

NUMERICKÁ INTEGRACE

Řešení integrál

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Řešení přibližně (numerickou aproximací):

- analyticky nelze
- analytické řešení moc složité
- máme jenom diskrétní hodnoty x_i a $f(x_i)$

PRINCIP:

Použiji nějakou aproximaci $\underline{f}(x)$... třeba $\varphi(x)$

Potom $I(f) \approx I(\varphi)$

$$\bullet \quad \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx \leq$$

$$\leq (b-a) \cdot \varepsilon_{\max}$$

$$(\varepsilon_{\max} = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} |f(x) - \varphi(x)|)$$

KVADRATURNÍ VZORCE

numerická kvadratura $\times$ numerická integrace
diferenciálních rovnic



numerická aproximace určitého integrálu

předpis $\rightarrow$ KVADRATURNÍ VZOREC

$$I(f) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad , \quad x_i \in \langle a, b \rangle$$

$\nearrow$ uzly
 $\searrow$ váhy

Důvody:

a) Riemannovská definice integrálu

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \quad , \quad x \in (t_{i-1}, t_i)$$

$\int_a^b f(x) dx$ je limita pro $(t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$

b) polynomiální aproximace $f(x)$ polynomelem

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) \quad , \quad x_i \in \langle a, b \rangle, \quad x_i \neq x_j$$

potom

$$\int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot w_i$$

(Lagrangeův interpolační polynom)

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

KVADRATURNÍ VZORCE (2)

- základní vzorce
 - obdélníkové pravidlo
 - lichoběžníkové pravidlo
 - Simpsonovo pravidlo

} jeden interpolační polynom na $\langle a, b \rangle$
- složené vzorce
 - interval $\langle a, b \rangle$ vhodně rozdělen na panely $\langle a_i, b_i \rangle$ a na nich použijí základní vzorce

ALGEBRAICKÝ ŘÁD

Takové N , že chyba určení $I(f)$ je nulová až do řádu polynomu N (pro x^{N+1} už je nějaký nenulový rozdíl)

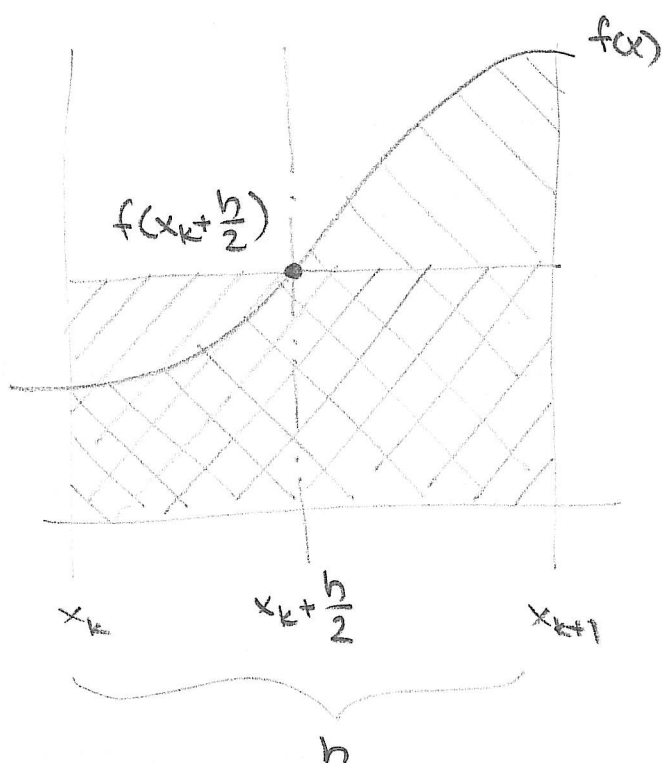
NEWTONOVY - COTESOVY VZORCE

- uzly pevně zvolené (ekvidistantní)
- váhy tabelované
- algebraický řád n resp. $n+1$
- váhy v tabulkách pro interval $\langle 0, 1 \rangle \Rightarrow$ třeba transformovat na $\langle a, b \rangle$
- maximální řád ≈ 10

↓

$$x_i = x_0 + i \cdot h$$
$$x_0 = a, \quad x_n = b$$
$$h = \frac{b-a}{n}$$

OBDELNIKOVÉ PRAVIDLO

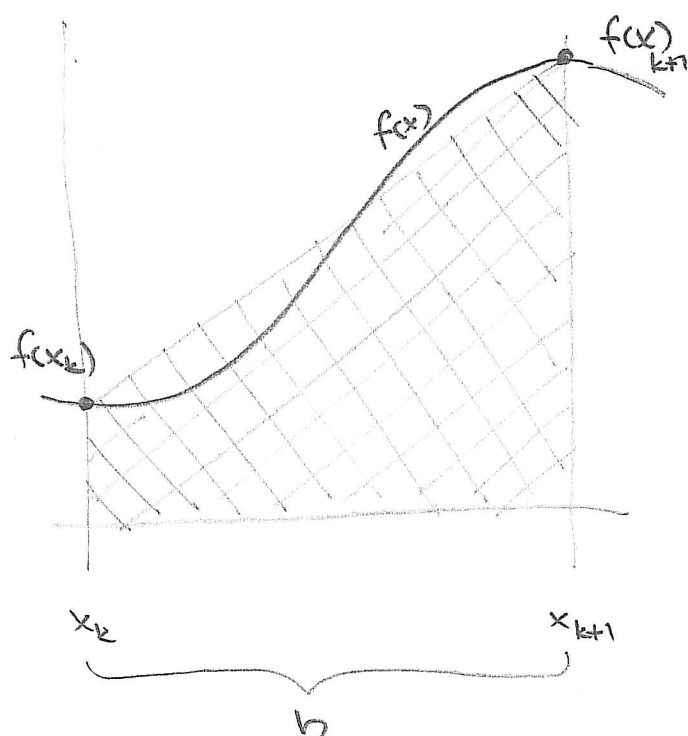


$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}\right)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k + \frac{h}{2}\right)$$

