

## CVIČENÍ 1 — Elementární funkce

**Příklad 1.** Najděte definiční obor funkce  $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$ .

*Řešení:*

$$2 + x - x^2 \geq 0 \implies (2 - x)(1 + x) \geq 0 \implies x \in \langle -1, 2 \rangle \implies D_f = \langle -1, 2 \rangle.$$

---

**Příklad 2.** Najděte definiční obor funkce  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3 - x^2}}$ .

*Řešení:*

$$\left( \frac{x}{3 - x^2} \geq 0 \right) \wedge (3 - x^2 \neq 0) \implies \left( \frac{x}{(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)} > 0 \right) \wedge (x \neq \pm\sqrt{3}) \implies \\ \implies x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup \langle 0, \sqrt{3} \rangle \implies D_f = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup \langle 0, \sqrt{3} \rangle.$$

---

**Příklad 3.** Nalezněte inverzní funkci k funkci  $f(x) = x^2 - 1$ .

*Řešení:*

Definiční obor dané funkce je celá reálná osa  $\mathbb{R}$ . Daná funkce není na svém definičním oboru prostá. Proto k této funkci inverzní funkce neexistuje.

---

**Příklad 4.** Nalezněte inverzní funkci k funkci  $f_1(x) = x^2 - 1$ , jejíž definiční obor je  $D_{f_1} = \langle 0, +\infty \rangle$ .

*Řešení:*

Funkce  $f_1(x)$  je prostá. Proto inverzní funkce existuje. Obor hodnot této funkce je množina  $H_{f_1} = \langle -1, +\infty \rangle$ . Pro inverzní funkci  $y = f_1^{(-1)}(x)$  platí

$$x = y^2 - 1 \implies y^2 = x + 1 \implies y = \pm\sqrt{x + 1}.$$

Protože definiční obor  $D_{f_1} = \langle 0, +\infty \rangle$  a obor hodnot  $H_{f_1} = \langle -1, +\infty \rangle$ , je inverzní funkce dána předpisem

$$f_1^{(-1)}(x) = \sqrt{x + 1}, \quad D_{f_1^{(-1)}} = H_{f_1} = \langle -1, +\infty \rangle \quad \text{a} \quad H_{f_1^{(-1)}} = D_{f_1} = \langle 0, +\infty \rangle.$$

---

**Příklad 5.** Nalezněte inverzní funkci k funkci  $f_2(x) = x^2 - 1$ , jejíž definiční je  $D_{f_2} = (-\infty, -2) \cup (0, 1)$ .

*Řešení:*

Funkce  $f_2(x)$  je prostá. Proto inverzní funkce existuje. Obor hodnot této funkce je množina  $H_{f_2} = (-1, 0) \cup (3, +\infty)$ . Pro inverzní funkci  $y = f_2^{(-1)}(x)$  platí

$$x = y^2 - 1 \implies y^2 = x + 1 \implies y = \pm\sqrt{x+1}.$$

Protože definiční obor  $D_{f_2} = (-\infty, -2) \cup (0, 1)$  a obor hodnot  $H_{f_2} = (-1, 0) \cup (3, +\infty)$ , je inverzní funkce dána předpisem

$$f_2^{(-1)}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x+1} & \text{pro } x \in (3, +\infty) \\ \sqrt{x+1} & \text{pro } x \in (-1, 0) \end{cases}$$

$$D_{f_2^{(-1)}} = H_{f_2} = (-1, 0) \cup (3, +\infty) \quad \text{a} \quad H_{f_2^{(-1)}} = D_{f_2} = (-\infty, -2) \cup (0, 1).$$


---

**Příklad 6.** Nalezněte definiční obor funkce  $f(x) = \ln(1 - \ln(x^2 - 5x + 6))$ .

*Řešení:*

Definiční obor nalezneme z nerovností  $(1 - \ln(x^2 - 5x + 6) > 0) \wedge (x^2 - 5x + 6 > 0)$ . Z nich plyne

$$\begin{aligned} & (\ln(x^2 - 5x + 6) < 1) \wedge ((x - 2)(x - 3) > 0) \implies \\ & \implies (x^2 - 5x + 6 < e) \wedge (x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)) \implies \\ & \implies \left(x - \frac{5 + \sqrt{1 + 4e}}{2}\right) \left(x - \frac{5 - \sqrt{1 + 4e}}{2}\right) < 0 \wedge (x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)) \implies \\ & \implies x \in \left(\frac{5 - \sqrt{1 + 4e}}{2}, \frac{5 + \sqrt{1 + 4e}}{2}\right) \cap ((-\infty, 2) \cup (3, +\infty)) \implies \\ & \implies D_f = \left(\frac{5 - \sqrt{1 + 4e}}{2}, 2\right) \cup \left(3, \frac{5 + \sqrt{1 + 4e}}{2}\right). \end{aligned}$$


---

**Příklad 7.** Nalezněte definiční obor funkce  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9} + \ln(x^3 - x)$ .

*Řešení:*

Definiční obor dané funkce najdeme ze vztahů

$$\begin{aligned} & (x^2 - 9 \neq 0) \wedge (x^3 - x > 0) \implies (x \neq \pm 3) \wedge (x(x - 1)(x + 1) > 0) \implies \\ & \implies x \in (-1, 0) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty) \implies D_f = (-1, 0) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty). \end{aligned}$$


---

**Příklad 8.** Nalezněte inverzní funkci k funkci  $f(x) = e^{x-1} + 2$ .

*Řešení:*

Definiční obor této funkce je  $D_f = \mathbb{R}$  a její obor hodnot je  $H_f = (2, +\infty)$ . Funkce je prostá, a proto k ní inverzní funkce  $y = f^{(-1)}(x)$  existuje. Najdeme ji jako řešení rovnice  $x = e^{y-1} + 2$ . Z ní snadno dostaneme vztah  $y = 1 + \ln(x - 2)$ . Tedy inverzní funkce je  $f^{(-1)}(x) = 1 + \ln(x - 2)$ . Její definiční obor je  $D_{f^{(-1)}} = H_f = (2, +\infty)$  a její obor hodnot je  $H_{f^{(-1)}} = D_f = \mathbb{R}$ .

---

**Příklad 9.** Nalezněte definiční obor funkce  $f(x) = \ln(1 - 2 \cos^2 3x)^{2/3}$ .

*Řešení:*

Definiční obor dané funkce najdeme z podmínky  $(1 - 2 \cos^2 3x)^{2/3} > 0$ . To je ekvivalentní vztahu  $1 - 2 \cos^2 3x \neq 0$ . Čili

$$\cos^2 3x \neq \frac{1}{2} \implies \cos 3x \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \implies 3x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \implies x \neq \frac{1+2k}{12} \pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Tedy } D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( \frac{2k-1}{12} \pi, \frac{2k+1}{12} \pi \right).$$


---

**Příklad 10.** Najděte definiční obor funkce  $f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ .

*Řešení:*

Definiční obor dané funkce najdeme ze vztahů

$$\left( -1 \leq \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \leq 1 \right) \wedge \left( \frac{1-x}{1+x} \geq 0 \right) \wedge (1+x \neq 0).$$

Z nich plyne

$$\begin{aligned} & \left( 0 \leq \frac{1-x}{1+x} \leq 1 \right) \wedge (x \neq -1) \implies \\ & \implies ((1+x > 0) \wedge (1-x \geq 0) \wedge (0 \leq x)) \vee ((1+x < 0) \wedge (1-x \geq 0) \wedge (0 \geq x)) \implies \\ & \implies (0 \leq x \leq 1) \implies D_f = \langle 0, 1 \rangle. \end{aligned}$$


---

**Příklad 11.** Vyjádřete funkce  $f(x) = \operatorname{argsinh} x$  pomocí logaritmů.

*Řešení:*

Funkce  $y = \operatorname{argsinh} x$  je inverzní funkcí k funkci  $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . Tedy je

řešením rovnice  $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ . Z této rovnice dostaneme

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0 \implies (e^y - x)^2 = 1 + x^2 \implies e^y = x \pm \sqrt{1+x^2}.$$

Protože  $e^y > 0$ , musíme v posledním vztahu vzít pouze znaménko  $+$ . Pak snadno dostaneme

$$y = \operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$


---

CVIČENÍ 2 — Číselné množiny

**Příklad 1.** Najděte definiční obor funkce  $f(x) = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\arccos \sqrt{x^2-1}}$ .

*Řešení:*

Funkce  $f(x)$  je dána předpisem  $f(x) = \exp\left(\ln \frac{x-2}{x+1} \cdot \arccos \sqrt{x^2-1}\right)$ . Proto je její definiční obor dán nerovnostmi

$$\begin{aligned} & (-1 \leq \sqrt{x^2-1} \leq 1) \wedge (x^2-1 \geq 0) \wedge \left(\frac{x-2}{x+1} > 0\right) \wedge (x+1 \neq 0) \implies \\ & \implies (1 \leq x^2 \leq 2) \wedge (x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)) \implies \\ & \implies x \in \langle -\sqrt{2}, -1 \rangle \implies D_f = \langle -\sqrt{2}, -1 \rangle. \end{aligned}$$


---

**Příklad 2.** Najděte supremum a infimum množiny  $M = \{x \in \mathbb{R}; |x-1| < x\}$ .

*Řešení:*

Množina  $M$  je dána nerovnostmi

$$x \leq 1 \implies 1-x < x \implies \frac{1}{2} < x \leq 1$$

nebo

$$x \geq 1 \implies x-1 < x \implies x \geq 1.$$

Tedy množina  $M$  je interval  $M = (1/2, +\infty)$ . Protože množina  $M$  není shora omezená, neexistuje v  $\mathbb{R}$  supremum.  $\inf M = \frac{1}{2}$ .

---

**Příklad 3.** Nech  $\mathbb{Q}$  značí množinu všech racionálních čísel. Najděte supremum a infimum množiny  $M = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq 2\}$ : a) v množině  $\mathbb{Q}$ ; b) v množině  $\mathbb{R}$ .

*Řešení:*

Množina  $M$  obsahuje všechna racionální čísla  $x$ , pro která je  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ . Protože  $\sqrt{2}$  není racionální číslo, neexistuje v množině  $\mathbb{Q}$  supremum ani infimum této množiny. Naproti tomu v množině reálných čísel  $\mathbb{R}$  je  $\sup M = \sqrt{2}$  a  $\inf M = -\sqrt{2}$ .

---

**Příklad 4.** Dokažte, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí nerovnost

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

*Řešení:*

Dané tvrzení lze dokázat matematickou indukcí. Nejprve ukážeme, že tvrzení platí pro  $n = 1$ . To znamená, že  $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ , což je pravda.

V dalším kroku předpokládáme, že uvedené tvrzení platí pro  $n \in \mathbb{N}$ , a za tohoto předpokladu musíme ukázat, že tvrzení platí pro  $n + 1$ . Tedy předpokládáme, že platí

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

a musíme ukázat, že z toho plyne vztah

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}.$$

Podle předpokladu platí nerovnost

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}.$$

Ze vztahu  $(2n+1)(2n+3) = 4n^2 + 8n + 3 < 4n^2 + 8n + 4 = (2n+2)^2$  získáme nerovnost  $\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ . Z toho a předchozí nerovnosti již plyne požadovaná nerovnost.

---

**Příklad 5.** Mezi členy aritmetické posloupnosti platí pro každé  $n \in \mathbb{N}$  vztah  $a_{n+1} = a_n + d$ , kde  $d$  je konstanta. Dokažte, že pro součet prvních  $n$  členů aritmetické posloupnosti platí vztah

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n).$$

*Řešení:*

Tvrzení dokážeme indukcí. Pro  $n = 1$  dostaneme  $s_1 = a_1 = \frac{1}{2} (a_1 + a_1)$ . Tedy pro  $n = 1$  naše tvrzení platí.

Dále předpokládáme, že pro  $n \in \mathbb{N}$  platí  $s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$ . Z tohoto předpokladu musíme ukázat, že tvrzení platí pro  $n + 1$ . Pro  $s_{n+1}$  dostaneme

$$s_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) + a_{n+1}.$$

Pro  $n$ -tý člen aritmetické posloupnosti platí  $a_n = a_1 + (n-1)d$ . Toto tvrzení dokážeme opět indukcí. Je zřejmé pro  $n = 1$  tvrzení platí. Předpokládejme, že platí pro  $n \in \mathbb{N}$ . Člen  $a_{n+1}$  je dán vztahem  $a_{n+1} = a_n + d = a_1 + (n-1)d + d = a_1 + nd$ . Tím je vztah  $a_n = a_1 + (n-1)d$  dokázán pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ .

Z výše odvozené relace pro  $s_{n+1}$  dostaneme

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \frac{n}{2} (a_1 + a_1 + (n-1)d) + a_1 + nd = (n+1)a_1 + \frac{n(n+1)}{2} d = \\ &= \frac{n+1}{2} (a_1 + a_1 + nd) = \frac{n+1}{2} (a_1 + a_{n+1}). \end{aligned}$$

Tím je uvedené tvrzení dokázáno pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ .

---

**Příklad 6.** Mezi členy geometrické posloupnosti platí pro každé  $n \in \mathbb{N}$  vztah  $a_{n+1} = qa_n$ , kde  $q$  je konstanta. Dokažte, že když  $q \neq 1$  platí pro součet prvních  $n$  členů geometrické posloupnosti vztah

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

*Řešení:*

Důkaz provedeme matematickou indukcí. Pro  $n = 1$  má naše tvrzení tvar  $s_1 = a_1 = a_1 \frac{q-1}{q-1}$ , a tedy platí.

Nyní předpokládáme, že tvrzení platí pro  $n \in \mathbb{N}$  a z tohoto předpokladu dokážeme jeho platnost pro  $n+1$ . Protože pro  $(n+1)$ -ní člen geometrické posloupnosti platí  $a_{n+1} = a_1 q^n$ , dostáváme

$$s_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} + a_1 q^n = a_1 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

---

**Příklad 7.** Nechť  $f(x) = \operatorname{arccotg} x$  a  $M = (-\infty, 1)$ . Najděte obraz množiny  $M$  při zobrazení  $f(x)$ , tj. množinu  $f(M)$ .

*Řešení:*

Funkce  $f(x) = \operatorname{arccotg} x$  je inverzní funkcí k funkci  $\cotg x$ . Protože je funkce  $\cotg x$  klesající, je také funkce  $f(x) = \operatorname{arccotg} x$  klesající. Navíc je funkce  $\operatorname{arccotg} x$  spojitá na celém  $\mathbb{R}$ . Proto je obraz intervalu  $M = (-\infty, 1)$  interval. Protože platí  $\operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4}$  a pro velká záporná  $x$  se hodnota funkce  $f(x) = \operatorname{arccotg} x$  blíží k  $\pi$ , je obraz množiny  $M$  roven  $f(M) = (\pi/4, \pi)$ .

---

**Příklad 8.** Nechť má funkce  $f(x)$  tvar  $f(x) = ax + b$  a platí  $f(0) = -2$  a  $f(3) = 5$ . Najděte  $f(1)$  a  $f(2)$ .

*Řešení:*

Nejprve určíme konstanty  $a$  a  $b$ . Z rovností  $f(0) = b = -2$  a  $f(3) = 3a + b = 5$  dostaneme  $a = \frac{7}{3}$  a  $b = -2$ . Tedy  $f(x) = \frac{7}{3}x - 2$ . Odtud plyne  $f(1) = \frac{1}{3}$  a  $f(2) = \frac{8}{3}$ .

---

**Příklad 9.** Najděte funkci  $f(x)$  tvaru  $f(x) = a + b \cdot c^x$ , jestliže je  $f(0) = 15$ ,  $f(2) = 30$  a  $f(4) = 90$ .

*Řešení:*

Konstanty  $a$ ,  $b$  a  $c$  musí splňovat soustavu rovnic

$$f(0) = a + b = 15, \quad f(2) = a + b \cdot c^2 = 30, \quad f(4) = a + b \cdot c^4 = 90.$$

Z této soustavy rovnic plyne

$$\begin{aligned} a = 15 - b, \quad b(c^2 - 1) = 15, \quad b(c^4 - 1) = 75 &\implies \frac{c^4 - 1}{c^2 - 1} = c^2 + 1 = 5 \implies \\ \implies c^2 = 4 \implies c = \pm 2 \stackrel{c > 0}{\implies} c = 2, \quad b = 5, \quad a = 10 &\implies f(x) = 10 + 5 \cdot 2^x. \end{aligned}$$

---

**Příklad 10.** Necht' má funkce  $f(x)$  definiční obor  $D_f = (0, 1)$ . Najděte definiční obor funkce  $g(x) = f(\ln x)$ .

*Řešení:*

Definiční obor funkce  $g(x)$  určíme z podmínky  $0 < \ln x < 1$ . To znamená, že  $D_g = (1, e)$ .

---

**Příklad 11.** Najděte  $z$  jako funkci  $x$  a  $y$ , jestliže platí  $\operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$ .

*Řešení:*

Podle definice platí pro každé  $x \in \mathbb{R}$  rovnost  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ . Pro jednoduchost označme  $\alpha = \operatorname{arctg} x$  a  $\beta = \operatorname{arctg} y$ . Pak platí  $\operatorname{tg} \alpha = x$  a  $\operatorname{tg} \beta = y$ . Z definiční rovnice dostaneme

$$z = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} z) = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{x + y}{1 - xy}.$$

---

**Příklad 12.** Necht' je  $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$  a  $\psi(x) = \frac{1}{x}$ . Najděte funkce  $\varphi(\varphi(x)) = \varphi \circ \varphi(x)$ ,  $\psi(\psi(x)) = \psi \circ \psi(x)$ ,  $\varphi(\psi(x)) = \varphi \circ \psi(x)$  a  $\psi(\varphi(x)) = \psi \circ \varphi(x)$ .

*Řešení:*

V případě  $\varphi \circ \varphi(x)$  dostaneme pro  $x > 0$  rovnost  $\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(x)) = \operatorname{sgn}(1) = 1$ ; pro  $x = 0$  dostáváme  $\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(0)) = \operatorname{sgn}(0) = 0$  a pro  $x < 0$  rovnost  $\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(x)) = \operatorname{sgn}(-1) = -1$ . Tedy  $\varphi \circ \varphi = \varphi$ .

V případě  $\psi \circ \psi(x)$  dostaneme  $\psi(\psi(x)) = \frac{1}{1/x} = x, x \neq 0$ .

V případě  $\varphi \circ \psi(x)$  dostáváme pro  $x > 0$  vztah  $\varphi(\psi(x)) = \operatorname{sgn}(1/x) = 1$  a pro  $x < 0$  vztah  $\varphi(\psi(x)) = \operatorname{sgn}(1/x) = -1$ . Tedy  $\varphi \circ \psi = \operatorname{sgn}$  a definiční obor této funkce je  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

V případě  $\psi \circ \varphi(x)$  je pro  $x > 0$   $\psi(\varphi(x)) = 1$  a pro  $x < 0$  je  $\psi(\varphi(x)) = -1$ . Tedy  $\psi \circ \varphi(x) = \operatorname{sgn}(x)$  s definičním oborem  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

---

**Příklad 13.** Najděte  $f(x)$ , jestliže platí  $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$ .

*Řešení:*

Označme  $y = \frac{x}{x+1}$ . Pak je  $x = \frac{y}{1-y}$ . Po dosazení do daného vztahu dostaneme

$$f(y) = \left(\frac{y}{1-y}\right)^2. \text{ Tedy } f(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}.$$

---

**Příklad 14.** Je funkce  $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$  sudá nebo lichá?

*Řešení:*

Platí

$$f(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = -\ln \frac{1-x}{1+x} = -f(x).$$

Funkce je lichá.

---

**Příklad 15.** Najděte nejmenší periodu funkce  $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + 3 \sin \frac{x}{3}$ .

*Řešení:*

Funkce  $f(x)$  je součtem tří periodických funkcí  $f_1(x) = \sin x$ ,  $f_2(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$  a  $f_3(x) = 3 \sin \frac{x}{3}$ . Jejich nejmenší periody jsou po řadě  $L_1 = 2\pi$ ,  $L_2 = \pi$  a  $L_3 = 6\pi$ . Nejmenší perioda je nejmenší společný násobek těchto tří period. Tedy nejmenší perioda je  $L = 6\pi$ .

---

**Příklad 16.** Najděte nejmenší periodu funkce  $f(x) = \cos x + \sin(x\sqrt{2})$ .

*Řešení:*

Funkce  $f(x)$  je součtem dvou periodických funkcí  $f_1(x) = \cos x$  a  $f_2(x) = \sin(x\sqrt{2})$ . Jejich nejmenší periody jsou  $L_1 = 2\pi$  a  $L_2 = \pi\sqrt{2}$ . Protože  $\sqrt{2}$  je iracionální číslo, neexistují přirozená čísla  $p$  a  $q$  taková, že  $2p = q\sqrt{2}$ . Daná funkce není periodická.

---



### CVIČENÍ 3 — Limity posloupností

**Příklad 1.** Najděte limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(3n+2)(3n-8)}{n^3 - n^2 + 1}$ .

*Řešení:*

Daný výraz lze upravit na tvar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(3n+2)(3n-8)}{n^3 - n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 + 1/n)(3 + 2/n)(3 - 8/n)}{1 - 1/n + 1/n^3} = 18.$$


---

**Příklad 2.** Podle definice ukažte, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^3 + 1} = 0$ .

*Řešení:*

K danému  $\varepsilon > 0$  máme najít  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, aby pro každé  $n > n_0$  bylo  $\frac{2n}{n^3 + 1} < \varepsilon$ .

