Zadání P3 ke zkoušce z předmětu Matematické algoritmy

17. ledna 2009

Egyptský algoritmus násobení

Staří Egypťané nebyli příliš zázračnými počtáři své doby – určitě lepšími matematiky byli Babylóňané. Avšak Egypťané museli umět sčítat a násobit a tak přišli na chytrý algoritmus násobení, který lze objasnit následujícím příkladem násobení $c = a \cdot b$:

c	a	b	operace
0	13	21	b je *liché*: odečteme od něj 1 a přičteme do buňky c hodnotu a
13	13	20	b je *sudé*: vydělíme jej dvěmi a a dvěmi vynásobíme
13	26	10	b je sudé: vydělíme jej dvěmi a a dvěmi vynásobíme
13	52	5	b je liché: odečteme od něj 1 a přičteme do buňky c hodnotu a
65	52	4	b je sudé: vydělíme jej dvěmi a a dvěmi vynásobíme
65	104	2	b je sudé: vydělíme jej dvěmi a a dvěmi vynásobíme
65	208	1	b je liché: odečteme od něj 1 a přičteme do buňky c hodnotu a
273	208	0	b je *nula*, algoritmus končí

Tento algoritmus lze zapsat jako

Require: $a, b \in \mathbb{N}$
  $c \leftarrow 0$
  while $b > 0$ **do**
    if $b \bmod 2 = 0$ **then**
      $a \leftarrow 2 \cdot a$
      $b \leftarrow b/2$
    else
      $c \leftarrow c + a$
      $b \leftarrow b - 1$
    end if
  end while
Ensure: $c = a \cdot b$

Vaše úkoly:

- nalezněte zdůvodnění, proč považovali tento algoritmus násobení Egypťané za účelný,

- určete asymptotickou složitost tohoto algoritmu,
- v algoritmu zaměňte násobení dvěma za druhou mocninu, operaci sčítání za operaci násobení a 0 za 1 a zdůvodněte, co bude takto modifikovaný algoritmus počítat,
- toto zdůvodnění prakticky ověřte.