- nahraza po částech konstantní funkcí
- viz Riemannova definice integrálu

LICHOBĚŽNÍKOVÉ PRAVIDLO

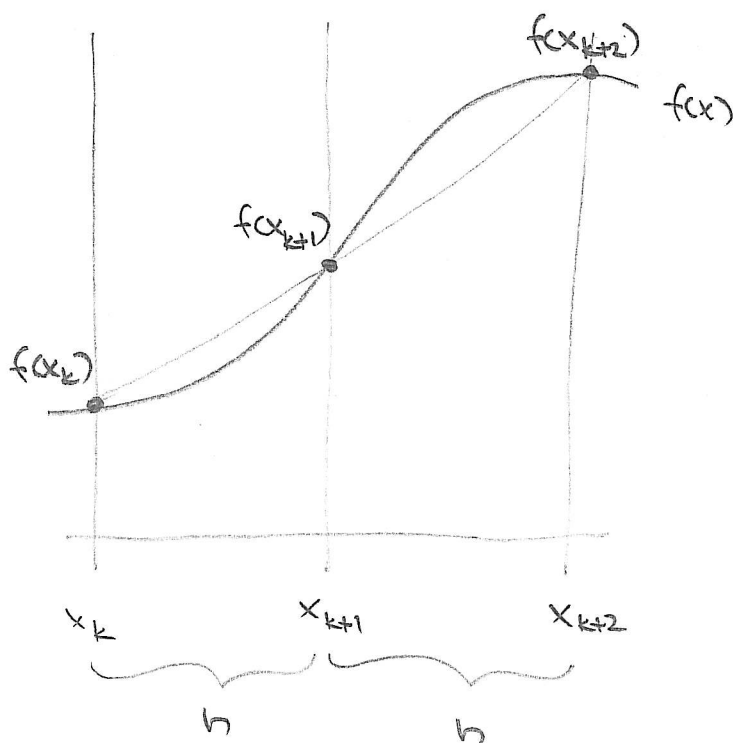


$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} \cdot [f(x_k) + f(x_{k+1})]$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] = \\ &= h \left[\frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{1}{2} f(x_n) \right] \end{aligned}$$

- aproximační polynom $\varphi(x)$ prvního stupně

SIMPSONOVO PRAVIDLO



- interpolační polynom φ_k druhého stupně (parabola)

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x) dx \approx \int_{x_k}^{x_{k+2}} \varphi_k(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})]$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{\substack{k=0, \\ k \text{ sudé}}}^{n-2} \int_{x_k}^{x_{k+2}} \varphi_k(x) \approx \frac{h}{3} \sum_{\substack{k=0, \\ k \text{ sudé}}}^{n-2} [f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})] =$$

$$= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$\Rightarrow n$ musí být sudé číslo

SLOŽENÉ SIMPSONOVO PRAVIDLO

Možná varianta algoritmu:

Vstup: $a, b \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$; $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

if n je liché: error endif

$h \leftarrow (b-a)/n$;

$s \leftarrow f(a) + 4f(a+h) + f(b)$;

$x \leftarrow a + 2h$;

while $x < b$ do

$s \leftarrow s + 2f(x) + 4f(x+h)$;

$x \leftarrow x + 2h$;

end

$s \leftarrow h \cdot s / 3$;

Výstup: $s \in \mathbb{R}$

GAUSSOVY KVADRATURNÍ VZORCE

- obecné vzložení uzlů dává kořeny interpolačního polynomu stupně $n+1$
- váhy dopočteme
- algebraický řád vzorce: $2n+1$

! uzly vzloženy symetricky vzhledem k $\frac{b-a}{2}$
váhy jsou symetrické

$$n=0: \quad x_0 = 0; \quad w_0 = 2$$

$$n=1: \quad x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad w_0 = 1, \quad w_1 = 1$$



tabulky pro interval $\langle -1; 1 \rangle$

$\Rightarrow$ nutná transformace do $\langle a, b \rangle$

SOFTWARE

Matlab: quad (optimalizované simpsonovo pravidlo)
quadl (Gauss-Lobal)

Jádnem je LOKÁLNÍ INTEGRÁČNÍ MODUL

- počítá jeden panel
- vrací výsledek + odhad chyby na panelu

Odhad celkové chyby aproximace:

- globální: prostý součet lokálních odhadů
- lokální: škáluje při sčítání velikosti panelu

||
▽ ∪
ZJEMNĚNÍ

- a) globální: rozdělí panel s největším odhadem chyby
- b) lokální: dělí první panel s odhadem chyby větším, než ϵ