Platí nerovnosti

$$\frac{2n}{n^3 + 1} \leq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} \leq \frac{2}{n}.$$

Proto stačí zvolit  $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$ . Tedy lze vzít jakékoliv  $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ .

---

**Příklad 3.** Najděte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$ .

*Řešení:*

Daný výraz lze upravit na tvar

$$\frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3} = \frac{8n^3 + 8n}{2n^3 + 6n}.$$

Tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3} = 4$ .

---

**Příklad 4.** Najděte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n-1)!}{(2n+1)! - (2n)!}$ .

*Řešení:*

Daný výraz lze například napsat ve tvaru

$$\frac{(2n+1)! + (2n-1)!}{(2n+1)! - (2n)!} = \frac{(2n-1)!((2n+1)2n+1)}{(2n-1)!((2n+1)2n-2n)} = \frac{4n^2 + 2n + 1}{4n^2}.$$

Tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n-1)!}{(2n+1)! - (2n)!} = 1$ .

---

**Příklad 5.** Určete  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^{n+3} + 3^n}{2^{n+8} - 3^{n+1}}$ .

*Řešení:*

Po zkrácení  $3^n$  dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^{n+3} + 3^n}{2^{n+8} - 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^3 \cdot (-2/3)^n + 1}{2^8 \cdot (2/3)^n - 3} = -\frac{1}{3}.$$

---

**Příklad 6.** Kolik je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{2 + a^n}$ , kde  $a > 0$ ?

*Řešení:*

Pro  $a > 1$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$ . Proto je pro  $a > 1$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{2 + a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2a^{-n} + 1} = 1$ .

Pro  $a = 1$  je daný výraz roven konstantě  $a_n = \frac{1}{3}$ , a tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{2 + a^n} = \frac{1}{3}$ .

Pro  $0 < a < 1$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ . Proto je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{2 + a^n} = 0$ .

---

**Příklad 7.** Najděte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n \sin n!}{n^2 + 1}$ .

*Řešení:*

Posloupnost  $\sin n!$  je omezená, protože  $|\sin n!| \leq 1$ . Neboť  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n^2 + 1} = 0$ , je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n \sin n!}{n^2 + 1} = 0.$$

---

**Příklad 8.** Najděte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n \cos n}{3n + 7}$ .

*Řešení:*

Tato limita neexistuje. Je jednoduché ukázat, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{3n + 7} = \frac{5}{3}$ . Ale již není tak snadné ukázat, že posloupnost  $a_n = \cos n$  nemá limitu. Přesto kdybyste se moc snažili, ukážete, že množina hromadných bodů této posloupnosti je celý interval  $\langle -1, 1 \rangle$ . Ale spíš si to jen pamatujte.

---

**Příklad 9.** Najděte limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n$ .

*Řešení:*

Jak by měl každý vědět, je tato limita rovna  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n = e^{-4}$ . Nedokazujte to, ale taky si příklady podobného typu spíš pamatujte.

---

**Příklad 10.** Kolik je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n+2}$  ?

*Řešení:*

Daný výraz lze upravit na tvar

$$\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n+2} = \left(1 + \frac{4}{2n-1}\right)^{3n+2}.$$

Tedy byste měli vědět, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n+2} = e^6$ .

---

**Příklad 11.** Najděte  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ .

*Řešení:*

Protože víme, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , dostaneme  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ .

---

**Příklad 12.** Dokažte, že platí následující věta: Nechť  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \pm\infty$ .

Pak je  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n)^{\beta_n} = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \beta_n\right)$ .

*Řešení:*

Daný výraz je typu  $1^\infty$ . Proto jej upravíme na tvar

$$(1 + \alpha_n)^{\beta_n} = e^{\beta_n \ln(1 + \alpha_n)} = \exp\left(\beta_n \cdot \alpha_n \cdot \frac{\ln(1 + \alpha_n)}{\alpha_n}\right).$$

Pak je ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n)^{\beta_n} = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n \alpha_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \alpha_n)}{\alpha_n}\right).$$

Ale podle předchozího příkladu lze tušit (toto tvrzení dokážeme později), že

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \alpha_n)}{\alpha_n} = 1$ . Proto platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n)^{\beta_n} = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \beta_n\right).$$

---

**Příklad 13.** Najděte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n}{n^3 + 1}\right)^{n^2 + 3}$ .

*Řešení:*

Z předcházejícího příkladu plyne, že stačí najít  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n^3 + 1} (n^2 + 3)\right) = 2$ . Tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n}{n^3 + 1}\right)^{n^2 + 3} = e^2.$$

---

**Příklad 14.** Určete hromadné body posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots$$

*Řešení:*

Tato posloupnost je složena ze dvou podposloupností  $\left(\frac{1}{2^n}\right)$  a  $\left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right)$ . Limity těchto posloupností jsou  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1$ . Tedy hromadné body posloupnosti  $(a_n)$  jsou body 0 a 1.

---

**Příklad 15.** Najděte hromadné body posloupnosti  $a_n = 3\left(1 - \frac{4}{3n}\right) + 2 \cos n\pi$ .

*Řešení:*

Daná posloupnost je součtem dvou posloupností. První posloupnost  $\left(3\left(1 - \frac{4}{3n}\right)\right)$  má limitu 3. Druhou posloupnost lze napsat ve tvaru  $2 \cos n\pi = 2 \cdot (-1)^n$ . Tato posloupnost má hromadné body  $\pm 2$ . Proto jsou hromadné body dané posloupnosti rovny 5 a 1

---

**Příklad 16.** Určete hromadné body posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$$

*Řešení:*

Posloupnost  $(a_n)$  obsahuje všechna racionální čísla z intervalu  $(0, 1)$ . Proto je množina hromadných bodů této posloupnosti celý interval  $\langle 0, 1 \rangle$ .

---

### CVIČENÍ 3 — Limity posloupností

**Příklad 1.** Najděte limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(3n+2)(3n-8)}{n^3 - n^2 + 1}$ .

*Řešení:*

Daný výraz lze upravit na tvar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(3n+2)(3n-8)}{n^3 - n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 + 1/n)(3 + 2/n)(3 - 8/n)}{1 - 1/n + 1/n^3} = 18.$$

---

**Příklad 2.** Podle definice ukažte, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^3 + 1} = 0$ .

*Řešení:*

K danému  $\varepsilon > 0$  máme najít  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, aby pro každé  $n > n_0$  bylo  $\frac{2n}{n^3 + 1} < \varepsilon$ .

Platí nerovnosti

$$\frac{2n}{n^3 + 1} \leq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} \leq \frac{2}{n}.$$

Proto stačí zvolit  $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$ . Tedy lze vzít jakékoliv  $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ .

---

**Příklad 3.** Najděte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$ .

*Řešení:*

Daný výraz lze upravit na tvar

$$\frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3} = \frac{8n^3 + 8n}{2n^3 + 6n}.$$

Tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3} = 4$ .

---

**Příklad 4.** Najděte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n-1)!}{(2n+1)! - (2n)!}$ .

*Řešení:*

Daný výraz lze například napsat ve tvaru

$$\frac{(2n+1)! + (2n-1)!}{(2n+1)! - (2n)!} = \frac{(2n-1)!((2n+1)2n+1)}{(2n-1)!((2n+1)2n-2n)} = \frac{4n^2 + 2n + 1}{4n^2}.$$

Tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n-1)!}{(2n+1)! - (2n)!} = 1$ .

---

**Příklad 5.** Určete  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^{n+3} + 3^n}{2^{n+8} - 3^{n+1}}$ .

*Řešení:*

Po zkrácení  $3^n$  dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^{n+3} + 3^n}{2^{n+8} - 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^3 \cdot (-2/3)^n + 1}{2^8 \cdot (2/3)^n - 3} = -\frac{1}{3}.$$

---

**Příklad 6.** Kolik je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{2 + a^n}$ , kde  $a > 0$ ?

*Řešení:*

Pro  $a > 1$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$ . Proto je pro  $a > 1$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{2 + a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2a^{-n} + 1} = 1$ .

Pro  $a = 1$  je daný výraz roven konstantě  $a_n = \frac{1}{3}$ , a tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{2 + a^n} = \frac{1}{3}$ .

Pro  $0 < a < 1$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ . Proto je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{2 + a^n} = 0$ .

---

**Příklad 7.** Najděte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n \sin n!}{n^2 + 1}$ .

*Řešení:*

Posloupnost  $\sin n!$  je omezená, protože  $|\sin n!| \leq 1$ . Neboť  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n^2 + 1} = 0$ , je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n \sin n!}{n^2 + 1} = 0.$$

---

**Příklad 8.** Najděte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n \cos n}{3n + 7}$ .

*Řešení:*

Tato limita neexistuje. Je jednoduché ukázat, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{3n + 7} = \frac{5}{3}$ . Ale již není tak snadné ukázat, že posloupnost  $a_n = \cos n$  nemá limitu. Přesto kdybyste se moc snažili, ukážete, že množina hromadných bodů této posloupnosti je celý interval  $\langle -1, 1 \rangle$ . Ale spíš si to jen pamatujte.

---

**Příklad 9.** Najděte limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n$ .

*Řešení:*

Jak by měl každý vědět, je tato limita rovna  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n = e^{-4}$ . Nedokazujte to, ale taky si příklady podobného typu spíš pamatujte.

---

**Příklad 10.** Kolik je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n+2}$  ?

*Řešení:*

Daný výraz lze upravit na tvar

$$\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n+2} = \left(1 + \frac{4}{2n-1}\right)^{3n+2}.$$

Tedy byste měli vědět, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n+2} = e^6$ .

---

**Příklad 11.** Najděte  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ .

*Řešení:*

Protože víme, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , dostaneme  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ .

---

**Příklad 12.** Dokažte, že platí následující věta: Nechť  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \pm\infty$ .

Pak je  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n)^{\beta_n} = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \beta_n\right)$ .

*Řešení:*

Daný výraz je typu  $1^\infty$ . Proto jej upravíme na tvar

$$(1 + \alpha_n)^{\beta_n} = e^{\beta_n \ln(1 + \alpha_n)} = \exp\left(\beta_n \cdot \alpha_n \cdot \frac{\ln(1 + \alpha_n)}{\alpha_n}\right).$$

Pak je ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n)^{\beta_n} = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n \alpha_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \alpha_n)}{\alpha_n}\right).$$

Ale podle předchozího příkladu lze tušit (toto tvrzení dokážeme později), že

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \alpha_n)}{\alpha_n} = 1$ . Proto platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n)^{\beta_n} = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \beta_n\right).$$

---

**Příklad 13.** Najděte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n}{n^3 + 1}\right)^{n^2 + 3}$ .

*Řešení:*

Z předcházejícího příkladu plyne, že stačí najít  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n^3 + 1} (n^2 + 3)\right) = 2$ . Tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n}{n^3 + 1}\right)^{n^2 + 3} = e^2.$$

---

**Příklad 14.** Určete hromadné body posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots$$

*Řešení:*

Tato posloupnost je složena ze dvou podposloupností  $\left(\frac{1}{2^n}\right)$  a  $\left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right)$ . Limity těchto posloupností jsou  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1$ . Tedy hromadné body posloupnosti  $(a_n)$  jsou body 0 a 1.

---

**Příklad 15.** Najděte hromadné body posloupnosti  $a_n = 3 \left(1 - \frac{4}{3n}\right) + 2 \cos n\pi$ .

*Řešení:*

Daná posloupnost je součtem dvou posloupností. První posloupnost  $\left(3 \left(1 - \frac{4}{3n}\right)\right)$  má limitu 3. Druhou posloupnost lze napsat ve tvaru  $2 \cos n\pi = 2 \cdot (-1)^n$ . Tato posloupnost má hromadné body  $\pm 2$ . Proto jsou hromadné body dané posloupnosti rovny 5 a 1

---

**Příklad 16.** Určete hromadné body posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$$

*Řešení:*

Posloupnost  $(a_n)$  obsahuje všechna racionální čísla z intervalu  $(0, 1)$ . Proto je množina hromadných bodů této posloupnosti celý interval  $\langle 0, 1 \rangle$ .

---



## CVIČENÍ 5 — Derivace

**Příklad 1.** Najděte derivaci funkce  $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)(2x^3 + x^2 - x)$ .

*Řešení:*

Funkci  $f(x)$  lze zapsat ve tvaru

$$f(x) = 2x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x.$$

Podle věty o linearitě derivace a známého vztahu  $(x^n)' = nx^{n-1}$  je

$$f'(x) = 12x^5 - 15x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 2x - 1.$$

---

**Příklad 2.** Najděte derivaci funkce  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .

*Řešení:*

Jestliže napíšeme funkci  $f(x)$  ve tvaru  $f(x) = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$ , snadno dostaneme

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}.$$

---

**Příklad 3.** Najděte derivaci funkce  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$ .

*Řešení:*

Pomocí věty o derivaci podílu získáme

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - (1 + \ln x)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

---

**Příklad 4.** Najděte derivaci funkce  $f(x) = 2^{x^2}$ .

*Řešení:*

Když napíšeme funkci  $f(x)$  ve tvaru  $f(x) = e^{x^2 \ln 2}$ , získáme pomocí věty o derivaci složené funkce

$$f'(x) = e^{x^2 \ln 2} 2x \ln 2 = 2^{x^2+1} x \ln 2.$$

---

**Příklad 5.** Najděte derivaci funkce  $f(x) = x^{2x}$ .

*Řešení:*

Jestliže napíšeme funkci  $f(x)$  ve tvaru  $f(x) = e^{2x \ln x}$ , získáme pomocí věty o derivaci složené funkce

$$f'(x) = e^{2x \ln x} \left( 2 \ln x + \frac{2x}{x} \right) = 2x^{2x} (\ln x + 1).$$

---

**Příklad 6.** Najděte derivaci funkce  $f(x) = \ln(\operatorname{arctg} x)$ .

*Řešení:*

Podle věty o derivaci složené funkce a známých vzorců pro derivace je

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

---

**Příklad 7.** Najděte derivaci funkce  $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

*Řešení:*

Podle věty o derivaci složené funkce a známých vzorců pro derivace je

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{\ln 10 \cdot \sqrt{x^2 + 1}}.$$

---

**Příklad 8.** Najděte derivaci funkce  $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$ .

*Řešení:*

Podle věty o derivaci složené funkce a známých vzorců pro derivace je

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}.$$

---

**Příklad 9.** Najděte derivaci funkce  $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$ .

*Řešení:*

Podle věty o derivaci složené funkce a známých vzorců pro derivace je

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}.$$

---

**Příklad 10.** Najděte derivaci funkce  $f(x) = \operatorname{arccotg}(\operatorname{tg} x)$ .

*Řešení:*

Podle věty o derivaci složené funkce a známých vzorců pro derivace je

$$f'(x) = -\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x + \sin^2 x} = -1.$$

---

**Příklad 11.** Najděte derivaci funkce  $f(x) = x^{\ln x}$ .

*Řešení:*

Funkci  $f(x)$  přepíšeme do tvaru  $f(x) = e^{\ln^2 x}$ . Podle věty o derivaci složené funkce dostaneme

$$f'(x) = e^{\ln^2 x} \cdot \frac{2 \ln x}{x} = 2x^{-1+\ln x} \cdot \ln x.$$

---

**Příklad 12.** Najděte derivaci funkce  $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x}$ .

*Řešení:*

Pomocí vět o derivacích postupně dostaneme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{tg}(x/2)} \frac{1}{\cos^2(x/2)} \frac{1}{2} - \frac{-\sin^3 x - 2 \sin x \cos^2 x}{2 \sin^4 x} = \\ &= \frac{1}{4 \sin(x/2) \cos(x/2)} - \frac{-\sin^2 x - 2 \cos^2 x}{2 \sin^3 x} = \frac{1}{2 \sin x} + \frac{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}{2 \sin^3 x} = \\ &= \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{2 \sin^3 x} = \frac{1}{\sin^3 x}. \end{aligned}$$

---

**Příklad 13.** Najděte derivaci funkce  $f(x) = -x \operatorname{cotg} x + \ln(\sin x) - \frac{x^2}{2}$ .

*Řešení:*

Pomocí vět o derivacích postupně dostaneme

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\operatorname{cotg} x + \frac{x}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin x} - x = \frac{x(1 - \sin^2 x)}{\sin^2 x} = \\ &= x \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = x \operatorname{cotg}^2 x. \end{aligned}$$

---

**Příklad 14.** Najděte derivaci funkce  $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$ .

*Řešení:*

Pomocí vět o derivacích postupně dostaneme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} + x \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{x+1 - (x-1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} + \frac{2x}{(x+1)^2 + (x-1)^2} - \frac{x}{x^2+1} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} + \frac{2x}{2(x^2+1)} - \frac{x}{x^2+1} = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}. \end{aligned}$$


---

**Příklad 15.** Najděte derivaci  $f'(1)$  funkce  $f(x) = x + (x-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ .

*Řešení:*

V některých případech když hledáme derivaci funkce  $f(x)$  v daném bodě, není třeba hledat derivaci v obecném bodě, ale určit derivaci pomocí definice. Například v tomto případě je  $f(1) = 1$ . Tedy podle definice derivace je

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h} \left( 1 + h + h \arcsin \sqrt{\frac{1+h}{2+h}} - 1 \right) \right] = \\ &= 1 + \lim_{h \rightarrow 0} \arcsin \sqrt{\frac{1+h}{2+h}} = 1 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Jinak lze výpočet zjednodušit i jiným způsobem. Podle věty o derivaci součtu a součinu je

$$f'(x) = 1 + \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + (x-1) \left[ \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} \right]'$$

Protože v bodě  $x = 1$  je  $\sqrt{\frac{x}{x+1}}$  rovno  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  a derivace funkce  $\left[ \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} \right]'$  je v tomto bodě omezená je

$$f'(1) = 1 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \left[ \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} \right]'_{x=1} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$


---

**Příklad 16.** Nechť je  $D(x)$  tzv. *Dirichletova funkce*, která je definována předpisem

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ iracionální} \\ 0 & \text{pro } x \text{ racionální.} \end{cases}$$

Najděte derivaci funkce  $f(x) = x^2 \cdot D(x)$  v bodě  $x = 0$ .

*Řešení:*

Protože funkce  $D(x)$  není spojitá dokonce v žádném bodě, musíme se pokusit najít derivaci  $f'(0)$  pomocí definice. Podle ní je

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 D(h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (hD(h)).$$

Protože platí  $|hD(h)| \leq |h|$ , je tato limita rovna nule. Tedy  $f'(0) = 0$ .

---

**Příklad 17.** Najděte obě jednostranné derivace funkce  $f(x) = e^{-|x|}$  v bodě  $x = 0$ .

*Řešení:*

Pro  $x \geq 0$  je  $f(x) = e^{-|x|} = e^{-x}$ . Tedy  $f'_+(0) = -1$ .

Pro  $x \leq 0$  je  $f(x) = e^{-|x|} = e^x$ . Tedy  $f'_-(0) = 1$ .

---

**Příklad 18.** Najděte obě jednostranné derivace funkce  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  v bodě  $x = 0$ .

*Řešení:*

Derivace funkce  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  je v obecném bodě různém od nuly dána vztahem  $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}$ . V bodě  $x = 0$  není tato derivace definována. Proto raději určíme jednostranné derivace přímo z definice. Pro  $x \geq 0$  platí

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\sqrt[3]{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0_+} h^{-1/3} = +\infty.$$

Pro  $x \leq 0$  platí

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0_-} \frac{\sqrt[3]{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0_-} h^{-1/3} = -\infty.$$

---

**Příklad 19.** Najděte derivaci  $f'(0)$  funkce  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  pro  $x \neq 0$  a  $f(0) = 0$ .

*Řešení:*

Protože je  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , je funkce  $f(x)$  v bodě  $x = 0$  spojitá. Lze se tedy pokusit najít její derivaci. Derivace funkce  $f(x)$  v obecném bodě  $x \neq 0$  je

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Tato funkce ale nemá limitu v bodě  $x = 0$ . Přesto je

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h} \left( h^2 \sin \frac{1}{h} - 0 \right) \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left( h \sin \frac{1}{h} \right) = 0.$$

Tedy derivace funkce  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  v bodě  $x = 0$  existuje a je rovna nule. Uvědomte si, že derivace této spojitě funkce není v bodě  $x = 0$  spojitá.

---

CVIČENÍ 6 — Diferenciály a geometrický význam derivace

**Příklad 1.** Najděte diferenciál  $df(x_0; h)$ , kde  $f(x) = (\sin x)^{x^2} + x$  a  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ .

*Řešení:*

Diferenciál  $df(x_0; h)$  funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  je definován vztahem  $df(x_0; h) = f'(x_0) \cdot h$ . Protože platí  $f(x) = (\sin x)^{x^2} + x = e^{x^2 \ln(\sin x)} + x$ , je

$$f'(x) = (\sin x)^{x^2} \left( 2x \ln(\sin x) + x^2 \frac{\cos x}{\sin x} \right) + 1.$$

Tedy  $f'(\pi/2) = 1$  a  $df(\pi/2; h) = h$ .

---

**Příklad 2.** Najděte diferenciál  $df(x_0; h)$ , kde  $f(x) = \left( \frac{1}{1-x^2} \right)^{\cosh x} + e^{2x}$  a  $x_0 = 0$ .

