y$,
- 2 řešení spojitě závisí na datech, tedy pokud $x_n \rightarrow x$ a $U(x_n) = y_n$, pak také $y_n \rightarrow y = U(x)$.

Nekorektní úlohy – nejednoznačně řešitelné problémy, intervalové odhady, nevhodná formulace zadání

Příklad

Určete matici **A** splňující rovnici **Ax = b** máte-li dány hodnoty **x** a **b**. Určete $\sqrt{4}$.



Dobře podmíněné úlohy

Definice

Podíl

$$C_p = \frac{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}}{\frac{\|\Delta y\|}{\|y\|}}$$

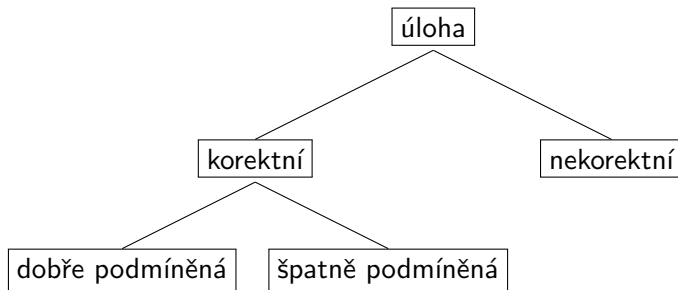
se nazývá číslo podmíněnosti úlohy.

Definice

Budeme říkat, že korektní úloha je **dobře podmíněná**, jestliže malá změna ve vstupních datech vyvolá malou změnu řešení (resp. $C_p \approx 1$).



Taxonomie úloh



Obsah přednášky

① Úvod do numerické matematiky

② Výpočet kořenů nelineární funkce

Metoda půlení intervalu

Newtonova-Raphsonova metoda

Metoda sečen

Metoda regula falsi

③ Složitější případy výpočtu kořenů

④ Závěr

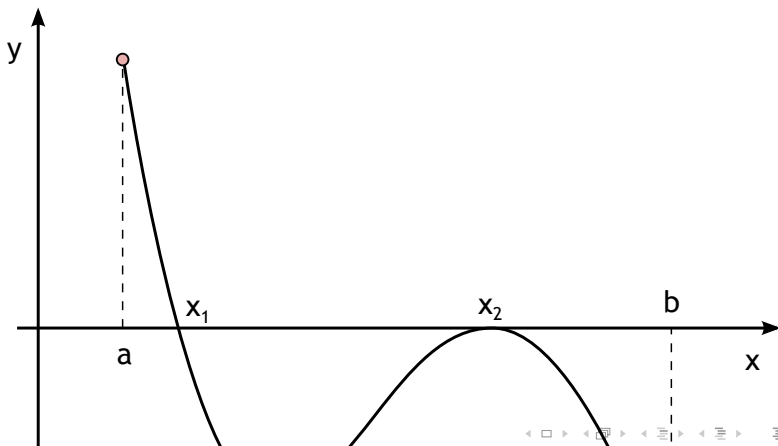


Výpočet kořenů nelineární funkce

Vyšetřování $f(x) = 0$

Máme rovnici zadanou funkcí $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Hledáme $x \in \langle a, b \rangle$ tak, aby $f(x) = 0$.



Výpočet kořenů nelineární rovnice

Metody řešení

Definice

Kořenem rovnice nebo jejím **řešením** nazveme číslo x takové, že $f(x) = 0$.

Dvě základní otázky

- 1 Konverguje posloupnost iterací k hledanému kořenu?
- 2 Jak rychle konverguje?

Tři skupiny metod řešení

- 1 Startovací metody
- 2 Zpřesňující metody
- 3 Speciální metody



Metoda půlení intervalu

Popis



Metoda půlení intervalu

Příklad



Newtonova-Raphsonova metoda

Popis



Newtonova-Ralstonova metoda

Příklad



Metoda sečen

Popis



Metoda sečen

Příklad



Metoda regula falsi

Popis



Metoda regula falsi

Příklad



Obsah přednášky

- ① Úvod do numerické matematiky
- ② Výpočet kořenů nelineární funkce
- ③ Složitější případy výpočtu kořenů
 - Více kořenů
 - Násobné kořeny
- ④ Závěr



Složitější případy výpočtu kořenů

Problematické případy



Složitější případy výpočtu kořenů

Příklady



Vyšetřování všech kořenů

Algoritmus



Vyšetřování všech kořenů

Příklady



Násobné kořeny

Příklady



Násobné kořeny

Příklady



Obsah přednášky

- ① Úvod do numerické matematiky
- ② Výpočet kořenů nelineární funkce
- ③ Složitější případy výpočtu kořenů
- ④ Závěr**



Závěr

Příklady

Nezapomeňte si vyzvednout další domácí úkol

Příště:

- Soustavy lineárních rovnic
- Diferenciální rovnice
- Další domácí úkol