*Řešení:*

Diferenciál  $df(x_0; h)$  funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  je definován vztahem  $df(x_0; h) = f'(x_0) \cdot h$ . Protože platí  $f(x) = \left( \frac{1}{1-x^2} \right)^{\cosh x} + e^{2x} = e^{-\cosh x \cdot \ln(1-x^2)} + e^{2x}$ , je

$$f'(x) = (1-x^2)^{-\cosh x} \left( -\sinh x \cdot \ln(1-x^2) + \cosh x \cdot \frac{2x}{1-x^2} \right) + 2e^{2x}.$$

Tedy  $f'(0) = 2$  a  $df(0; h) = 2h$ .

---

**Příklad 3.** Najděte diferenciál  $df(x_0; h)$ , kde  $f(x) = \left( \frac{1}{e^2-x^2} \right)^{\cosh x} + e^{-3x}$  a  $x_0 = 0$ .

*Řešení:*

Diferenciál  $df(x_0; h)$  funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  je definován vztahem  $df(x_0; h) = f'(x_0) \cdot h$ . Protože platí  $f(x) = \left( \frac{1}{e^2-x^2} \right)^{\cosh x} + e^{-3x} = e^{-\cosh x \cdot \ln(e^2-x^2)} + e^{-3x}$ , je

$$f'(x) = (e^2-x^2)^{-\cosh x} \left( -\sinh x \cdot \ln(e^2-x^2) + \cosh x \cdot \frac{2x}{e^2-x^2} \right) - 3e^{-3x}.$$

Tedy  $f'(0) = -3$  a  $df(0; h) = -3h$ .

---

**Příklad 4.** Najděte diferenciál  $df(x_0; h)$ , kde  $f(x) = (\sin x)^x + 2x$  a  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ .

*Řešení:*

Diferenciál  $df(x_0; h)$  funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  je definován vztahem  $df(x_0; h) = f'(x_0) \cdot h$ . Protože platí  $f(x) = (\sin x)^x + 2x = e^{x \ln(\sin x)} + 2x$ , je

$$f'(x) = (\sin x)^x \left( \ln(\sin x) + x \frac{\cos x}{\sin x} \right) + 2.$$

Tedy  $f'(\pi/2) = 2$  a  $df(\pi/2; h) = 2h$ .

---

**Příklad 5.** Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu  $2^{1.003}$ .

*Řešení:*

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce  $f(x)$  v bodě  $x$  přibližně psát

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

V našem případě zvolíme  $f(x) = 2^x$ ,  $x_0 = 1$  a  $x - x_0 = \Delta x = 0.003$ . Potom je  $f(x_0) = f(1) = 2$  a  $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2$ . Tedy  $f'(x_0) = f'(1) = 2 \cdot \ln 2$ . Protože  $\ln 2 \doteq 0.69315$  dostaneme  $2^{1.003} \approx 2 + 2 \ln 2 \cdot 0.003 \doteq 2.004$ .

---

**Příklad 6.** Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu  $\ln 1.1$ .

*Řešení:*

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce  $f(x)$  v bodě  $x$  přibližně psát

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

V našem případě zvolíme  $f(x) = \ln x$ ,  $x_0 = 1$  a  $x - x_0 = \Delta x = 0.1$ . Potom je  $f(x_0) = f(1) = 0$  a  $f'(x) = \frac{1}{x}$ . Tedy  $f'(x_0) = f'(1) = 1$ . Tedy  $\ln 1.1 \approx 0.1$ .

---

**Příklad 7.** Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu  $\sqrt{80}$ .

*Řešení:*

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce  $f(x)$  v bodě  $x$  přibližně psát

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

V našem případě zvolíme  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 81$  a  $x - x_0 = \Delta x = -1$ . Potom je  $f(x_0) = f(81) = 9$  a  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Tedy  $f'(x_0) = f'(81) = \frac{1}{18}$ . Tedy  $\sqrt{80} \approx 9 + \frac{1}{18} \cdot (-1) \doteq 8.9445$ .

---

**Příklad 8.** Pro měření gravitačního zrychlení pomocí kyvů kyvadla se používá vztah  $g = \frac{4\pi^2\ell}{T^2}$ , kde  $\ell$  je délka kyvadla,  $T$  je perioda kyvu kyvadla. Jak se odrazí na hodnotě  $g$  relativní chyba  $\delta$  při měření: a) délky  $\ell$ ; b) periody  $T$ ?

*Řešení:*

Předpokládejme, že  $\ell_0$  a  $T_0$  jsou přesné hodnoty délky kyvadla a jeho periody. Pak je přesná hodnota gravitačního zrychlení  $g_0 = \frac{4\pi^2\ell_0}{T_0^2}$ . Jestliže měřením zjistíme délku kyvadla  $\ell = \ell_0 + \Delta\ell$ , resp. periodu  $T = T_0 + \Delta T$  ( $\Delta\ell = \ell - \ell_0$  a  $\Delta T = T - T_0$  se nazývají *absolutní chyba* a veličiny  $\delta\ell = \frac{\Delta\ell}{\ell_0}$  a  $\delta T = \frac{\Delta T}{T_0}$  jsou relativní chyby), najdeme z daného vzorce zrychlení  $g = \frac{4\pi^2\ell}{T^2}$ , resp.  $g_0 = \frac{4\pi^2\ell_0}{T_0^2}$ . Absolutní chyba nalezeného gravitačního zrychlení je  $\Delta g = g - g_0 = \frac{4\pi^2(\ell - \ell_0)}{T_0^2}$ , resp.  $\Delta g = g - g_0 = \frac{4\pi^2\ell_0}{T^2} - \frac{4\pi^2\ell_0}{T_0^2}$ . Relativní chybu měření  $g$  pak definujeme jako  $\delta g = \frac{\Delta g}{g_0}$ . pomocí diferenciálů pak dostaneme v prvním případě

$$\Delta g = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot \Delta\ell \quad \text{tj.} \quad \delta g = \delta\ell.$$

Ve druhém případě je

$$\Delta g = \frac{4\pi^2\ell_0}{(T_0 + \Delta T)^2} - \frac{4\pi^2\ell_0}{T_0^2} \approx -\frac{8\pi^2\ell_0}{T_0^3} \cdot \Delta T, \quad \text{tedy} \quad \delta g = -2\delta T.$$

Obecně jestliže je znám vztah mezi dvěma veličinami  $y = f(x)$  a z měření veličiny  $x$  určíme pomocí tohoto vztahu veličinu  $y$ , dostaneme pro absolutní a relativní chyby vztahy

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x \quad \text{a} \quad \delta y = \frac{\Delta y}{y_0} \approx \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot \Delta x.$$

**Příklad 9.** Najděte rovnice tečny ke grafu funkce  $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$  v bodě  $M = [1; ?]$ .

*Řešení:*

Rovnice tečny ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  je  $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ , kde  $y_0 = f(x_0)$ . V našem případě je  $y_0 = f(1) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4}$  a protože

$$f'(x) = -\frac{1}{1 + \left(\frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}\right)^2} \cdot \frac{-(1 + \ln x)/x - (1 - \ln x)/x}{(1 + \ln x)^2},$$



je  $f'(1) = 1$ . Tedy rovnice hledané tečny je  $y - \frac{\pi}{4} = x - 1$ , neboli  $y = x - 1 + \frac{\pi}{4}$ .

---

**Příklad 10.** Najděte rovnice tečny ke grafu funkce  $f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}$  v bodě  $M = [1; ?]$ .

*Řešení:*

Rovnice tečny ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  je  $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ , kde  $y_0 = f(x_0)$ . V našem případě je  $y_0 = f(1) = 0$  a protože

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2},$$

je  $f'(1) = -1$ . Tedy rovnice hledané tečny je  $y = -(x - 1)$ , neboli  $y = -x + 1$ .

---

**Příklad 11.** Najděte rovnice tečny ke grafu funkce  $f(x) = (x^2 - 1)^{\sin x}$  v bodě  $M = [\pi; ?]$ .

*Řešení:*

Rovnice tečny ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  je  $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ , kde  $y_0 = f(x_0)$ . V našem případě je  $y_0 = f(\pi) = 1$  a protože platí  $f(x) = e^{\sin x \cdot \ln(x^2 - 1)}$ , je

$$f'(x) = (x^2 - 1)^{\sin x} \left( \cos x \cdot \ln(x^2 - 1) + \sin x \cdot \frac{2x}{x^2 - 1} \right).$$

Tedy  $f'(\pi) = -\ln(\pi^2 - 1)$ . Rovnice hledané tečny je  $y - 1 = -\ln(\pi^2 - 1) \cdot (x - \pi)$ , neboli  $y = -x \ln(\pi^2 - 1) + \pi \ln(\pi^2 - 1) + 1$ .

---

**Příklad 12.** Najděte rovnice tečny ke grafu funkce  $f(x) = (\cos x)^{\cosh x} + 3x$  v bodě  $M = [0; ?]$ .

*Řešení:*

Rovnice tečny ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  je  $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ , kde  $y_0 = f(x_0)$ . V našem případě je  $y_0 = f(0) = 1$  a protože platí  $f(x) = e^{\cosh x \cdot \ln(\cos x)} + 3x$ , je

$$f'(x) = (\cos x)^{\cosh x} (\sinh x \cdot \ln(\cos x) - \cosh x \cdot \operatorname{tg} x) + 3.$$

Tedy  $f'(0) = 3$ . Rovnice hledané tečny je  $y - 1 = 3x$ , neboli  $y = 3x + 1$ .

---

**Příklad 13.** Najděte rovnice normály ke grafu funkce  $f(x) = \left( \frac{1}{1 - x^2} \right)^{\cosh x} + e^{2x}$  v bodě  $M = [0; ?]$ .

*Řešení:*

Rovnice normály ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  je  $-f'(x_0) \cdot (y - y_0) = x - x_0$ , kde  $y_0 = f(x_0)$ . V našem případě je  $y_0 = f(0) = 2$  a protože platí  $f(x) = e^{-\cosh x \cdot \ln(1-x^2)} + e^{2x}$ , je

$$f'(x) = (1-x^2)^{-\cosh x} \left( -\sinh x \cdot \ln(1-x^2) + \cosh x \cdot \frac{2x}{1-x^2} \right) + 2e^{2x}.$$

Tedy  $f'(0) = 2$ . Rovnice hledané normály je  $-2(y - 2) = x$ , neboli  $y = -\frac{x}{2} + 2$ .

---

**Příklad 14.** Najděte rovnice normály ke grafu funkce  $f(x) = (\sin x)^{2x} + x^2$  v bodě  $M = [\pi/2; ?]$ .

*Řešení:*

Rovnice normály ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  je  $-f'(x_0) \cdot (y - y_0) = x - x_0$ , kde  $y_0 = f(x_0)$ . V našem případě je  $y_0 = f(\pi/2) = 1 + \frac{\pi^2}{4}$  a protože platí  $f(x) = e^{2x \cdot \ln(\sin x)} + x^2$ , je

$$f'(x) = (\sin x)^{2x} \left( 2 \ln(\sin x) + 2x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right) + 2x.$$

Tedy  $f'(\pi/2) = \pi$ . Rovnice hledané normály je  $-\pi \left( y - 1 - \frac{\pi^2}{4} \right) = x - \frac{\pi}{2}$ , neboli  $y = -\frac{x}{\pi} + \frac{\pi^2}{4} + \frac{3}{2}$ .

---

**Příklad 15.** Najděte rovnice normály ke grafu funkce  $f(x) = (\cos x)^{\cosh x} + 3x$  v bodě  $M = [0; ?]$ .

*Řešení:*

Rovnice normály ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  je  $-f'(x_0) \cdot (y - y_0) = x - x_0$ , kde  $y_0 = f(x_0)$ . V našem případě je  $y_0 = f(0) = 1$  a protože platí  $f(x) = e^{\cosh x \cdot \ln(\cos x)} + 3x$ , je

$$f'(x) = (\cos x)^{\cosh x} (\sinh x \ln(\cos x) - \cosh x \cdot \operatorname{tg} x) + 3.$$

Tedy  $f'(0) = 3$ . Rovnice hledané normály je  $-3(y - 1) = x$ , neboli  $y = -\frac{x}{3} + 1$ .

---

**Příklad 16.** Najděte rovnice normály ke grafu funkce  $f(x) = \ln \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$  v bodě  $M = [1/2; ?]$ .

*Řešení:*

Rovnice normály ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  je  $-f'(x_0) \cdot (y - y_0) = x - x_0$ , kde  $y_0 = f(x_0)$ . V našem případě je  $y_0 = f(1/2) = -\frac{\ln 3}{2}$ . Protože

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{1-x^2},$$

je  $f'(1/2) = \frac{8}{3}$ . Tedy rovnice hledané normály je  $-\frac{8}{3} \left( y + \frac{\ln 3}{2} \right) = x - \frac{1}{2}$ , neboli  $y = -\frac{3}{8}x + \frac{3}{16} - \frac{\ln 3}{2}$ .

---

**Příklad 17.** Najděte rovnice normály ke grafu funkce  $f(x) = (\sin x)^{x^2} + 3 \cos x$  v bodě  $M = [\pi/2; ?]$ .

*Řešení:*

Rovnice normály ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  je  $-f'(x_0) \cdot (y - y_0) = x - x_0$ , kde  $y_0 = f(x_0)$ . V našem případě je  $y_0 = f(\pi/2) = 1$  a protože platí  $f(x) = e^{x^2 \cdot \ln(\sin x)} + 3 \cos x$ , je

$$f'(x) = (\sin x)^{x^2} \left( 2x \ln(\sin x) + x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right) - 3 \sin x.$$

Tedy  $f'(\pi/2) = -3$ . Rovnice hledané normály je  $3(y - 1) = x - \frac{\pi}{2}$ , neboli  $y = \frac{x}{3} + 1 - \frac{\pi}{6}$ .

---

**Příklad 18.** Najděte rovnice normály ke grafu funkce  $f(x) = (4 - x^2)^{\sin x} + 3 \cos x$  v bodě  $M = [0; ?]$ .

*Řešení:*

Rovnice normály ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  je  $-f'(x_0) \cdot (y - y_0) = x - x_0$ , kde  $y_0 = f(x_0)$ . V našem případě je  $y_0 = f(0) = 4$  a protože platí  $f(x) = e^{\sin x \cdot \ln(4-x^2)} + 3 \cos x$ , je

$$f'(x) = (4 - x^2)^{\sin x} \left( \cos x \ln(4 - x^2) - \frac{2x}{4 - x^2} \cdot \sin x \right) - 3 \sin x.$$

Tedy  $f'(0) = \ln 4$ . Rovnice hledané normály je  $-\ln 4 \cdot (y - 4) = x$ , neboli  $y = -\frac{x}{\ln 4} + 4$ .

---

**Příklad 19.** Určete rovnici tečny ke grafu funkce  $y = x^3 + x - 2$ , která je rovnoběžná s přímkou  $y = 4x - 1$ .

*Řešení:*

Rovnice tečny ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  je dána rovnicí  $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ , kde  $y_0 = f(x_0)$ . Protože  $f'(x_0)$  je směrnice hledané tečny, která má být rovnoběžná s danou přímkou, jejíž směrnice je  $k = 4$ , budeme hledat na grafu funkce  $y = x^3 + x - 2$  body  $[x_0; y_0]$ , ve kterém je  $f'(x_0) = 3x_0^2 + 1 = 4$ . Z této rovnice najdeme  $x_0 = \pm 1$ . Proto jsou body dotyku  $[1; 0]$  nebo  $[-1; -4]$ . Rovnice hledané tečny tedy jsou  $y = 4(x - 1)$  nebo  $y + 4 = 4(x + 1)$ . Hledaná rovnice tečny je  $y = 4x$ , která se grafu funkce dotýká ve dvou bodech  $[1; 0]$  a  $[-1; -4]$ .

---

**Příklad 20.** Určete rovnici tečny ke grafu funkce  $y = x^3 + 3x^2 - 5$ , která je kolmá na přímkou  $2x - 6y + 1 = 0$ .

*Řešení:*

Rovnice tečny ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  je dána rovnicí  $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ , kde  $y_0 = f(x_0)$ . Protože  $f'(x_0)$  je směrnice hledané tečny, která má být kolmá na danou přímkou, jejíž směrnice je  $k = \frac{1}{3}$ , budeme hledat na grafu funkce  $y = x^3 + 3x^2 - 5$  body  $[x_0; y_0]$ , ve kterém je  $f'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 = -3$ . Z této rovnice najdeme  $x_0 = -1$ . Proto je bod dotyku  $[-1; -3]$ . Rovnice hledané tečny tedy je  $y + 3 = -3(x + 1)$ , neboli  $y = -3x - 6$ .

---

**Příklad 21.** Určete rovnici tečny ke grafu funkce  $y = \ln x$ , která je kolmá na přímkou  $y = -2x - 1$ .

*Řešení:*

Směrnice dané přímky je  $k_p = -2$ . Protože hledáme tečnu kolmou na tuto přímku, musí být její směrnice rovna  $k_t = \frac{1}{2}$ . Protože směrnice tečny ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  je  $k_t = f'(x_0)$ , musí pro  $x_0$  platit rovnice  $f'(x_0) = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{2}$ . Tedy bod dotyku je  $[2; \ln 2]$ . Rovnice hledané tečny je tedy  $y - \ln 2 = \frac{1}{2}(x - 2)$ , neboli  $y = \frac{x}{2} - 1 + \ln 2$ .

---

**Příklad 22.** Určete rovnici normály ke grafu funkce  $y = x^2 - 4x + 5$ , která je rovnoběžná s přímkou  $x + 4y = 0$ .

*Řešení:*

Daná přímka má směrnici  $k_p = -\frac{1}{4}$ . Normála ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  má směrnici  $k_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$ . Protože hledáme rovnici normály rovnoběžné s danou přímkou, musí pro bod  $x_0$  platit  $f'(x_0) = 2x_0 - 4 = 4$ . Z toho plyne  $x_0 = 4$  a  $y_0 = f(x_0) = 5$ . Rovnice hledané normály je tedy  $y - 5 = -\frac{x - 4}{4}$ , neboli  $y = -\frac{x}{4} + 6$ .

---

**Příklad 23.** Určete rovnici normály ke grafu funkce  $y = -\sqrt{x} + 2$ , která je kolmá na přímkou  $y = -\frac{x}{2} + 4$ .

*Řešení:*

Daná přímka má směrnici  $k_p = -\frac{1}{2}$ . Přímka kolmá na tuto přímku má směrnici  $k = 2$ . Normála ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  má směrnici  $k_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$ . Protože hledáme rovnici normály kolmé danou přímkou, musí pro bod  $x_0$  platit  $f'(x_0) = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}} = -\frac{1}{2}$ . Z toho plyne  $x_0 = 1$  a  $y_0 = f(x_0) = 1$ . Rovnice hledané normály je tedy  $y - 1 = 2(x - 1)$ , neboli  $y = 2x - 1$ .

---

**Příklad 24.** Ke grafu funkce  $y = \frac{x+9}{x+5}$  veďte tečny, které procházejí bodem  $[0; 0]$ .

*Řešení:*

Rovnice tečny ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  je  $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ , kde  $y_0 = f(x_0)$ . Naším úkolem je na grafu funkce  $y = f(x)$  najít bod  $[x_0; y_0]$  tak, aby přímka  $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$  procházela bodem  $[0; 0]$ , tj. bod, pro který platí  $y_0 = f'(x_0) \cdot x_0$ . Protože je  $y_0 = \frac{x_0+9}{x_0+5}$  a  $f'(x_0) = -\frac{4}{(x_0+5)^2}$ , budeme hledat řešení rovnice  $-\frac{x_0+9}{x_0+5} = \frac{4x_0}{(x_0+5)^2}$ , čili  $x_0^2 + 18x_0 + 45 = 0$ . Její řešení jsou  $x_0 = -3$  nebo  $x_0 = -15$ . Hledané body dotyku proto jsou  $[-3; 3]$  nebo  $[-15; 3/5]$ . Protože je  $f'(-3) = -1$  a  $f'(-15) = -\frac{1}{25}$ , dostáváme dvě tečny  $y - 3 = -(x + 3)$ , neboli  $y = -x$ , a  $y - \frac{3}{5} = -\frac{x+15}{25}$ , neboli  $y = -\frac{x}{25}$ .

---

**Příklad 25.** Ke grafu funkce  $y = \frac{1}{x}$  veďte tečny, které procházejí bodem  $[-1; 1]$ .

*Řešení:*

Rovnice tečny ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  je  $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ , kde  $y_0 = f(x_0)$ . Naším úkolem je na grafu funkce  $y = f(x)$  najít bod  $[x_0; y_0]$  tak, aby přímka  $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$  procházela bodem  $[-1; 1]$ , tj. bod, pro který platí  $1 - y_0 = f'(x_0) \cdot (-1 - x_0)$ . Protože je  $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ , musí  $x_0$  splňovat rovnici  $1 - \frac{1}{x_0} = -\frac{-1 - x_0}{x_0^2}$ , čili  $x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0$ . Její řešení jsou  $x_0 = 1 \pm \sqrt{2}$ . Tedy hledané body dotyku jsou  $[\sqrt{2} + 1; \sqrt{2} - 1]$  a  $[1 - \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}]$ . Protože je  $f'(\sqrt{2} + 1) = -3 + 2\sqrt{2}$  a  $f'(1 - \sqrt{2}) = -3 - 2\sqrt{2}$ , jsou rovnice hledaných tečen

$$y - \sqrt{2} + 1 = (-3 + 2\sqrt{2})(x - \sqrt{2} - 1), \text{ neboli } y = (-3 + 2\sqrt{2})x - 2 + 2\sqrt{2}, \text{ a}$$
$$y + 1 + \sqrt{2} = (-3 - 2\sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}), \text{ neboli } y = (-3 - 2\sqrt{2})x - 2 - 2\sqrt{2}.$$

---

**Příklad 26.** Najděte rovnice tečen k hyperbole  $7x^2 - 2y^2 = 14$ , které jsou kolmé na přímkou  $2x + 4y - 3 = 0$ .

*Řešení:*

Směrnice dané přímky je  $k_p = -\frac{1}{2}$ . Proto musí být směrnice tečny rovna  $k_t = 2$ . Budeme tedy na hyperbole hledat body  $[x_0; y_0]$  takové, aby  $y'_0 = f'(x_0) = 2$ . Předpokládejme, že jsme našli řešení  $y = y(x)$  rovnice  $7x^2 - 2y^2 = 14$ . Jestliže derivujeme tuto rovnice, dostaneme v bodě  $x_0$  vztah  $14x_0 - 4y_0y'_0 = 0$ . Hledané body dotyku  $[x_0; y_0]$  tedy musí proto splňovat vztahy  $14x_0 - 8y_0 = 0$  a  $7x_0^2 - 2y_0^2 = 14$ . Řešení této soustavy rovnice nám dá dva body dotyku  $[4; 7]$  a  $[-4; -7]$ . Existují tedy dvě tečny s danými vlastnostmi:  $y - 7 = 2(x - 4)$ , neboli  $y = 2x - 1$ , a  $y + 7 = 2(x + 4)$ , čili  $y = 2x + 1$ .

---

CVIČENÍ 7 — L'Hospitalovo pravidlo, derivace vyšších řádů

**Příklad 1.** Dokažte nerovnost  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ .

*Řešení:*

Uvažujme funkci  $f(x) = x - \sin x$ . Protože je  $f(0) = 0$  a  $f'(x) = 1 - \cos x$ , existuje podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě číslo  $\xi \in (0, x)$ , pro které platí rovnost  $f(x) - f(0) = x - \sin x = (1 - \cos \xi)x$ . Protože je  $1 - \cos \xi \geq 0$  dostaneme pro  $x > 0$  nerovnost  $x - \sin x \geq 0$ . Tedy pro  $x \geq 0$  platí nerovnost  $\sin x \leq x$ .

Pomocí vztahu  $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$  dostaneme

$$|\sin x - \sin y| = \left| 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right| \leq 2 \sin \frac{|x-y|}{2} \leq |x-y|,$$

protože  $\left| \cos \frac{x+y}{2} \right| \leq 1$  a  $\sin \frac{|x-y|}{2} \leq \frac{|x-y|}{2}$ .

---

**Příklad 2.** Najděte  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}$ .

*Řešení:*

Jde o limitu výrazu typu  $\frac{0}{0}$ . Protože číselník i jmenovatel jsou diferencovatelné funkce, lze použít l'Hospitalovo pravidlo. Pomocí něj dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x + \sin x}{2x}.$$

Limita je opět typu  $\frac{0}{0}$ . Proto použijeme l'Hospitalovo pravidlo ještě jednou a dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x + \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x + \cos x}{2} = 1.$$


---

**Příklad 3.** Najděte  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ .

*Řešení:*

Jde o limitu typu  $\frac{0}{0}$ . Všechny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla jsou splněny. Pomocí něj dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 2.$$


---

**Příklad 4.** Najděte  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cotg x - 1}{x^2}$ .

*Řešení:*

Nejprve najdeme limitu  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cotg x$ . Ta je typu  $0 \cdot \infty$ . Ale lze psát

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cotg x = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Proto je daná limita typu  $\frac{0}{0}$ . Všechny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla jsou splněny. Proto je

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cotg x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cotg x - \frac{x}{\sin^2 x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x - x}{2x \sin^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x - x}{2x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{6x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 x}{6x^2} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**Příklad 5.** Najděte  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$ .

*Řešení:*

Jde o limitu typu  $\frac{0}{0}$ . Protože jsou splněny všechny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla, je jej pro výpočet této limity možné použít. Ale při podrobnějším zkoumání daného výrazu, zjistíme, že se v něm proměnná  $x$  vyskytuje pouze ve tvaru  $x^2$ . Proto je možné zavést pomocnou proměnnou  $t = x^2$  a zkoumat limitu  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos t}{t \sin t}$ , pro kterou je použití l'Hospitalova pravidla jednodušší. Dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos t}{t^2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2}.$$

**Příklad 6.** Najděte  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}$ .

*Řešení:*

Jde o limitu typu  $\frac{0}{0}$ . Všechny předpoklady l'Hospitalova pravidla jsou splněny.



Proto lze psát

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-4x^2}}{x^2} = \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}}{2x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1 \end{aligned}$$


---

**Příklad 7.** Najděte  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{\operatorname{tgh} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$ .

*Řešení:*

Daný výraz lze psát ve tvaru

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{\cosh x}{\sinh x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x \sin x - \cos x \sinh x}{x \sin x \sinh x}.$$

Tato limita je typu  $\frac{0}{0}$ . Protože jsou splněny všechny předpoklady l'Hospitalova pravidla je jej možné k výpočtu této limitu použít. Ale přímé použití tohoto pravidla je poměrně pracné. Protože je  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sinh x} = 1$ , je výhodnější psát

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x \sin x - \cos x \sinh x}{x \sin x \sinh x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x \sin x - \cos x \sinh x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sinh x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \sinh x}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$


---

**Příklad 8.** Najděte  $\lim_{x \rightarrow 0+} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x}$ .

*Řešení:*

Protože je  $(\operatorname{cotg} x)^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln(\operatorname{cotg} x)}$  a funkce  $f(x) = e^x$  je spojitá v celém  $\mathbb{R}$ , stačí najít limitu  $\lim_{x \rightarrow 0+} \sin x \cdot \ln(\operatorname{cotg} x)$ . Tato limita je typu  $0 \cdot \infty$ . Proto ji přepíšeme na tvar vhodný pro použití l'Hospitalova pravidla.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \sin x \cdot \ln(\operatorname{cotg} x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\operatorname{cotg} x)}{\frac{1}{\sin x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-\frac{1}{\operatorname{cotg} x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0. \end{aligned}$$

Tedy  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\sin x} = e^0 = 1$ .

---

**Příklad 9.** Najděte  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ .

*Řešení:*

Jde o limitu typu  $\infty - \infty$ . Proto výraz upravíme. Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}.$$

To už je limita typu  $\frac{0}{0}$ . Proto bychom mohli použít l'Hospitalovo pravidlo. Výpočet se zjednoduší, jestliže použijeme známé limity  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ . Pak lze psát

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

---

**Příklad 10.** Najděte  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^{1/x^2}$ .

*Řešení:*

Máme určit limitu výrazu  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left( \frac{\ln \frac{\arcsin x}{x}}{x^2} \right)$ . Protože

je funkce  $f(x) = e^x$  spojitá, stačí najít limitu  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln \frac{\arcsin x}{x}}{x^2} \right)$ .

Neboť  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ , jde o limitu typu  $\frac{0}{0}$ . Můžeme se tedy pokusit najít tuto limitu pomocí l'Hospitalova pravidla.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\arcsin x} \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x \right) x^{-2}}{2x} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x}{x^3} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x}{3x^2 \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Hledaná limita tedy je  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^{1/x^2} = e^{1/6}$ .

---

**Příklad 11.** Najděte  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$ .

*Řešení:*

Jde o limitu typu  $\frac{0}{0}$ . Můžeme vyzkoušet l'Hospitalovo pravidlo. Dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin(1/x) - \cos(1/x)}{\cos x}.$$

Ale limita v pravo neexistuje. Proto v tomto případě nevede použití l'Hospitalova pravidla k cíli. Proto výraz upravíme.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \sin \frac{1}{x} \right) = 0,$$

protože první limita je 1 a druhá je rovna nule, neboť  $\sin \frac{1}{x}$  je omezená funkce a  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ .

---

**Příklad 12.** Najděte  $y''$  pro funkci  $y = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$ .

*Řešení:*

První derivace této funkce je  $y' = 2x \operatorname{arctg} x + 1$ . Druhá derivace je derivace první derivace. Tedy

$$y'' = 2 \operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1 + x^2}.$$

---

**Příklad 13.** Najděte  $y^{(5)}$  pro funkci  $y = x \ln x$ .

*Řešení:*

Například postupným derivováním dostaneme

$$y' = \ln x + 1, \quad y'' = \frac{1}{x}, \quad y''' = -\frac{1}{x^2}, \quad y^{(4)} = \frac{2}{x^3} \quad \text{a} \quad y^{(5)} = -\frac{6}{x^4}.$$

---

**Příklad 14.** Najděte  $y^{(100)}$  pro funkci  $y = x \sinh x$ .

*Řešení:*

V tomto příkladě je vhodné použít *Leibnizův vzorec*  $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$ .

Pro  $u = x$  je  $u' = 1$  a  $u^{(n)} = 0$  pro  $n > 1$  a pro  $v = \sinh x$  je  $v^{(2k)} = \sinh x$  a  $v^{(2k+1)} = \cosh x$  dostaneme

$$(x \sinh x)^{(100)} = x \sinh x + \binom{100}{1} \cosh x = x \sinh x + 100 \cosh x.$$

**Příklad 15.** Najděte  $d^6 y$  pro funkci  $y = \cos^2 x \cdot \cosh x$ .

*Řešení:*

Šestý diferenciál funkce  $f(x)$  je definován vztahem  $d^6 f(x) = f^{(6)}(x) dx^6$ . Proto musíme najít šestou derivaci  $f^{(6)}(x)$  funkce  $f(x) = \cos^2 x \cdot \cosh x$ . Například pomocí Leibnizova vzorce dostaneme

$$\begin{aligned} (\cos^2 x \cosh x)^{(6)} &= \cos^2 x (\cosh x)^{(6)} + \binom{6}{1} (\cos^2 x)' (\cosh x)^{(5)} + \\ &+ \binom{6}{2} (\cos^2 x)'' (\cosh x)^{(4)} + \binom{6}{3} (\cos^2 x)''' (\cosh x)''' + \\ &+ \binom{6}{4} (\cos^2 x)^{(4)} (\cosh x)'' + \binom{6}{5} (\cos^2 x)^{(5)} (\cosh x)' + \\ &+ \binom{6}{6} (\cos^2 x)^{(6)} \cosh x = \\ &= \cos^2 x \cosh x - 6 \sin 2x \sinh x - 30 \cos 2x \cosh x + 80 \sin 2x \sinh x + \\ &+ 120 \cos 2x \cosh x - 96 \sin 2x \sinh x - 32 \cos 2x \cosh x. \end{aligned}$$

Tedy hledaný diferenciál je

$$d^6 f = (\cos^2 x \cosh x - 22 \sin 2x \sinh x + 58 \cos 2x \cosh x) dx^6.$$

**Příklad 16.** Najděte  $y^{(n)}$  pro funkci  $y = \cos^2 x$ .

*Řešení:*

Nejdříve určíme několik derivací dané funkce. Platí  $(\cos^2 x)' = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x$ . Dále

$$\begin{aligned} (\cos^2 x)'' &= -2 \cos 2x = -2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{2}\right), \\ (\cos^2 x)''' &= -4 \cos 2x = -4 \sin(2x + \pi), \dots \end{aligned}$$

Lze odhadnout, že pro  $n \geq 1$  může platit vztah

$$(\cos^2 x)^{(n)} = -2^{n-1} \sin \left(2x + \frac{n-1}{2} \pi\right).$$

Tento vztah nyní dokážeme indukci. Pro  $n = 1$  jsme platnost tohoto vztahu již ověřili. Zbývá nám ukázat, že z jeho platnosti pro  $n$  plyne tento vzorec pro  $(n + 1)$ . Derivováním dostaneme

$$\begin{aligned} (\cos^2 x)^{(n+1)} &= \left[ -2^{n-1} \sin \left( 2x + \frac{n-1}{2} \pi \right) \right]' = -2^n \cos \left( 2x + \frac{n-1}{2} \pi \right) = \\ &= -2^n \sin \left( 2x + \frac{n}{2} \pi \right). \end{aligned}$$

Tedy tento vztah platí pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ .

---

**Příklad 17.** Dokažte, že *Čebyševovy polynomy*

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos(m \arccos x), \quad m = 1, 2, \dots$$

splňují rovnici

$$(1 - x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2T_m(x) = 0.$$

*Řešení:*

Derivací dostaneme

$$\begin{aligned} T_m'(x) &= \frac{m}{2^{m-1}} \cdot \frac{\sin(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \\ T_m''(x) &= \frac{m}{2^{m-1}(1-x^2)} \left( -m \cos(m \arccos x) + \frac{x \sin(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \right). \end{aligned}$$

Po dosazení těchto derivací se daný vztah snadno ověří.

---

**Příklad 18.** *Laguerrové polynomy* jsou definovány vztahy

$$L_m(x) = e^x \frac{d^m}{dx^m} (x^m e^{-x}), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Dokažte, že  $L_m(x)$  splňuje rovnici

$$xL_m''(x) + (1-x)L_m'(x) + mL_m(x) = 0.$$

Návod: Použijte rovnici  $xu' + (x-m)u = 0$ , kde  $u = x^m e^{-x}$ .

*Řešení:*

Nejprve ověříme vztah  $xu' + (x-m)u = 0$ , kde  $u = x^m e^{-x}$ . Snadným derivováním dostaneme

$$x(x^m e^{-x})' = x(mx^{m-1}e^{-x} - x^m e^{-x}) =$$

$$= mx^m e^{-x} - x^{m+1} e^{-x} = (m-x)x^m e^{-x} = (m-x)u.$$

Daná rovnice pro funkce  $L_m(x)$  lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} x(e^x u^{(m)})'' + (1-x)(e^x u^{(m)})' + me^x u^{(m)} &= \\ = x(e^x u^{(m+2)} + 2e^x u^{(m+1)} + e^x u^{(m)}) + (1-x)(e^x u^{(m+1)} + e^x u^{(m)}) + me^x u^{(m)} &= \\ = xe^x u^{(m+2)} + (1+x)e^x u^{(m+1)} + (m+1)e^x u^{(m)} &= 0. \end{aligned}$$

Když derivujeme  $(m+1)$ -krát vztah  $xu' + (x-m)u = 0$ , získáme, až na vynásobení funkcí  $e^x$  právě tuto rovnici.

---

**Příklad 19.** *Hermitovy polynomy* jsou definovány vztahy

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} (e^{-x^2}), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Dokažte, že  $H_m(x)$  splňuje rovnici

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

Návod: Použijte rovnost  $u' + 2xu = 0$ , kde  $u = e^{-x^2}$ .

*Řešení:*

Derivace funkce  $u = e^{-x^2}$  je  $u' = -2xe^{-x^2} = -2xu$ . Tedy platí náš pomocný vztah. Danou diferenciální rovnici lze zapsat pomocí funkce  $u = e^{-x^2}$  ve tvaru

$$\begin{aligned} (e^{x^2} u^{(m)})'' - 2x(e^{x^2} u^{(m)})' + 2me^{x^2} u^{(m)} &= \\ = e^{x^2} u^{(m+2)} + 4xe^{x^2} u^{(m+1)} + (2+4x^2)e^{x^2} u^{(m)} - & \\ - 2x(e^{x^2} u^{(m+1)} + 2xe^{x^2} u^{(m)}) + 2me^{x^2} u^{(m)} &= \\ = e^{x^2} (u^{(m+2)} + 2xu^{(m+1)} + 2(m+1)u^{(m)}) &= 0. \end{aligned}$$

Ale to je až na násobení funkci  $e^{x^2}$  vztah, který získáme po  $(m+1)$ -ní derivaci vztahu  $u' + 2xu = 0$ .

---

## CVIČENÍ 8 — Derivace funkce zadané parametricky a implicitně

Nechť jsou funkce  $x = \varphi(t)$  a  $y = \psi(t)$ ,  $t \in (a, b)$ , diferencovatelné. Pokud je  $\frac{d\varphi}{dt}(t) = \dot{\varphi}(t) \neq 0$  pro  $t \in (a, b)$  pak existuje inverzní funkce  $t = \varphi^{(-1)}(x)$ . Její derivace je  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dot{\varphi}(t)}$  kde předpokládáme, že je za  $t$  dosazeno  $t = \varphi^{(-1)}(x)$ . V takovém případě je funkce  $y(x) = \psi \circ \varphi^{(-1)}(x) = \psi(\varphi^{(-1)}(x))$  diferencovatelná v intervalu  $(\alpha, \beta) = \varphi(a, b)$  a pro její derivaci platí

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \frac{d}{dx} \left( \psi(\varphi^{(-1)}(x)) \right) = \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{d\varphi^{(-1)}}{dx} = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)},$$

kde opět bereme  $t = \varphi^{(-1)}(x)$ . Podobně se najdou i vyšší derivace. Například pro druhou derivaci platí

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''(x) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}} \right) \frac{1}{\dot{\varphi}}.$$

**Příklad 1.** Najděte derivaci  $y'(x)$  funkce definované parametricky rovnicemi  $x = \operatorname{tg} t$  a  $y = \frac{\sin 2t}{2}$ ,  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

*Řešení:*

Derivace funkcí  $x = \operatorname{tg} t$  a  $y = \frac{\sin 2t}{2}$  jsou  $\dot{x}(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$  a  $\dot{y}(t) = \cos 2t$ . Protože je  $\dot{x}(t) \neq 0$  pro  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , je funkce  $y = y(x)$  dobře definována. Pro její derivaci platí

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \frac{\cos 2t}{1/\cos^2 t} = \cos 2t \cdot \cos^2 t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{(1 + \operatorname{tg}^2 t)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

**Příklad 2.** Najděte derivace  $y'(x)$  a  $y''(x)$  funkce definované parametricky rovnicemi  $x = a \cos t$  a  $y = b \sin t$ ,  $t \in (0, 2\pi)$ .

*Řešení:*

Protože je  $\dot{x}(t) = -a \sin t$  a  $\dot{y}(t) = b \cos t$ , získáme pomocí obecného vzorce pro derivaci parametricky zadané funkce

$$y'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -\frac{b}{a} \operatorname{cotg} t.$$

Druhou derivaci lze určit ze vztahu

$$y''(x) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \right) \cdot \frac{1}{\dot{x}(t)} = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}.$$

---

**Příklad 3.** Najděte rovnice tečny ke křivce, která je definována parametricky rovnicemi  $x = a \cos^3 t$  a  $y = a \sin^3 t$ ,  $t \in (0, 2\pi)$ , v bodě  $t_0$ .

*Řešení:*

Rovnici tečny najdeme ze vztahu  $y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$ . Zde je  $x_0 = a \cos^3 t_0$  a  $y_0 = a \sin^3 t_0$ . Protože je  $\dot{x}(t) = -2a \cos^2 t \sin t$  a  $\dot{y} = 3a \sin^2 t \cos t$ , je

$$y'(x_0) = \frac{3a \sin^2 t_0 \cos t_0}{-3a \cos^2 t_0 \sin t_0} = -\operatorname{tg} t_0.$$

Tedy rovnice hledané tečny je  $y - a \sin^3 t_0 = -\operatorname{tg} t_0 \cdot (x - a \cos^3 t_0)$ .

Všimněte si, že problémy nastanou v bodech, kdy je  $\operatorname{tg} t_0 = 0$ , tj. v bodech  $t_0 = \frac{k}{2}\pi$ . V těchto bodech jsou totiž obě derivace  $\dot{x}$  i  $\dot{y}$  rovny nule. Když si načrtnete danou křivku (*asteroidu*), snadno zjistíte, proč nastávají v těchto bodech problémy.

Jiná možnost, jak najít rovnici tečny, je napsat její parametrické rovnice. Tečný vektor je  $\boldsymbol{\tau} = (\dot{x}, \dot{y})$ . Parametrické rovnice přímky, která prochází bodem  $[x_0; y_0]$  a má směr  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$  jsou  $x = x_0 + t\tau_1$ ,  $y = y_0 + t\tau_2$ , kde  $t \in \mathbb{R}$  je parametr. Tedy rovnici tečny lze napsat v parametrickém tvaru  $x = a \cos^3 t_0 - 3at \cos^2 t_0 \sin t_0$  a  $y = a \sin^3 t_0 + 3at \sin^2 t_0 \cos t_0$ , kde  $t \in \mathbb{R}$  je parametr.

---

**Příklad 4.** Nechť je  $x = r \cos \varphi$  a  $y = r \sin \varphi$ , kde  $r > 0$  a  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . Najděte tečnu ke křivce, která je definována rovnicí  $r = 1 + \cos \varphi$  v bodě  $\varphi_0$ .

*Řešení:*

Křivka je dána parametrickými rovnicemi  $x = (1 + \cos \varphi) \cos \varphi$  a  $y = (1 + \cos \varphi) \sin \varphi$ , kde  $\varphi \in (0, 2\pi)$  je parametr. Derivace těchto funkcí jsou

$$\begin{aligned}\dot{x}(\varphi) &= -\sin \varphi - 2 \cos \varphi \sin \varphi = -(\sin \varphi + \sin 2\varphi) \\ \dot{y}(\varphi) &= \cos \varphi + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos \varphi + \cos 2\varphi.\end{aligned}$$

Derivace  $\dot{x}(\varphi) = 0$  v bodech  $\varphi = \pi$ ,  $\varphi = \frac{2}{3}\pi$  a  $\varphi = \frac{4}{3}\pi$ . V těchto bodech není jisté, zda lze najít inverzní funkci k funkci  $x(\varphi) = (1 + \cos \varphi) \cos \varphi$  a tedy ani  $y$  jako funkci proměnné  $x$ . V jiných bodech  $\varphi_0$  je

$$y'(x_0) = -\frac{\cos \varphi_0 + \cos 2\varphi_0}{\sin \varphi_0 + \sin 2\varphi_0}.$$

Tedy rovnice tečny je

$$y - (1 + \cos \varphi_0) \sin \varphi_0 = -\frac{\cos \varphi_0 + \cos 2\varphi_0}{\sin \varphi_0 + \sin 2\varphi_0} \cdot (x - (1 + \cos \varphi_0) \cos \varphi_0).$$



Stojí za zapamatování si uvědomit, že v bodech  $\varphi = \frac{2}{3}\pi$  a  $\varphi = \frac{4}{3}\pi$  lze vyjádřit  $\varphi$  jako funkci  $y$ . Proto lze v těchto bodech najít funkci  $x = x(y)$  a pomocí této funkce najít tečnu.

---

**Příklad 5.** Nechť je funkce  $y = y(x)$  definována jako řešení rovnice  $e^y + xy - e = 0$ . Najděte derivaci této funkce v bodě  $x = 0$ ,  $y = 1$ .

*Řešení:*

Bod  $[0; 1]$  vyhovuje dané rovnici. Leží tedy na dané křivce. Proto je možné hledat v okolí tohoto bodu funkci  $y = y(x)$ .

Předpokládejme, že jsme tuto funkci našli. Pak pro ni platí rovnice  $e^{y(x)} + xy(x) - e = 0$ . Jestliže tuto rovnici zderivujeme podle proměnné  $x$ , dostaneme pro derivaci  $y'(x)$  rovnici

$$e^{y(x)}y'(x) + y(x) + xy'(x) = 0 \quad \text{neboli} \quad (x + e^{y(x)})y'(x) = -y(x).$$

Za předpokladu, že  $(x + e^{y(x)}) \neq 0$  lze z této rovnice vyjádřit  $y'(x)$  jako

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x + e^{y(x)}}.$$

Tedy v bodě  $[0; 1]$  je  $y'(0) = e^{-1}$ .

---

**Příklad 6.** Najděte množinu, ve které existuje inverzí funkce  $x = x(y)$  k funkci  $y = x + \ln x$  a určete derivaci této inverzní funkce.

*Řešení:*

Definiční obor dané funkce  $y = f(x) = x + \ln x$  je  $D_f = (0, +\infty)$  a její obor hodnot je  $H_f = \mathbb{R}$ . Protože je  $y'(x) = 1 + \frac{1}{x} \neq 0$  a spojitá na celém  $D_f$ , existuje inverzní funkce  $x = x(y)$  pro všechna  $y \in \mathbb{R}$ . Derivace této inverzní funkce je rovna

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'(x)} = \frac{x}{x+1}.$$

---

**Příklad 7.** Najděte derivaci funkce  $y = y(x)$  definované implicitně rovnicí

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

*Řešení:*

Předpokládejme, že jsme našli funkci  $y = y(x)$ , která je řešením této rovnice. Pro tuto funkci tedy platí vztah

$$\operatorname{arctg} \frac{y(x)}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2(x)}.$$

Jestliže tuto rovnici zderivujeme podle proměnné  $x$  a předpokládáme, že  $y = y(x)$ , dostaneme pro derivaci  $y'(x)$  vztah

$$\frac{xy'(x) - y(x)}{x^2 + y^2(x)} = \frac{x + y(x)y'(x)}{x^2 + y^2(x)}.$$

Z této rovnice získáme vztah  $(x - y(x))y'(x) = x + y(x)$ . V bodech, kde není  $x - y(x) = 0$ , tj. v bodech, kde neplatí  $\ln(x\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$ , lze psát

$$y'(x) = \frac{x + y(x)}{x - y(x)}.$$

**Příklad 8.** Necht' je dána funkce  $y = f(x)$ . Najděte kružnici  $(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 = R^2$  tak, aby procházela bodem  $[x_0; y_0]$  grafu funkce  $y = f(x)$  a měla v tomto bodě stejnou první a druhou derivaci jako funkce  $y = f(x)$  (*oskulační kružnice*).

*Řešení:*

Jestliže derivujeme rovnici kružnice jako implicitně zadanou funkci v bodě  $x_0$ , získáme vztahy

$$x_0 - x_S + (y_0 - y_S)y'_0 = 0 \quad \text{a} \quad 1 + (y'_0)^2 + (y_0 - y_S)y''_0 = 0,$$

kde  $y_0 = f(x_0)$ ,  $y'_0 = f'(x_0)$  a  $y''_0 = f''(x_0)$ . Tedy souřadnice středu kružnice  $[x_S; y_S]$  a její poloměr  $R$  musí splňovat vztahy

$$\begin{aligned} (x_0 - x_S)^2 + (y_0 - y_S)^2 &= R^2 \\ x_0 - x_S + (y_0 - y_S)y'_0 &= 0 \\ 1 + (y'_0)^2 + (y_0 - y_S)y''_0 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení této soustavy rovnic je

$$\begin{aligned} x_S &= x_0 - \frac{1 + (y'_0)^2}{y''_0} y'_0 \\ y_S &= y_0 + \frac{1 + (y'_0)^2}{y''_0} \end{aligned}$$

$$R = \frac{(1 + (y'_0)^2)^{3/2}}{|y''_0|}.$$

Obvykle se nazývá  $R$  poloměr křivosti a  $k = \frac{1}{R} = \frac{(1 + (y'_0)^2)^{3/2}}{|y''_0|}$  křivost. Množina všech středů oskulačních kružnic  $[x_S; y_S]$  se nazývá *evoluta* dané křivky  $y = f(x)$ .

---

**Příklad 9.** Najděte množinu všech středů křivosti (*evolutu*) elipsy dané parametrickými rovnicemi  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ , kde  $t \in (0, 2\pi)$ .

*Řešení:*

Podle předcházejícího příkladu máme najít množinu všech bodů  $[x_S; y_S]$ , kde

$$x_S = x_0 - \frac{1 + (y'_0)^2}{y''_0} y'_0, \quad y_S = y_0 + \frac{1 + (y'_0)^2}{y''_0}.$$

Tedy stačí nám najít  $y'(x)$  a  $y''(x)$ . V našem případě jde o parametricky zadanou křivku. Příslušné derivace

$$y'(x) = -\frac{b}{a} \cotg t \quad \text{a} \quad y''(x) = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}$$

jsme již našli v příkladě 2. Po dosazení do příslušných vztahů získáme

$$x_S(t) = a \cos t - \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{a} \cos t = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t$$

$$y_S(t) = b \sin t - \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{b} \sin t = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t,$$

kde  $t \in (0, 2\pi)$ . To jsou parametrické rovnice evoluty. Jestliže z těchto rovnic vyloučíme parametr  $t$ , dostaneme implicitní vyjádření evoluty ve tvaru

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3} = e^{4/3},$$

kde  $e = \sqrt{a^2 - b^2}$  je *excentricita* dané elipsy.

---

**Příklad 10.** Hmotný bod  $M$  se pohybuje v rovině  $xy$  po elipse s poloosami  $a \geq b$ , jejichž jedno ohnisko leží v počátku souřadnic. V polárních souřadnicích  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  je rovnice takové elipsy dána rovnicí  $r(1 + \varepsilon \cos \varphi) = p$ , kde  $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

je relativní výstřednost elipsy a  $p = \frac{b^2}{a}$ .

Dále platí, že plošná rychlost pohybu bodu  $M$  je konstantní, tj. v polárních souřadnicích platí vztah  $S = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \text{konst.}$

Najděte závislost zrychlení bodu  $M$  na jeho souřadnicích.

*Řešení:*

Parametrické rovnice bodu  $M$  jsou  $x(t) = r(t) \cos \varphi(t)$  a  $y(t) = r(t) \sin \varphi(t)$ . Jejich derivováním dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \ddot{x} &= \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r(\dot{\varphi})^2 \cos \varphi \\ \ddot{y} &= \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r(\dot{\varphi})^2 \sin \varphi\end{aligned}$$

Mezi  $r$  a  $\varphi$  platí podle zadání vztah  $r = (1 + \varepsilon \cos \varphi)p$ , neboli  $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$ . První derivace  $\varphi$  vyhovuje rovnici  $\dot{\varphi} = \frac{2S}{r^2}$ . Derivací vztahu pro  $r$  získáme

$$\dot{r} = \frac{p\varepsilon\dot{\varphi} \sin \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} = \frac{2p\varepsilon S \sin \varphi}{r^2(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} = \frac{2\varepsilon S \sin \varphi}{p},$$

kde jsme použili výrazy pro  $\dot{\varphi}$  a  $p$ .

Najdeme ještě druhé derivace  $\ddot{\varphi}$  a  $\ddot{r}$ . Snadno dostaneme

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= -\frac{4S\dot{r}}{r^3} = -\frac{8S^2\varepsilon}{p} \cdot \frac{\sin \varphi}{r^3} \\ \ddot{r} &= \frac{2S\varepsilon}{p} \dot{\varphi} \cos \varphi = \frac{4S^2\varepsilon}{p} \cdot \frac{\cos \varphi}{r^2}.\end{aligned}$$

Po dosazení do vztahů pro  $\ddot{x}$  a  $\ddot{y}$ , získáme

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{4S^2\varepsilon}{p} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} - \frac{8S^2\varepsilon}{p} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} + \frac{8S^2\varepsilon}{p} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} - \frac{4S^2}{p} \cdot \frac{\cos \varphi}{r^3} = \\ &= \frac{4S^2}{pr^3} (r\varepsilon \cos \varphi - p) \cos \varphi = -\frac{4S^2}{pr^3} r \cos \varphi = -\frac{4S^2}{p} \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ \ddot{y} &= \frac{4S^2\varepsilon}{p} \cdot \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r^2} + \frac{8S^2\varepsilon}{p} \cdot \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r^2} - \frac{8S^2\varepsilon}{p} \cdot \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r^2} - \frac{4S^2}{p} \cdot \frac{\sin \varphi}{r^3} = \\ &= \frac{4S^2}{pr^3} (r\varepsilon \cos \varphi - p) \sin \varphi = -\frac{4S^2}{pr^3} r \sin \varphi = -\frac{4S^2}{p} \cdot \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

## CVIČENÍ 9 — Taylorův polynom

**Příklad 1.** Nechtě má funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  derivace až do řádu  $n$  včetně. Najděte polynom

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$$

tak, aby platilo  $f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0)$  pro všechna  $k = 0, 1, \dots, n$ .

*Řešení:*

Pro hodnotu funkce  $f(x)$  a hledaného polynomu  $P_n(x)$  v bodě  $x = x_0$  musí platit  $f(x_0) = P_n(x_0) = a_0$ . Tedy  $a_0 = f(x_0)$ .

První derivace polynomu  $P_n(x)$  je

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + n(x - x_0)^{n-1}.$$

Tedy v bodě  $x = x_0$  musí být  $f'(x_0) = P_n'(x_0) = a_1$ . Odtud dostaneme  $a_1 = f'(x_0)$ . Z druhé derivace polynomu  $P_n(x)$ , která je

$$P_n''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + 3 \cdot 4a_4(x - x_0)^2 + \cdots + (n-1)na_n(x - x_0)^{n-2},$$

získáme v bodě  $x = x_0$  vztah

$$f''(x_0) = P_n''(x_0) = 2a_2 \implies a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

Z třetí derivace polynomu  $P_n(x)$

$$P_n'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x - x_0) + \cdots + (n-2)(n-1)na_n(x - x_0)^{n-3},$$

získáme v bodě  $x = x_0$  vztah

$$f'''(x_0) = P_n'''(x_0) = 2 \cdot 3a_3 \implies a_3 = \frac{f'''(x_0)}{2 \cdot 3} = a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}.$$

Obecně z  $k$ -té derivace polynomu v bodě  $x = x_0$  dostaneme vztah

$$f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0) = k!a_k \implies a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Hledaný polynom tedy je

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Polynom z příkladu 1 se nazývá *Taylorův polynom* stupně  $n$  funkce  $f(x)$  se středem v bodě  $x_0$  a budeme jej značit například  $T_n(f, x_0; x)$ . Pro Taylorův polynom platí vztah

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(f, x_0; x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Platí následující

**Věta:** (Taylorův vzorec) Je-li: 1) funkce  $f(x)$  definovaná na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$ ; 2)  $f(x)$  má na tomto intervalu spojité derivace  $f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$ ; 3) pro  $a < x < b$  existuje konečná derivace  $f^{(n+1)}(x)$ , pak

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_{n+1}(x), \quad a \leq x \leq b,$$

kde  $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ ,  $0 < \theta < 1$ , je zbytek v Lagrangeově tvaru, nebo

$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta_1(x-a))}{n!} (1 - \theta_1)^n (x-a)^{n+1}$ ,  $0 < \theta_1 < 1$ , je zbytek v Cauchyho tvaru.

---

**Příklad 2.** Najděte Taylorův polynom stupně  $n$  se středem v bodě  $x_0 = 0$  pro funkci  $f(x) = e^x$ . Určete zbytek  $R_{n+1}(x)$  tohoto polynomu.

*Řešení:*

Funkce  $f(x) = e^x$  má spojité derivace všech řádů na celém  $\mathbb{R}$ . Protože je  $f^{(k)}(x) = e^x$ , je pro všechna  $k \in \mathbb{N}$   $f^{(k)}(0) = 1$ . Tedy pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  platí

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x).$$

Zbytek  $R_{n+1}(x)$  lze psát například v Lagrangeově tvaru jako

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1},$$

kde bod  $\xi$  leží mezi body 0 a  $x$ .

Všimněte si, že pro  $x > 0$  platí pro zbytek  $R_{n+1}(x)$  odhad

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}$$

a pro  $x < 0$  odhad

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

V obou případech je pro pevné  $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_{n+1}(x)| = 0.$$

Lze tedy pro každé  $x \in \mathbb{R}$  psát

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Poslední vztah se velmi často využívá k definici funkce  $f(x) = e^x$ .

---

**Příklad 3.** Najděte Taylorův polynom stupně  $n$  se středem v bodě  $x_0 = 0$  pro funkci  $f(x) = \sin x$ . Určete zbytek  $R_{n+1}(x)$  tohoto polynomu.

*Řešení:*

Funkce  $f(x) = \sin x$  má spojité derivace všech řádů na celém  $\mathbb{R}$ . Protože pro všechna  $k \in \mathbb{N}$  je

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(x) &= \sin x, & f^{(4k+1)}(x) &= \cos x, \\ f^{(4k+2)}(x) &= -\sin x, & f^{(4k+3)}(x) &= -\cos x, \end{aligned}$$

dostaneme pro derivace funkce  $f(x) = \sin x$  v bodě  $x_0 = 0$  vztahy

$$f^{(4k)}(0) = 0, \quad f^{(4k+1)}(0) = 1, \quad f^{(4k+2)}(0) = 0, \quad f^{(4k+3)}(0) = -1.$$

Tedy pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  platí

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + R_{2n+3}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_{2n+3}(x). \end{aligned}$$

Zbytek  $R_{2n+3}(x)$  lze psát například v Lagrangeově tvaru jako

$$R_{2n+3}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cos \xi}{(2n+3)!} x^{2n+3},$$

kde bod  $\xi$  leží mezi body 0 a  $x$ .

Všimněte si, že pro zbytek  $R_{2n+3}(x)$  odhad

$$|R_{2n+3}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Tedy pro pevné  $x \in \mathbb{R}$  je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_{2n+3}(x)| = 0.$$

Lze tedy pro každé  $x \in \mathbb{R}$  psát

$$\sin x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Poslední vztah se velmi často využívá k definici funkce  $f(x) = \sin x$ .

---

**Příklad 4.** Najděte Taylorův polynom stupně  $n$  se středem v bodě  $x_0 = 0$  pro funkci  $f(x) = \cos x$ . Určete zbytek  $R_{n+1}(x)$  tohoto polynomu.

*Řešení:*

Funkce  $f(x) = \cos x$  má spojité derivace všech řádů na celém  $\mathbb{R}$ . Protože pro všechna  $k \in \mathbb{N}$  je

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(x) &= \cos x, & f^{(4k+1)}(x) &= -\sin x, \\ f^{(4k+2)}(x) &= -\cos x, & f^{(4k+3)}(x) &= \sin x, \end{aligned}$$

dostaneme pro derivace funkce  $f(x) = \cos x$  v bodě  $x_0 = 0$  vztahy

$$f^{(4k)}(0) = 1, \quad f^{(4k+1)}(0) = 0, \quad f^{(4k+2)}(0) = -1, \quad f^{(4k+3)}(0) = 0.$$

Tedy pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  platí

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + R_{2n+2}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + R_{2n+2}(x). \end{aligned}$$

Zbytek  $R_{2n+2}(x)$  lze psát například v Lagrangeově tvaru jako

$$R_{2n+2}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cos \xi}{(2n+2)!} x^{2n+2},$$

kde bod  $\xi$  leží mezi body 0 a  $x$ .

Všimněte si, že pro zbytek  $R_{2n+2}(x)$  odhad

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Tedy pro pevné  $x \in \mathbb{R}$  je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_{2n+2}(x)| = 0.$$

Lze tedy pro každé  $x \in \mathbb{R}$  psát

$$\cos x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Poslední vztah se velmi často využívá k definici funkce  $f(x) = \cos x$ .

---

Z příkladů 2, 3 a 4 plyne, že pokud definujeme pro reálná  $x$  funkci  $e^{ix}$ , kde  $i$  je imaginární jednotka, pomocí řady dostaneme

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \cos x + i \sin x.$$



Vztah  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  se nazývá *Eulerův vztah* a v matematice hraje velmi významnou roli.

---

**Příklad 5.** Najděte Taylorův polynom stupně  $n$  se středem v bodě  $x_0 = 0$  pro funkci  $f(x) = \ln(1+x)$ . Určete zbytek  $R_{n+1}(x)$  tohoto polynomu.

*Řešení:*

Postupným derivováním funkce  $f(x) = \ln(1+x)$  získáme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x}, & f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, \\ f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, & f^{(4)}(x) &= -\frac{2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad \dots \end{aligned}$$

Z těchto několika derivací lze odhadnout, že pro každé  $n \geq 1$  může platit vztah

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}. \quad (1)$$

Tento vztah dokážeme indukcí. Pro  $n = 1$  jsme tento vztah již ukázali. Předpokládejme, že vztah (1) platí pro  $n \in \mathbb{N}$ . Pak je

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \left( (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \right)' = (-1)^{n+2} \frac{n!}{(1+x)^{n+1}},$$

což je ale dokazovaný vztah (1) pro  $n+1$ . Tedy vztah (1) platí pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ . V bodě  $x_0 = 0$  je  $f(0) = 0$  a pro všechna  $n \geq 1$  platí  $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ . Tedy koeficienty Taylorova polynomu jsou  $a_0 = 0$  a pro všechna  $n \geq 1$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Pro všechna  $x \in (-1, +\infty)$  lze tedy psát

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + R_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} x^k + R_{n+1}(x).$$

Zbytek  $R_{n+1}(x)$  lze v Lagrangeově tvaru zapsat pro každé  $x \in (-1, +\infty)$  jako

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}},$$

kde  $\xi$  leží mezi body 0 a  $x$ . Pro  $x > 0$  platí odhad

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n}$$

a pro  $x \in (-1, 0)$  je

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n(1+x)^{n+1}}.$$

Protože pro  $x \in (-1, 1)$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_{n+1}(x)| = 0$ , lze pro tato  $x$  psát

$$\ln(1+x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Například pro  $x = 1$  dostaneme

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

**Příklad 6.** Najděte Taylorův polynom třetího stupně se středem v bodě  $x_0 = 1$  pro funkci  $f(x) = x^x - 1$ .

*Řešení:*

Abychom našli Taylorův polynom stupně 3 se středem v bodě  $x_0 = 1$  stačí najít v tomto bodě první tři derivace funkce  $f(x) = x^x - 1 = e^{x \ln x} - 1$ . Postupně dostaneme

$$f(1) = 0$$

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1) \implies f'(1) = 1$$

$$f''(x) = x^x \left( (\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right) \implies f''(1) = 2$$

$$f'''(x) = x^x \left( (\ln x + 1)^3 + 3 \frac{\ln x + 1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \implies f'''(1) = 3.$$

Tedy hledaný Taylorův polynom je

$$T_3(x^x, 1; x) = (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3.$$

**Příklad 7.** Funkci  $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ ,  $x > 0$ , rozložte podle celých nezáporných mocnin zlomku  $\frac{1}{x}$  do členu  $\frac{1}{x^3}$  včetně.

*Řešení:*

Danou funkci lze přepsat do tvaru  $f(x) = x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)$ . Abychom našli rozvoj

této funkce v proměnné  $\frac{1}{x}$ , je výhodné zvolit novou proměnnou  $t = \frac{1}{x}$  a rozložit

funkci  $\tilde{f}(t) = \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{t}$  podle proměnné  $t$  do Taylorova polynomu stupně 3 se středem v bodě  $t_0 = 0$ . K tomu ale stačí najít Taylorův polynom funkce  $g(t) = \sqrt{1+t^2}$  stupně 4 se středem v bodě  $t_0 = 0$ . Měli bychom tedy najít v bodě  $t_0 = 0$  první čtyři derivace funkce  $g(t) = \sqrt{1+t^2}$ . Ale pokud si všimneme, že tato funkce je funkcí pouze proměnné  $y = t^2$ , lze najít Taylorův polynom druhého stupně funkce  $\tilde{g}(y) = \sqrt{1+y}$  se středem v bodě  $y_0 = 0$ . Tedy stačí najít v bodě  $y_0 = 0$  pouze dvě derivace. Postupným derivováním a dosazením získáme

$$\begin{aligned}\tilde{g}(0) &= 1 \\ \tilde{g}'(y) &= \frac{1}{2\sqrt{1+y}} \implies \tilde{g}'(0) = \frac{1}{2} \\ \tilde{g}''(y) &= -\frac{1}{4(1+y)^{3/2}} \implies \tilde{g}''(0) = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Proto lze přibližně psát

$$\tilde{g}(y) \approx 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} \implies g(t) \approx 1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8}.$$

Ale z toho dostaneme

$$\tilde{f}(t) \approx \frac{1}{t} \left( 1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8} - 1 \right) = \frac{t}{2} - \frac{t^3}{8} \implies f(x) \approx \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3}.$$

**Příklad 8.** Najděte Taylorův polynom čtvrtého stupně se středem v bodě  $x_0 = 0$  pro funkci  $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ .

*Řešení:*

Abychom našli Taylorův polynom stupně 4 dané funkce se středem v bodě  $x_0 = 0$  musíme zdánlivě najít první čtyři derivace dané funkce v bodě  $x_0 = 0$ . Ale jakmile začneme derivovat, snadno zjistíme, že hodnoty těchto derivací musíme hledat pomocí limit.

Existuje ale ještě jiná možnost. Když vyjádříme funkci  $e^x$  přibližně pomocí Taylorova polynomu stupně 5 se středem v bodě 0, tj.  $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$ , vidíme, že pro danou funkci platí přibližně vztah

$$\frac{x}{e^x - 1} \approx \left( 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} \right)^{-1}.$$

Proto stačí najít polynom  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ , pro který je do mocnin  $x^4$

$$1 \approx (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4) \left( 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} \right)$$

Po vynásobení a srovnání členů u stejných mocnin  $x$  do řádu 4, dostaneme soustavu rovnic

$$a_0 = 1, \quad (x^0)$$

$$a_1 + \frac{a_0}{2} = 0, \quad (x^1)$$

$$a_2 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{6} = 0, \quad (x^2)$$

$$a_3 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{24} = 0, \quad (x^3)$$

$$a_4 + \frac{a_3}{2} + \frac{a_2}{6} + \frac{a_1}{24} + \frac{a_0}{120} = 0, \quad (x^4)$$

Její řešení je

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{12}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{1}{720}.$$

Tedy hledaný Taylorův polynom je

$$\frac{x}{e^x - 1} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720}.$$

**Příklad 9.** Odhadněte absolutní chybu přibližného vztahu  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$  pro  $0 \leq x \leq 1$ .

*Řešení:*

Nejprve najdeme Taylorův polynom stupně 2 funkce  $f(x) = \sqrt{1+x}$  se středem v bodě  $x_0 = 0$  a jeho zbytek. Protože je

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \implies f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}} \implies f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = -\frac{3}{8(1+x)^{5/2}},$$

platí pro  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  podle Taylorovy věty vztah

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + R_3(x),$$

kde  $R_3(x) = \frac{x^3}{16(1+\xi)^{5/2}}$ , kde  $\xi \in (0, 1)$ . Z toho dostaneme pro  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  odhad zbytku

$$|R_3(x)| \leq \frac{x^3}{16} \leq \frac{1}{16}.$$

Tedy největší možná chyba tohoto vzorce na daném intervalu je  $\frac{1}{16}$ .

---

**Příklad 10.** Pomocí Taylorova polynomu najděte  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$ .

*Řešení:*

Jestliže najdeme Taylorův polynom  $T_3(f(x), 0; x)$  funkce  $f(x) = e^x \sin x - x(1+x)$ , platí vztah

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - T_3(f(x), 0; x)}{x^3} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{T_3(f(x), 0; x)}{x^3},$$

jestliže alespoň jedna limita existuje. Taylorův polynom funkce  $f(x)$  nejsnáze najdeme ze známých Taylorových polynomů stupně 3 se středem v bodě  $x_0 = 0$  funkcí  $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$  a  $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ . Pak je do členů  $x^3$

$$e^x \sin x - x(1+x) \approx \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - x(1+x) \approx \frac{x^3}{6}.$$

$$\text{Tedy } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{6x^3} = \frac{1}{6}.$$

---

**Příklad 11.** Pomocí Taylorova polynomu najděte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}).$$

*Řešení:*

Hledanou limitu přepíšeme do tvaru

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 2 \right).$$

Pomocí Taylorova polynomu lze psát pro velmi malá  $t$  psát přibližně

$$\sqrt{1+t} \approx 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8}.$$

Protože pro  $x \rightarrow +\infty$  je  $\frac{1}{x} \rightarrow 0_+$ , lze přibližně psát

$$x^2 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 2 \right) \approx x^2 \left( 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} - 2 \right) = -\frac{1}{4}.$$

(Rozmyslete si, proč nepotřebujeme Taylorův polynom funkce  $\sqrt{1+t}$  vyššího stupně.) Tedy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}) = -\frac{1}{4}.$$

---

**Příklad 12.** Najděte konstanty  $a$  a  $b$  tak, aby platilo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (a + b \cos x) \sin x}{x^5}$  byla konečná.

*Řešení:*

Jedna z možností, jak řešit tuto úlohu je vybrat koeficienty  $a$  a  $b$  tak, aby Taylorův polynom funkce  $f(x) = x - (a + b \cos x) \sin x$  se středem v bodě  $x_0 = 0$  začínal až mocninou  $x^5$ . Ze známých rozvoju funkcí  $\cos x$  a  $\sin x$  do pátého stupně dostaneme

$$\begin{aligned} x - (a + b \cos x) \sin x &\approx x - \left( a + b - \frac{bx^2}{2} + \frac{bx^4}{24} \right) \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) \approx \\ &\approx x(1 - a - b) + x^3 \left( \frac{b}{2} + \frac{a+b}{6} \right) - x^5 \left( \frac{b}{24} + \frac{b}{12} + \frac{a+b}{120} \right). \end{aligned}$$

Musíme tedy volit koeficienty  $a$  a  $b$  jako řešení soustavy rovnic

$$a + b = 1, \quad \frac{b}{2} + \frac{a+b}{6} = 0 \implies a = \frac{4}{3}, \quad b = -\frac{1}{3}.$$

Výsledná limita pak je rovna

$$-\left( \frac{b}{24} + \frac{b}{12} + \frac{a+b}{120} \right) = \frac{1}{30}.$$

---

CVIČENÍ 10 — Funkce rostoucí a klesající, lokální extrémy,  
funkce konvexní a konkávní, inflexní body

**Příklad 1.** Najděte oblasti monotonie funkce  $y = \frac{2x}{1+x^2}$ .

*Řešení:*

Funkce  $y = \frac{2x}{1+x^2}$  je definována v celé množině  $\mathbb{R}$  a má tam spojitě derivace všech řádů. Její první derivace je  $y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ . Protože na intervalu  $x \in (-1, 1)$  je  $y' > 0$ , je funkce na tomto intervalu rostoucí. Na intervalech  $x \in (-\infty, -1)$  a  $x \in (1, +\infty)$  je první derivace záporná. Proto je tam funkce klesající. V bodech  $x = \pm 1$  je derivace rovna nule. Protože vlevo od bodu  $x = -1$  je funkce klesající a vpravo od tohoto bodu je rostoucí, má funkce v tomto bodě lokální minimum. Naopak vlevo od bodu  $x = 1$  je funkce rostoucí a vpravo od tohoto bodu je funkce klesající, má funkce v tomto bodě lokální maximum.

---

**Příklad 2.** Najděte oblasti monotonie funkce  $y = x + |\sin 2x|$ .

*Řešení:*

Funkce  $y$  je definována na celé množině  $\mathbb{R}$ . Mimo bodů  $x_k = \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , má tato funkce spojitě derivace všech řádů.

Pro  $x \in \left(k\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right)$  je to funkce  $y = x + \sin 2x$ . Derivace této funkce je  $y' = 1 + 2 \cos 2x$ . Tedy na intervalech  $\left(k\pi, \frac{3k+1}{3}\pi\right)$  je  $y' > 0$  a na intervalech  $\left(\frac{3k+1}{3}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right)$  je  $y' < 0$ . Proto je funkce na intervalech  $\left(k\pi, \frac{3k+1}{3}\pi\right)$  rostoucí a na intervalech  $\left(\frac{3k+1}{3}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right)$  klesající. V bodě  $x = \frac{3k+1}{3}\pi$  má funkce lokální maximum.

V intervalech  $\left(\frac{2k-1}{2}\pi, k\pi\right)$  je  $y = x - \sin 2x$ . Tedy v těchto intervalech je  $y' = 1 - 2 \cos 2x$ . Tato derivace je větší než nula v intervalech  $\left(\frac{3k-1}{3}\pi, k\pi\right)$ . Tedy funkce je na těchto intervalech rostoucí. V intervalech  $\left(\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{3k-1}{3}\pi\right)$  je první derivace záporná a funkce je v těchto intervalech klesající. V bodech  $x = \frac{3k-1}{3}\pi$  jsou tedy lokální minima dané funkce.

Protože vlevo i vpravo od bodů  $x = k\pi$  je funkce rostoucí, není v těchto bodech lokální extrém a funkce je v tomto bodě rostoucí. Podobně v bodech  $x = \frac{2k+1}{2}\pi$  je funkce klesající.

Tedy funkce je rostoucí v intervalech  $\left(\frac{3k-1}{3}\pi, \frac{3k+1}{3}\pi\right)$  a klesající v intervalech  $\left(\frac{3k+1}{3}\pi, \frac{2k+2}{3}\pi\right)$ . V bodech  $x = \frac{3k+1}{3}\pi$  je lokální maximum a v bodech  $x = \frac{3k-1}{3}\pi$  je lokální minimum.

---

**Příklad 3.** Najděte oblasti monotonie funkce  $y = \frac{x^2}{2^x}$ .

*Řešení:*

Funkce  $y$  je definována na celé množině  $\mathbb{R}$  a má tam spojité derivace všech řádů. Její první derivace je  $y' = 2^{-x}x(2 - x \ln 2)$ . Tato derivace je větší než nula na intervalu  $\left(0, \frac{2}{\ln 2}\right)$  a menší než nula na intervalech  $(-\infty, 0)$  a  $\left(\frac{2}{\ln 2}, +\infty\right)$ . Tedy funkce je rostoucí na intervalu  $\left(0, \frac{2}{\ln 2}\right)$  a klesající na intervalech  $(-\infty, 0)$  a  $\left(\frac{2}{\ln 2}, +\infty\right)$ . Proto je v bodě  $x = 0$  lokální minimum a v bodě  $x = \frac{2}{\ln 2}$  lokální maximum.

---

**Příklad 4.** Dokažte, že pro  $x > 0$  platí nerovnosti  $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ .

*Řešení:*

Funkce  $f(x) = x - \ln(1+x)$  má derivaci  $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$ , která je pro  $x > 0$  kladná. Tedy pro  $x > 0$  je tato funkce rostoucí. Protože  $f(0) = 0$  platí pro  $x > 0$  nerovnost  $x - \ln(1+x) > 0$ .

Funkce  $f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$  má derivaci  $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x}$ , která je pro  $x > 0$  záporná. Tedy pro  $x > 0$  je tato funkce klesající. Protože  $f(0) = 0$  platí pro  $x > 0$  nerovnost  $x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) < 0$ .

---

**Příklad 5.** Dokažte, že pro  $x > 0$  platí nerovnost  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ .

*Řešení:*

Jak je známo, je  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = e$ . Derivace funkce

$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  je

$$\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right].$$



Jestliže dokážeme, že tato derivace je kladná, bude platit nerovnost  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e$ , protože je tato funkce rostoucí a má pro  $x \rightarrow +\infty$  limitu  $e$ . Pro  $x \rightarrow +\infty$  je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right] = 0.$$

Derivace této funkce je

$$\left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right]' = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2}.$$

Pro  $x > 0$  je tato derivace záporná. Tedy pro kladná  $x$  funkce klesá k hodnotě 0. Proto je první derivace kladná a funkce roste k hodnotě  $e$ . Z toho ale plyne, že platí dokazovaná nerovnost.

Naproti tomu je derivace

$$\left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{x+1} \right]' = \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right].$$

Stačí ukázat, že tato derivace je menší než nula. Pak totiž daná funkce klesá pro  $x > 0$  k hodnotě  $e$ . Ale pro  $x \rightarrow +\infty$  se tato derivace blíží k nule. Na druhé straně je pro  $x > 0$

$$\left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right]' = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0.$$

Tedy pro kladná  $x$  derivace roste k hodnotě 0. Proto je tato derivace záporná a platí dokazovaná nerovnost.

---

**Příklad 6.** Nalezněte lokální extrémů funkce  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ .

*Řešení:*

Funkce  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$  má spojité derivace všech řádů na celé množině  $\mathbb{R}$ . Její derivace je  $y' = 3x^2 - 12x + 9$ . Tato derivace je rovna nule v bodech  $x_1 = 1$  a  $x_2 = 3$ . Protože druhá derivace funkce  $y'' = 6x - 12$  je v bodě  $x_1 = 1$  záporná, má daná funkce v bodě  $x_1 = 1$  lokální maximum  $y(1) = 0$ . Naopak v bodě  $x_2 = 3$  je druhá derivace kladná. Tedy v tomto bodě má funkce lokální lokální minimum  $y(3) = -4$ .

---

**Příklad 7.** Nalezněte lokální extrémů funkce  $y = \sqrt{x} \ln x$ .

*Řešení:*

Definiční obor dané funkce je interval  $(0, +\infty)$ . Na tomto intervalu má daná funkce spojité derivace všech řádů. Její první derivace

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} (2 + \ln x)$$

je rovna nule v bodě  $x = e^{-2}$ . Protože na intervalu  $(0, e^{-2})$  je derivace záporná, je na tomto intervalu funkce klesající. Naopak na intervalu  $(e^{-2}, +\infty)$  je první derivace kladná, je funkce na tomto intervalu rostoucí. Proto má funkce v bodě  $xe^{-2}$  lokální minimum  $y(e^{-2}) = -2e^{-1}$ .

Druhá derivace dané funkce je  $y'' = -\frac{\ln x}{4x^{3/2}}$ .

---

**Příklad 8.** Nalezněte lokální extrémů funkce  $y = \frac{10}{1 + \sin^2 x}$ .

*Řešení:*

Funkce  $y$  má spojité derivace všech řádů na celé množině  $\mathbb{R}$ . Její první derivace

$$y' = -\frac{10 \sin 2x}{(1 + \sin^2 x)^2}$$

je rovna nule v bodech  $x_k = \frac{k\pi}{2}$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ . Druhá derivace této funkce je

$$y'' = -10 \frac{2 \cos 2x (1 + \sin^2 x) - 2 \sin^2 2x}{(1 + \sin^2 x)^3}.$$

Tato druhá derivace je v bodech  $x_k$  rovna

$$y''\left(\frac{k\pi}{2}\right) = -\frac{80 \cos k\pi}{(3 - \cos k\pi)^2} = 80 \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{(3 - (-1)^k)^2}.$$

Tedy v bodech  $x = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , je  $y''(n\pi) = -20$ . V těchto bodech má tedy daná funkce lokální maxima  $y(n\pi) = 10$ .

Naopak v bodech  $x = \frac{2n+1}{2}\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , je  $y''\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = 5$ . Proto má funkce  $y$

v těchto bodech lokální minima  $y\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = 5$ .

---

**Příklad 9.** Nalezněte lokální extrémů funkce  $y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$ .

*Řešení:*

Definiční obor dané funkce je celá množina  $\mathbb{R}$  a funkce má na této množině spojité derivace všech řádů. Její první derivace  $y' = \frac{1-x}{1+x^2}$  je rovna nule v bodě  $x = 1$ .

Protože pro  $x < 1$  je první derivace kladná a pro  $x > 1$  záporná, má funkce  $y$  v bodě  $x = 1$  lokální maximum  $y(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$ .

Druhá derivace je

$$y'' = \frac{-1 - 2x + x^2}{(1 + x^2)^2}, \quad y''(1) = -\frac{1}{2} < 0.$$

---

**Příklad 10.** Nalezněte lokální extrémy funkce  $y = e^x \sin x$ .

*Řešení:*

Funkce je definována na celé množině  $\mathbb{R}$  a má na ní derivace všech řádů. Její první derivace

$$y'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$$

je rovna nule v bodech, kde  $\sin x + \cos x = 0$ , tj. v bodech  $x_k = \frac{4k-1}{4}\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Druhá derivace této funkce je

$$y''(x) = 2e^x \cos x.$$

Protože je tato druhá derivace v bodech  $x = \frac{8k-1}{4}\pi$  kladná, má daná funkce v těchto bodech lokální minima  $y\left(\frac{8k-1}{4}\pi\right) = -\frac{e^{(8k-1)\pi/4}}{\sqrt{2}}$ .

Naopak v bodech  $x = \frac{8k+3}{4}\pi$  je druhá derivace záporná. Proto má funkce v těchto bodech lokální maxima  $y\left(\frac{8k+3}{4}\pi\right) = \frac{e^{(8k+3)\pi/4}}{\sqrt{2}}$ .

---

**Příklad 11.** Nalezněte lokální extrémy funkce  $y = |x|e^{-|x-1|}$ .

*Řešení:*

Funkce je definována na celé množině  $\mathbb{R}$ , ale její derivace neexistují v bodech  $x_1 = 0$  a  $x_2 = 1$ . Pro  $x \in (-\infty, 0)$  je funkce rovna  $y = -xe^{x-1}$ . Tedy její derivace na tomto intervalu je  $y' = -e^{x-1}(1+x)$ . Tedy je rovna nule v bodě  $x = -1$ . Protože druhá derivace  $y''(x) = -e^{x-1}(2+x)$  je v bodě  $x = -1$  záporná, má funkce v bodě  $x = -1$  lokální maximum  $y(-1) = e^{-2}$ .

Na intervalu  $(0, 1)$  má daná funkce tvar  $y = xe^{x-1}$ . její derivace v tomto intervalu je  $y' = e^{x-1}(x+1)$ . Ta je v celém intervalu  $(0, 1)$  kladná. Tedy na tomto intervalu nemá daná funkce lokální extrém.

Pro  $x \in (1, +\infty)$  je  $y(x) = xe^{-x+1}$ . Její derivace je  $y' = e^{-x+1}(1-x)$ . tedy je na celém tomto intervalu záporná a funkce zde nemá lokální extrémy.

Derivace neexistuje v bodech  $x = 0$  a  $x = 1$ . V těchto bodech mohou tedy existovat lokální extrémy dané funkce. V intervalu  $(-1, 0)$  je  $y' < 0$  a pro  $x \in (0, 1)$  je  $y' > 0$ . Proto je v bodě  $x = 0$  lokální minimum  $y(0) = 0$ . Protože v intervalu  $(1, +\infty)$  je  $y' < 0$ , je v bodě  $x = 1$  lokální maximum  $y(1) = 1$ .

---

**Příklad 12.** Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce  $y = 3x^2 - x^3$ .

*Řešení:*

První dvě derivace funkce  $y$  jsou  $y' = 6x - 3x^3$  a  $y'' = 6 - 6x$ . Druhá derivace je kladná na intervalu  $(-\infty, 1)$  a záporná na intervalu  $(1, +\infty)$ . Proto je na intervalu  $(-\infty, 1)$  konvexní a na intervalu  $(1, +\infty)$  konkávní. Tedy bod  $x = 1$  je jejím inflexním bodem.

---

**Příklad 13.** Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce  $y = x + x^{5/3}$ .

*Řešení:*

První dvě derivace funkce  $y$  jsou  $y' = 1 + \frac{5}{3}x^{2/3}$  a  $y'' = \frac{10}{9}x^{-1/3}$ . Druhá derivace je záporná na intervalu  $(-\infty, 0)$  a kladná na intervalu  $(0, +\infty)$ . Proto je na intervalu  $(-\infty, 0)$  konkávní a na intervalu  $(0, +\infty)$  konvexní. Tedy přestože druhá derivace v bodě  $x = 1$  neexistuje, je tento bod jejím inflexním bodem.

---

**Příklad 14.** Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce  $y = \sqrt{1 + x^2}$ .

*Řešení:*

Definiční obor funkce je celá množina  $\mathbb{R}$ . První dvě derivace jsou  $y'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$  a  $y''(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}$ . Protože je druhá derivace kladná na celém  $\mathbb{R}$ , je tato funkce konvexní na celém  $\mathbb{R}$ .

---

**Příklad 15.** Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce  $y = x + \sin x$ .

*Řešení:*

Definiční obor funkce je celá množina  $\mathbb{R}$ . První dvě derivace jsou  $y'(x) = 1 + \cos x$  a  $y''(x) = -\sin x$ . Druhá derivace je kladná na intervalech  $((2k - 1)\pi, 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , a záporná na intervalech  $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$ . Tedy funkce je konvexní na intervalech  $((2k - 1)\pi, 2k\pi)$  a konkávní na intervalech  $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$ . Body  $x = k\pi$  jsou inflexní body této funkce.

---

**Příklad 16.** Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce  $y = x \sin(\ln x)$ .

*Řešení:*

Definiční obor dané funkce je interval  $(0, +\infty)$ . První dvě derivace jsou  $y'(x) = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$  a  $y''(x) = \frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x}$ . Druhá derivace je kladná na

intervalech  $\left(\exp\left[\frac{4k-1}{4}\pi\right], \exp\left[\frac{4k+1}{4}\pi\right]\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Tedy na těchto intervalech je funkce konvexní.

Na intervalech  $\left(\exp\left[\frac{4k+1}{4}\pi\right], \exp\left[\frac{4k+3}{4}\pi\right]\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , je druhá derivace záporná. Tedy daná funkce je na těchto intervalech konkávní.

V bodech  $x = \exp\left[\frac{4k+1}{4}\pi\right]$  má funkce inflexní body.

---

**Příklad 17.** Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce  $y = x^x$ .

*Řešení:*

Definiční obor dané funkce je interval  $(0, +\infty)$ . První dvě derivace jsou  $y'(x) = x^x(1 + \ln x)$  a  $y''(x) = x^x\left((1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x}\right)$ . Druhá derivace je kladná na celém definičním oboru. Proto je funkce  $y = x^x$  konvexní na  $D_f = (0, +\infty)$ .

---

**Příklad 18.** Pro  $x, y > 0$ ,  $x \neq y$  a  $n > 1$ , dokažte nerovnost  $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ .

*Řešení:*

Funkce  $f(x) = x^n$  má druhou derivaci  $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ . Protože je tato derivace pro  $n > 1$  a  $x > 0$  kladná, je tato funkce na intervalu  $(0, +\infty)$  konvexní.

Jestliže vezmeme body  $0 < x < y$ , platí pro ně nerovnost  $0 < x < \frac{x+y}{2} < y$ .

Protože je funkce  $f(x) = x^n$  na intervalu  $(0, +\infty)$  konvexní, platí nerovnost

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{x+y}{2}\right)^n < \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) = \frac{1}{2}(x^n + y^n).$$

---

**Příklad 19.** Pro  $x, y > 0$  dokažte nerovnost  $x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}$ .

*Řešení:*

Funkce  $f(x) = x \ln x$  má druhou derivaci  $f''(x) = \frac{1}{x}$ . Protože je tato derivace pro  $x > 0$  kladná, je tato funkce na intervalu  $(0, +\infty)$  konvexní.

Jestliže vezmeme body  $0 < x < y$ , platí pro ně nerovnost  $0 < x < \frac{x+y}{2} < y$ .

Protože je funkce  $f(x) = x \ln x$  na intervalu  $(0, +\infty)$  konvexní, platí nerovnost

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{x+y}{2} \ln \frac{x+y}{2} < \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) = \frac{1}{2}(x \ln x + y \ln y).$$

---

CVIČENÍ 11 — Asymptoty funkce; průběh funkce

**Příklad 1.** Najděte všechny asymptoty funkce  $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 1}$ .

*Řešení:*

Definiční obor dané funkce je  $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ .

Protože  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 1} = +\infty$ , je přímka  $x = 1$  svislou asymptotou ke grafu funkce  $f(x)$ .

Protože  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 1} = +\infty$ , je přímka  $x = -1$  svislou asymptotou ke grafu funkce  $f(x)$ .

V obou bodech  $x = \pm\infty$  platí  $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 2x}{x(x^2 - 1)} = 2$ . Dále

je  $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$ . Tedy přímka  $y = 2x + 1$  je šikmá asymptota ke grafu funkce  $f(x)$  v bodech  $x = \pm\infty$ .

---

**Příklad 2.** Najděte všechny asymptoty funkce  $f(x) = \frac{4x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ .

*Řešení:*

Definiční obor dané funkce je určen nerovnicí  $x^2 - 1 > 0$ . Tedy  $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

Protože  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$ , jsou obě přímky  $x = \pm 1$  asymptotami ke grafu dané funkce.

V bodě  $x = +\infty$  platí  $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 4$ . Dále je v tomto bodě

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x(x - \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 - 1}} = 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0.$$

Tedy přímka  $y = 4x$  je asymptota ke grafu funkce  $f(x)$  v bodě  $x = +\infty$ .

V bodě  $x = -\infty$  platí  $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -4$ . Dále je v tomto

bodě  $q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 4x) = 0$ . Tedy přímka  $y = -4x$  je asymptota ke grafu funkce  $f(x)$  v bodě  $x = -\infty$ .

---

**Příklad 3.** Najděte všechny asymptoty funkce  $f(x) = 2x - \arccos \frac{1}{x}$ .

*Řešení:*

Definiční obor funkce je určen nerovností  $-1 \leq \frac{1}{x} \leq 1$ . Tedy  $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

Protože  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(2x - \arccos \frac{1}{x}\right) = 2$  a  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(2x - \arccos \frac{1}{x}\right) = -2 - \pi$ , nejsou přímky  $x = \pm 1$  asymptotami ke grafu dané funkce.

V bodech  $x = \pm\infty$  je  $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ . Dále je  $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 2x) = -\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arccos \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ . Tedy přímka  $y = 2x - \frac{\pi}{2}$  je asymptota ke grafu funkce v bodech  $x = \pm\infty$ .

---

**Příklad 4.** Najděte všechny asymptoty funkce  $f(x) = xe^{1/x}$ .

*Řešení:*

Definiční obor dané funkce je  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Protože je  $\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^{-2}e^{1/x}}{-x^{-2}} = +\infty$ , je přímka  $x = 0$  asymptotou ke grafu funkce  $f(x)$ , přestože je  $\lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{1/x} = 0$ .

V bodech  $x = \pm\infty$  je  $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ . Dále je

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{t \rightarrow 0_{\pm}} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

Tedy přímka  $y = x + 1$  je asymptota ke grafu dané funkce v bodech  $x = \pm\infty$ .

---

**Příklad 5.** Najděte všechny asymptoty funkce  $f(x) = \operatorname{arctg} x + 3x$ .

*Řešení:*

Definiční obor dané funkce je celá reálná osa  $\mathbb{R}$ .

V bodech  $x = \pm\infty$  je  $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ .

Protože  $q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ , je přímka  $y = 3x + \frac{\pi}{2}$  asymptota ke grafu funkce  $f(x)$  v bodě  $x = +\infty$ .

Protože  $q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$ , je přímka  $y = 3x - \frac{\pi}{2}$  asymptota ke grafu funkce  $f(x)$  v bodě  $x = -\infty$ .

---

**Příklad 6.** Najděte všechny asymptoty funkce  $f(x) = \sqrt{x^2 + x^{3/2}}$ .

*Řešení:*

Definiční obor dané funkce je interval  $\langle 0, +\infty \rangle$ .

V bodě  $x = 0$  je  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + x^{3/2}} = 0$ . Proto v tomto bodě neexistuje asymptota ke grafu funkce  $f(x)$ .

Můžeme se pokusit najít asymptotu ke grafu této funkce v bodě  $x = +\infty$ . V tomto

bodě je  $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x^{3/2}}}{x} = 1$ .

Protože

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x^{3/2}} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^2 + x^{3/2}} + x} = +\infty.$$

asymptota ke grafu funkce  $f(x)$  v bodě  $x = +\infty$  neexistuje.

---

**Příklad 7.** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$ .

*Řešení:*

Definiční obor této funkce je celá množina  $\mathbb{R}$ . Limity v krajních bodech definičního oboru jsou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ . Protože  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ , nemá graf funkce žádné asymptoty. Funkce  $f(x) = 0$  pro  $x = -1$  a  $x = 2$ . Funkce je větší než nula na intervalu  $x \in (-1, +\infty)$  a menší než nula na intervalu  $x \in (-\infty, -1)$ .  $f(0) = 4$ . Žádné další speciální vlastnosti této funkce nejsou na první pohled vidět.

$f'(x) = (x - 2)^2 + 2(x + 1)(x - 2) = 3x(x - 2)$ .  $f'(x) = 0$  pro  $x = 0$  a  $x = 2$ .

$f(x) > 0$  pro  $x \in (-\infty, 0)$  a  $x \in (2, \infty)$ ; na těchto intervalech je funkce  $f(x)$  rostoucí.

$f(x) < 0$  pro  $x \in (0, 2)$ ; na tomto intervalu je funkce  $f(x)$  klesající.

V bodě  $x = 0$  je lokální maximum  $f(0) = 4$  a v bodě  $x = 2$  je lokální minimum  $f(2) = 0$ .

$f''(x) = 6x - 6$ .  $f''(x) = 0$  pro  $x = 1$ .

$f''(x) > 0$  pro  $x \in (1, +\infty)$ ; v tomto intervalu je funkce  $f(x)$  konvexní.

$f''(x) < 0$  pro  $x \in (-\infty, 1)$ ; v tomto intervalu je funkce konkávní.

Bod  $x = 1$  je inflexní bod dané funkce.

---

**Příklad 8.** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x^2(x - 1)}{(x + 1)^2}$ .

*Řešení:*

Definiční obor dané funkce je  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Limity v krajních bodech definičního oboru jsou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = +\infty$  a  $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = -\infty$ . Proto je přímka  $x = -1$  asymptotou ke grafu funkce  $f(x)$ .

Protože je

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(x - 1)}{(x + 1)^2} = 1$$

a  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^2 - x}{(x + 1)^2} = -3$ , je přímka  $y = x - 3$  asymptota ke grafu funkce  $f(x)$  v bodech  $x = \pm\infty$ .

$f(0) = 0$ . Žádné další speciální vlastnosti funkce  $f(x)$  na první pohled nevidím.



$$f'(x) = \frac{x(x^2 + 3x - 2)}{(x + 1)^3}.$$

$$f'(x) = 0 \text{ pro } x = 0 \text{ a } x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{3}.$$

$$f'(x) > 0 \text{ pro } x \in \left(-\infty, -\frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right), \text{ pro } x \in (-1, 0) \text{ a pro } x \in \left(\frac{\sqrt{17} - 3}{2}, +\infty\right);$$

tedy na těchto intervalech je funkce  $f(x)$  rostoucí.

$$f'(x) < 0 \text{ pro } x \in \left(-\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, -1\right) \text{ a pro } x \in \left(0, \frac{\sqrt{17} - 3}{2}\right); \text{ na těchto intervalech}$$

je funkce  $f(x)$  klesající.

Proto je v bodě  $x = -\frac{3 + \sqrt{17}}{2}$  lokální maximum; v bodě  $x = 0$  také lokální maximum a v bodě  $x = \frac{\sqrt{17} - 3}{2}$  lokální minimum.

$$f''(x) = \frac{10x - 2}{(x + 1)^4}.$$

$$f''(x) = 0 \text{ pro } x = \frac{1}{5}.$$

$$f''(x) > 0 \text{ pro } x \in \left(\frac{1}{5}, +\infty\right); \text{ v tomto intervalu je tedy funkce } f(x) \text{ konvexní.}$$

$$f''(x) < 0 \text{ pro } x \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right); \text{ v tomto intervalu je tedy funkce } f(x) \text{ konkávní.}$$

Bod  $x = \frac{1}{5}$  je inflexní bod dané funkce.

---

**Příklad 9.** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$ .

*Řešení:*

Definiční obor funkce je dán nerovností  $8x^2 - x^4 \geq 0$ , tj.  $D_f = \langle -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} \rangle$ .

Limity v krajních bodech definičního oboru jsou  $\lim_{x \rightarrow \pm 2\sqrt{2}} f(x) = 0$ .

Funkce je sudá; proto ji stačí vyšetřovat pro  $x \geq 0$ , tj. v intervalu  $\langle 0, 2\sqrt{2} \rangle$ .

$$f(x) = 0 \text{ pro } x = \pm 2\sqrt{2} \text{ a } x = 0.$$

$$f(x) = 0 \text{ pro } x \in (-2\sqrt{2}, 0) \cup (0, 2\sqrt{2}); f(x) = 0.$$

Asymptoty ke grafu této funkce nejsou.

$$f'(x) = \frac{2x(4 - x^2)}{\sqrt{8x^2 - x^4}} = \begin{cases} \frac{2(4 - x^2)}{\sqrt{8 - x^2}} & \text{pro } x > 0 \\ -\frac{2(4 - x^2)}{\sqrt{8 - x^2}} & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Pro  $x = 0$  derivace neexistuje.

$$f'(x) = 0 \text{ pro } x = \pm 2.$$

$f'(x) > 0$  pro  $x \in (0, 2)$  a  $x \in (-2\sqrt{2}, -2)$ ; na těchto intervalech je funkce rostoucí.

$f'(x) < 0$  pro  $x \in (-2, 0)$  a  $x \in (2, 2\sqrt{2})$ ; na těchto intervalech je funkce klesající (všimněte si, že derivace sudé funkce je vždy funkce lichá).

V bodě  $x = 0$  je lokální minimum  $f(0) = 0$  a v bodech  $x = \pm 2$  jsou lokální maxima  $f(\pm 2) = 4$ .

Lokální minima jsou i v bodech  $x = \pm 2\sqrt{2}$ , kde  $f(\pm 2\sqrt{2}) = 0$  (?).

$f''(x) = \frac{2|x|(x^2 - 12)}{(8 - x^2)^{3/2}}$  kromě bodu  $x = 0$ , kde druhá derivace neexistuje. Tedy

$f''(x) > 0$  na obou intervalech  $(-2\sqrt{2}, 0)$  a  $(0, 2\sqrt{2})$  (všimněte si, že derivace liché funkce je funkce sudá). Funkce je tedy konvexní v celém  $D_f$ .

---

**Příklad 10.** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .

*Řešení:*

Definiční obor dané funkce je  $\mathbb{R}$ . Protože  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ , jsou asymptoty ke grafu daná funkce  $y = 1$  pro  $x = +\infty$  a  $y = -1$  pro  $x = -\infty$ .

$f(x) = 0$  pro  $x = 2$ .  $f(x) > 0$  pro  $x \in (2, +\infty)$  a  $f(x) < 0$  pro  $x \in (-\infty, 2)$ ;  $f(0) = -2$ ; na první pohled nejsou vidět žádné jiné speciální vlastnosti funkce  $f(x)$ .

$f'(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + 1)^{3/2}}$ ;  $f'(x) = 0$  pro  $x = -\frac{1}{2}$ ;  $f'(x) > 0$  pro  $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ , tj.

na tomto intervalu je funkce  $f(x)$  rostoucí;  $f'(x) < 0$  pro  $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ , tj. na

tomto intervalu je funkce  $f(x)$  klesající; proto je v bodě  $x = -\frac{1}{2}$  lokální minimum

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{5}$ .

$f''(x) = \frac{2 - 3x - 4x^2}{(x^2 + 1)^{5/2}}$ .  $f''(x) = 0$  pro  $x = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{8}$ ;  $f''(x) > 0$  na intervalu

$\left(-\frac{3 + \sqrt{41}}{8}, \frac{\sqrt{41} - 3}{8}\right)$ , tj. na tomto intervalu je daná funkce konvexní;  $f''(x) < 0$

na intervalech  $x \in \left(-\infty, -\frac{3\sqrt{41}}{8}\right)$  a  $x \in \left(\frac{\sqrt{41} - 3}{8}, +\infty\right)$ , tj. na těchto inter-

valech je funkce  $f(x)$  konkávní; body  $x = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{8}$  jsou inflexní body dané funkce.

---

**Příklad 11.** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x$ .

*Řešení:*

Definiční obor dané funkce je celá množina  $\mathbb{R}$ . Funkce je periodická s periodou  $L = 2\pi$  a je sudá. Proto ji stačí vyšetřovat na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ .

Limity v krajních bodech definičního oboru neexistují.

Nulové body této funkce jsou řešením rovnice  $\frac{1}{2} + \cos x - \cos^2 x = 0$ . Její řešení

na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$  je bod  $x_0 = \arccos \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$  ( $1 + \sqrt{3} > 2$ ). Funkce je kladná v intervalu  $\langle 0, x_0 \rangle$  a záporná na intervalu  $(x_0, \pi)$ .

Derivace dané funkce je  $f'(x) = -\sin x + \sin 2x$ .

$f'(x) = 0$  pro  $x = 0$ ,  $x = \pi$  a  $x = \frac{\pi}{3}$ .

$f'(x) > 0$  na intervalu  $(0, \frac{\pi}{3})$ , tj. na tomto intervalu je rostoucí.

Na intervalu  $(\frac{\pi}{3}, \pi)$  je  $f'(x) < 0$ , a tedy funkce  $f(x)$  je na tomto intervalu klesající.

V bodech  $x = 0$  a  $x = \pi$  jsou minima  $f(0) = \frac{1}{2}$  a  $f(\pi) = -\frac{3}{2}$ . V bodě  $x = \frac{\pi}{3}$  je maximum  $f(\frac{\pi}{3}) = 1$ .

Druhá derivace funkce  $f(x)$  je  $f''(x) = -\cos x + 2 \cos 2x$ . Ta je na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$  rovna nule v bodech  $x_{1,2} = \arccos \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$ .

Druhá derivace je kladná v intervalech  $(0, \arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8})$  a  $(\arccos \frac{1 - \sqrt{33}}{8}, \pi)$  v těchto intervalech je tedy funkce konvexní.

V intervalu  $(\arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8}, \arccos \frac{1 - \sqrt{33}}{8})$  je druhá derivace záporná, a tedy funkce je na tomto intervalu konkávní.

Body  $x = \arccos \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$  jsou inflexní body dané funkce.

---

**Příklad 12.** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ .

*Řešení:*

Definiční obor funkce  $f(x)$  je celá množina  $\mathbb{R}$ . Funkce má periodu  $L = 2\pi$  a je lichá. Stačí ji tedy vyšetřovat na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ .

Limity v krajních bodech definičního oboru neexistují.

Nulové body funkce  $f(x)$  jsou  $x = 0$  a  $x = \pi$ . Funkce  $f(x)$  je na intervalu  $(0, \pi)$  kladná.

Derivace je  $f'(x) = \frac{1 + 2 \cos x}{(2 + \cos x)^2}$ . Ta je rovna nule v bodě  $x = \frac{2}{3}\pi$ . V intervalu

$\langle 0, \frac{2}{3}\pi \rangle$  je  $f'(x) > 0$ , a tedy funkce je v tomto intervalu rostoucí. v intervalu  $(\frac{2}{3}\pi, \pi)$  je  $f'(x) < 0$ . tedy funkce je v tomto intervalu klesající. V bodě  $x = \frac{2}{3}\pi$  je lokální maximum  $f(\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ; v bodě  $x = -\frac{2}{3}\pi$  je lokální minimum

$f(-\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Druhá derivace dané funkce je  $f''(x) = \frac{2 \sin x (\cos x - 1)}{(2 + \cos x)^3}$ . Tato derivace je na intervalu  $(0, \pi)$  záporná. Tedy funkce  $f(x)$  je na tomto intervalu konkávní. Protože je tato derivace lichá funkce, je funkce na intervalu  $(-\pi, 0)$  konvexní. Tedy body  $x = 0$  a  $x = \pi$  jsou inflexní body funkce  $f(x)$ .

---

**Příklad 13.** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$ .

*Řešení:*

Definiční obor funkce  $f(x)$  je celá množina  $\mathbb{R}$ . Funkce je kladná.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ , a tedy přímka  $y = 0$  je asymptota ke grafu funkce  $f(x)$  v bodech  $x = \pm\infty$ . Protože je daná funkce sudá, stačí ji vyšetřovat na intervalu  $\langle 0, +\infty \rangle$ .

Její derivace je  $f'(x) = -2x^3e^{-x^2}$ . Ta je na intervalu  $(0, +\infty)$  záporná, a tedy funkce na tomto intervalu klesá. Na intervalu  $(-\infty, 0)$  je první derivace funkce  $f(x)$  kladná. Tedy funkce na tomto intervalu roste. Proto je v bodě  $x = 0$  lokální maximum vyšetřované funkce  $f(0) = 1$ .

Druhá derivace funkce je  $f''(x) = 2x^2(2x^2 - 3)e^{-x^2}$ . Ta je kladná na intervalech  $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$  a  $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ . Na těchto intervalech je tedy funkce  $f(x)$  konvexní.

Na intervalech  $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$  a  $\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$  je druhá derivace záporná. Tedy funkce  $f(x)$  je konkávní na intervalu  $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ . Body  $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$  jsou inflexní body dané funkce. Bod  $x = 0$  není jejím inflexním bodem.

---

**Příklad 14.** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ .

*Řešení:*

Definiční obor dané funkce je celá množina  $\mathbb{R}$ .

Limity v krajních bodech definičního oboru jsou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0.$$

Ale  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \pm\infty$ . Proto nemá funkce  $f(x)$  asymptoty.

Protože

$$f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x),$$

je funkce  $f(x)$  lichá. Stačí ji tedy vyšetřovat na intervalu  $\langle 0, +\infty \rangle$ . Pro  $x > 0$  je funkce  $f(x) > 0$  a pro  $x < 0$  je  $f(x) < 0$ . Její jediný nulový bod je  $x = 0$ .

První derivace funkce je  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ . Ta je kladná na celé množině  $\mathbb{R}$ . Tedy funkce je rostoucí a nemá lokální extrém.

Druhá derivace  $f''(x) = \frac{-x}{(x^2 + 1)^{3/2}}$  je kladná pro  $x < 0$  a záporná pro  $x > 0$ . Tedy funkce  $f(x)$  je konvexní na intervalu  $(-\infty, 0)$  a konkávní na intervalu  $(0, +\infty)$ . Bod  $x = 0$  je inflexní bod dané funkce.

---

**Příklad 15.** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = 2 \arcsin \frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$ .

*Řešení:*

Definiční obor dané funkce je  $D_f = \langle -2, 2 \rangle$ . Její limity v krajních bodech definičního oboru jsou  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \pi$  a  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\pi$ . Protože  $f(0) = -2$  má funkce nulový bod v intervalu  $(0, 2)$ . Na první pohled nejsou zřejmé žádné speciální vlastnosti funkce  $f(x)$ .

První derivace funkce  $f'(x) = \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} > 0$  na intervalu  $(-2, 2)$ . Tedy funkce  $f(x)$  je na celém definičním oboru rostoucí. Lokální extrém funkce  $f(x)$  nemá.

Protože druhá derivace  $f''(x) = \frac{2}{(2-x)\sqrt{4-x^2}}$  je na intervalu  $(-2, 2)$  kladná, je funkce  $f(x)$  na celém definičním oboru konvexní. Funkce tedy nemá inflexní body.

---

CVIČENÍ 12 — Globální extrémy

**Příklad 1.** Najděte globální extrémy funkce  $f(x) = 2^x$  na intervalu  $\langle -1, 5 \rangle$ .

*Řešení:*

Derivace funkce je  $f'(x) = 2^x \ln 2 \neq 0$ . Globální extrémy mohou tedy být pouze v krajních bodech intervalu, tj.  $x = -1$  a  $x = 5$ . Protože  $f(-1) = \frac{1}{2}$  a  $f(5) = 32$  je globální minimum dané funkce rovno  $f_{\min} = \frac{1}{2}$  v bodě  $x = -1$  a globální maximum  $f_{\max} = 32$  v bodě  $x = 5$ .

---

**Příklad 2.** Najděte globální extrémy funkce  $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$  na intervalu  $\langle -10, 10 \rangle$ .

*Řešení:*

Protože je  $f(x) = |(x-2)(x-1)|$  je funkce na intervalu  $\langle -10, 1 \rangle$  definována předpisem  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ . Derivace funkce na tomto intervalu je  $f'(x) = 2x - 3$ . Derivace nemá na tomto intervalu nulové body.

Na intervalu  $(1, 2)$  je funkce definována předpisem  $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ . Tedy její derivace v tomto intervalu je  $f'(x) = -2x + 3$ . Ta je rovna nule pro  $x = \frac{3}{2}$ .

Na intervalu  $(2, 10)$  je funkce definována předpisem  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ . Tedy její derivace v tomto intervalu je  $f'(x) = 2x - 3$ . Derivace nemá na tomto intervalu nulové body.

Protože nevíme, zda má funkce derivaci v bodech  $x = 1$  a  $x = 2$ , mohou být body, kde má funkce lokální extrém  $x = -10$ ,  $x = 1$ ,  $x = \frac{3}{2}$ ,  $x = 2$  a  $x = 10$ .

Funkční hodnoty v těchto bodech jsou  $f(-10) = 132$ ,  $f(1) = f(2) = 0$ ,  $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$  a  $f(10) = 72$ . Tedy globální maximum je  $f_{\max} = 132$  v bodě  $x = -10$  a globální minimum je  $f_{\min} = 0$  v bodech  $x = 1$  a  $x = 2$ .

---

**Příklad 3.** Najděte infimum a supremum funkce  $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$  na intervalu  $(0, +\infty)$ .

*Řešení:*

Funkce  $f(x)$  má na daném intervalu derivaci  $f'(x) = \frac{2x(1-2x^2-x^4)}{(1+x^4)^2}$ . Ta je rovna

nule v bodě  $x_0$ , pro který je  $x_0^2 = -1 + \sqrt{2}$ . Supremum a infimum proto může daná funkce nabývat pouze v bodech  $x = 0$ ,  $x = x_0$  a  $x = +\infty$ . Protože je  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ,

$f(x_0) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$  a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  je  $\sup f(x) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$  a  $\inf f(x) = 0$ .

---

**Příklad 4.** Najděte infimum a supremum funkce  $f(x) = e^{-x^2} \cos x^2$  na intervalu  $(-\infty, +\infty)$ .

*Řešení:*

Funkce je diferencovatelná na celém  $\mathbb{R}$ . Její derivace je  $f'(x) = -2xe^{-x^2}(\cos x^2 + \sin x^2)$ . Tato derivace je rovna nule v bodech  $x_0 = 0$  a  $x_k^2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Proto její supremum a infimum může být pouze v bodech  $x_0 = 0$ ,  $x_k = \pm\sqrt{-\frac{\pi}{4} + k\pi}$  nebo  $x = \pm\infty$ . Protože je  $f(0) = 1$ ,  $f(x_k) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$  a  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ , je  $\sup f(x) = 1$  a  $\inf f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-3\pi/4}$ .

---

**Příklad 5.** Dokažte nerovnost  $\frac{x+a}{2^{(n-1)/n}} \leq \sqrt[n]{x^n+a^n} \leq x+a$  pro  $x > 0$ ,  $a > 0$  a  $n > 1$ .

*Řešení:*

Uvažujme funkci  $f_1(x) = x+a - \sqrt[n]{x^n+a^n}$  a hledejme její infimum na intervalu  $(0, \infty)$ . Derivace této funkce je

$$f_1'(x) = 1 - x^{n-1}(x^n+a^n)^{(1-n)/n} = 1 - \left(\frac{x}{\sqrt[n]{x^n+a^n}}\right)^{n-1} > 0.$$

Protože je  $f_1(0) = 0$  a funkce  $f_1(x)$  je rostoucí, je na intervalu  $(0, +\infty)$  splněna nerovnost  $f_1(x) = x+a - \sqrt[n]{x^n+a^n} > 0$ .

Nyní vezměme funkci  $f_2(x) = \sqrt[n]{x^n+a^n} - \frac{x+a}{2^{(n-1)/n}}$  a hledejme její infimum na

intervalu  $(0, +\infty)$ . Derivace této funkce je  $f_2'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt[n]{x^n+a^n}}\right)^{n-1} - \frac{1}{2^{(n-1)/n}}$ .

Tato derivace je rovna nule pouze v bodě  $x = a$ . Tedy funkce  $f_2(x)$  může nabývat infima pouze v bodech  $x = 0$ ,  $x = a$  nebo v bodě  $x = +\infty$ . Protože  $f_2(0) = a - \frac{a}{2^{(n-1)/n}} > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[n]{x^n+a^n} - \frac{x+a}{2^{(n-1)/n}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt[n]{1 + \frac{a^n}{x^n}} - \frac{1+a/x}{2^{(n-1)/n}} \right) = +\infty$$

a  $f_2(a) = 0$ , platí nerovnost  $f_2(x) \geq 0$ .

---

**Příklad 6.** Absolutní odchylkou dvou funkcí  $f(x)$  a  $g(x)$  na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$  se nazývá číslo  $\Delta = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$ . Určete absolutní odchylku funkcí

$f(x) = x^2$  a  $g(x) = x^3$  na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

*Řešení:*

Na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  máme nají supremum funkce  $f(x) = |x^2 - x^3| = x^2 - x^3$ . Protože derivace této funkce je  $f'(x) = 2x - 3x^2$ , která je rovna nule v bodech  $x = 0$  a  $x = \frac{2}{3}$ ,

může mít tato funkce supremum pouze v bodech  $x = 0$ ,  $x = \frac{2}{3}$  nebo  $x = 1$ . Funkční hodnoty v těchto bodech jsou  $f(0) = f(1) = 0$  a  $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$ . Tedy pro dané funkce na daném intervalu je  $\Delta = \frac{4}{27}$ .

---

**Příklad 7.** Určete nejmenší hodnotu součtu  $n$ -té a  $m$ -té mocniny,  $n > 0$ ,  $m > 0$ , dvou kladných čísel, jejichž součin je roven  $a$ .

*Řešení:*

Máme najít nejmenší hodnotu funkce dvou proměnných  $F(x, y) = x^n + y^m$ , kde  $xy = a$  a  $x, y > 0$ . Z této rovnice plyne  $y = \frac{a}{x}$ . Proto máme najít na intervalu  $(0, +\infty)$  infimum funkce  $f(x) = x^n + \frac{a^m}{x^m}$ . Derivace funkce  $f(x)$  je  $f'(x) = nx^{n-1} - m \frac{a^m}{x^{m+1}}$ . Tato derivace je rovna nule pouze v bodě  $x_0 = \left(\frac{m}{n}\right)^{1/(n+m)} a^{m/(n+m)}$ . Protože pro toto  $x_0$  je  $y_0 = \left(\frac{n}{m}\right)^{1/(n+m)} a^{n/(n+m)}$  a v bodech  $x = 0$  a  $x = +\infty$  je limita funkce  $f(x)$  rovna  $+\infty$ , je nejmenší hodnota rovna  $(n+m) \left(\frac{a^{nm}}{m^m n^n}\right)^{1/(n+m)}$ .

---

**Příklad 8.** Ze všech obdélníků s daným obsahem  $S$  najděte ten, který má nejmenší obvod.

*Řešení:*

Označme  $x$  a  $y$  strany obdélníka. Podle zadání splňuje  $x$  a  $y$  vztah  $xy = S$ , neboli  $y = \frac{S}{x}$ . Obvod obdélníka je  $f(x) = 2(x + y) = 2\left(x + \frac{S}{x}\right)$ . Máme tedy najít minimum této funkce na intervalu  $x \in (0, +\infty)$ . Její derivace  $f'(x) = 2\left(1 - \frac{S}{x^2}\right)$  je rovna nule v bodě  $x = \sqrt{S}$ . Protože  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , je má hledaný obdélník strany  $x = y = \sqrt{S}$ . Je to tedy čtverec.

---

**Příklad 9.** Najděte pravoúhlý trojúhelník s největším obsahem, je-li součet jedné jeho odvěsny a přepony konstantní.

*Řešení:*

Označme odvěsny pravoúhlého trojúhelníka  $a$  a  $b$  a jeho přeponu  $c$ . Podle Pythagorovy věty je  $a^2 + b^2 = c^2$ , neboli  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ . Podle zadání úlohy je  $a + c = k$ , kde  $k$  je daná konstanta. Tedy  $c = k - a$ . Obsah trojúhelníka je  $P = \frac{ab}{2}$ . Máme tedy najít maximum funkce  $f(a) = \frac{a}{2} \sqrt{k(k-2a)}$  na intervalu  $a \in (0, k/2)$ . Její derivace



$f'(a) = \frac{k(k-3a)}{2\sqrt{k(k-2a)}}$  je rovna nule pro  $a = \frac{k}{3}$ . Pak je  $c = \frac{2}{3}k$  a  $b = \frac{k}{\sqrt{3}}$ . Je zřejmé, že pro funkce  $f(a)$  má v tomto bodě maximum, které je rovno  $P_{\max} = \frac{k^2}{6\sqrt{3}}$ .

---

**Příklad 10.** Pro jaké rozměry má uzavřený válec s daným objemem  $V$  nejmenší povrch?

*Řešení:*

Nechť je  $r$  poloměr a  $h$  výška válce. Jeho objem pak je  $V = \pi r^2 h$ . Tedy  $h = \frac{V}{\pi r^2}$ . Povrch tohoto válce je  $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ . Máme tedy najít minimum funkce  $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$  na intervalu  $r \in (0, +\infty)$ . Její derivace  $f'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$  je rovna nule pro  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ . Pro tuto hodnotu  $r$  je  $h = 2r$  a  $S = \sqrt[3]{54\pi V^2}$ .

Protože  $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} f(r) = +\infty$ , jsou hledané rozměry válce  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$  a  $h = 2r = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ .

---

**Příklad 11.** Do koule s poloměrem  $R$  vepište válec s největším objemem.

*Řešení:*

Jestliže je poloměr válce roven  $r$  a jeho výška  $2h$ , je objem válce  $V = 2\pi r^2 h$ . Dále musí platit vztah  $r^2 + h^2 = R^2$ , a tedy  $r^2 = R^2 - h^2$ . Máme tedy najít maximum funkce  $f(h) = 2\pi h(R^2 - h^2)$  pro  $h \in (0, R)$ . Derivace této funkce  $f'(h) = 2\pi(R^2 - 3h^2)$  je rovna nule pro  $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ . Pro toto  $h$  je  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$  a  $V = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$ .

Protože pro  $h = 0$  a  $h = R$  je  $V = 0$ , je poloměr hledaného válce  $r = \sqrt{\frac{3}{2}}R$  a jeho výška  $v = \frac{2}{\sqrt{3}}R$ .

---

**Příklad 12.** Najděte nejkratší vzdálenost bodu  $M = [p; p]$  od paraboly  $y^2 = 2px$ .

*Řešení:*

Nechť je bod  $[x; y]$  libovolný bod paraboly  $y^2 = 2px$ . Čtverec vzdálenosti tohoto bodu od bodu  $[p; p]$  je  $d^2 = (x-p)^2 + (y-p)^2$ . Jestliže z rovnice paraboly vypočteme  $x = \frac{y^2}{2p}$  a dosadíme, dostaneme  $d^2 = \frac{y^4}{4p^2} - 2py + 2p^2$ . Máme najít minimum funkce

$f(y) = \sqrt{\frac{y^4}{4p^2} - 2py + 2p^2}$  pro  $y \in \mathbb{R}$ . Protože jde o kladnou funkci, stačí najít

minimum její druhé mocniny, tj. funkce  $g(y) = f^2(y) = \frac{y^4}{4p^2} - 2py + 2p^2$ . Její derivace  $g'(y) = \frac{y^3}{p^2} - 2p$  se rovná nule v bodě  $y = \sqrt[3]{2}p$ . Protože pro  $y \rightarrow \pm\infty$  je  $d \rightarrow +\infty$ , je v tomto bodě minimální vzdálenost  $d_{\min} = p\sqrt{2 - 3 \cdot 2^{-2/3}}$ .

---

**Příklad 13.** Najděte nejmenší a největší vzdálenost bodu  $A = [2; 0]$  od kružnice  $x^2 + y^2 = 1$ .

*Řešení:*

Uvažujme libovolný bod  $[x; y]$  kružnice  $x^2 + y^2 = 1$ . Čtverec vzdálenosti mezi body  $[2; 0]$  a  $[x; y]$  je  $d^2 = (x - 2)^2 + y^2$ . Protože ale  $y^2 = 1 - x^2$  máme najít minimum a maximum funkce  $f(x) = 5 - 4x$  pro  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ . Její derivace  $f'(x) = -4 \neq 0$ . Tedy jedinými body, kde má funkce  $f(x)$  extrém jsou krajní body intervalu body  $x = \pm 1$ . Tedy  $d_{\min} = 1$  a  $d_{\max} = 3$ .

---

**Příklad 14.** Na elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  najděte v prvním kvadrantu bod  $M = [x_0; y_0]$  tak, aby byl obsah trojúhelníka tvořeného souřadnicovými osami a tečnou k elipse v tomto bodě nejmenší.

*Řešení:*

Rovnice tečny ke grafu funkce, která prochází bodem  $[x_0; y_0]$  je  $y - y_0 = y'_0(x - x_0)$ .

Z rovnice elipsy plyne, že  $y_0 = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}$ . Derivaci  $y'_0$  nejsnáze najdeme derivací

rovnice elipsy v implicitním tvaru. Z té plyne rovnost  $\frac{2x_0}{a^2} + \frac{2y_0}{b^2} y'_0 = 0$ , tj.  $y'_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ . Tedy rovnice tečny v tomto bodě je  $y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$ . Označíme-li

$r$  vzdálenost průsečíku této tečny s osou  $Ox$  dostaneme  $r = x_0 + \frac{a^2}{x_0} \cdot \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{a^2}{x_0}$ .

Je-li  $s$  vzdálenost průsečíku této tečny s osou  $Oy$  dostaneme  $s = \frac{b^2}{y_0}$ . Obsah daného

trojúhelníka je  $P = \frac{rs}{2} = \frac{a^2 b^2}{2x_0 y_0}$ . Naší úlohou je najít minimum funkce  $f(x_0) =$

$\frac{a^3 b}{x_0 \sqrt{a^2 - x_0^2}}$  pro  $x_0 \in (0, a)$ . Derivace této funkce  $f'(x_0) = \frac{a^3 b(2x_0^2 - a^2)}{x_0^2 (a^2 - x_0^2)^{3/2}}$  je rovna

nule v bodě  $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ . Pak je  $y_0 = \frac{b}{\sqrt{2}}$  a  $P = ab$ .

---

**Příklad 15.** Jakou výšeč je třeba vyřezat z kruhu s poloměrem  $R$ , aby ze zbytku bylo možné svinout trychtýř, který má největší objem?

*Řešení:*

Označme  $\alpha$  úhel zbylé výseče. Délka části kružnice je  $R\alpha$ . Je-li  $r$  poloměr podstavy trychtýře, musí platit  $R\alpha = 2\pi r$ , neboli  $r = \frac{\alpha}{2\pi} R$ . Pro výšku  $h$  trychtýře dostaneme vztah  $r^2 + h^2 = R^2$ , tj.  $h = \frac{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{2\pi} R$ . Protože objem kužele je  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ , je naším úkolem najít maximum funkce  $f(\alpha) = \frac{R^3}{24\pi^2} \alpha^2 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$  pro  $\alpha \in (0, 2\pi)$ . Její derivace je  $f'(\alpha) = \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \frac{\alpha(8\pi^2 - 3\alpha^2)}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}$ . Nulové body derivace jsou  $\alpha = 0$  a  $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ . Je zřejmé, že maximum funkce  $f(\alpha)$  je v bodě  $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ . Musíme tedy vyřezat výseč se středovým úhlem  $2\pi - \alpha = 2\pi\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ .

---

**Příklad 16.** Podnik  $A$  je od železnice, která směřuje z jihu na sever a prochází městem  $B$ , vzdálen  $a$  km (počítá se nejkratší vzdálenost). Pod jakým úhlem  $\varphi$  vzhledem k železnici je třeba postavit příjezd od podniku  $A$ , aby převoz nákladů z  $A$  do  $B$  byl co nejekonomičtější, jestliže převoz tuny nákladu do vzdálenosti 1 km stojí po příjezdu k železnici  $p$  Kč a po železnici  $q$  Kč,  $p > q$ , a město  $B$  je o  $b$  km severněji než závod  $A$ ?

*Řešení:*

Délka  $x$  příjezdu k železnici je dána vztahem  $x = \frac{a}{\sin \varphi}$  a délka  $y$  od konce příjezdu do místa  $B$  pro  $\operatorname{tg} \varphi \geq \frac{a}{b}$  je  $y = b - \frac{a}{\operatorname{tg} \varphi}$ . Náklady na přepravu jsou v takovém případě  $N = px + qy$ . Máme tedy najít minimum funkce  $f(\varphi) = \frac{pa}{\sin \varphi} + q(b - a \cot \varphi)$  pro  $\varphi \in \left(\arctg \frac{a}{b}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Derivace této funkce  $f'(\varphi) = \frac{-pa \cos \varphi + qa}{\sin^2 \varphi}$  se rovná nule pro  $\varphi = \arccos \frac{p}{q}$ . Snadno se přesvědčíme, hledaný úhel  $\varphi = \arccos \frac{p}{q}$  pro  $\arccos \frac{p}{q} \geq \arctg \frac{a}{b}$  a  $\varphi = \arctg \frac{a}{b}$  pro  $\arccos \frac{p}{q} < \arctg \frac{a}{b}$ .

---

**Příklad 17.** K řece se šířkou  $a$  m je sestrojen pod pravým úhlem kanál šířky  $b$  m. Jaká je největší délka lodí, které mohou vplout do tohoto kanálu?

*Řešení:*

Zvolme počátek souřadnic  $O$  v bodě řeky, kde začíná kanál. Je zřejmé, že loď projede pokud bude nejmenší délka úsečky, která spojuje bod  $A$  na břehu řeky a bod  $B$  na břehu kanálu a prochází počátkem  $O$  větší než délka lodi. Nechť je  $\varphi$  úhel, který svírá tato úsečka z břehem řeky. Délka takové úsečky  $\ell$  se skládá ze dvou částí. Z úsečky, která leží v řece a jejíž délku označíme  $\ell_1$ , a z úsečky, která leží v kanále, jejíž délku označíme  $\ell_2$ . Pak je  $\ell = \ell_1 + \ell_2$ , kde  $\ell_1 = \frac{a}{\sin \varphi}$  a  $\ell_2 = \frac{b}{\cos \varphi}$ . Naším úkolem

tedy je najít minimum funkce  $f(\varphi) = \frac{a}{\sin \varphi} + \frac{b}{\cos \varphi}$ , kde  $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Derivace této funkce  $f'(\varphi) = -\frac{a \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} + \frac{b \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$  je rovna nule pro  $\operatorname{tg} \varphi = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/3}$ . Protože je  $\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{a^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}$  a  $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{b^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}$ , dostaneme pro délku  $\ell = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$ .

---

**Příklad 18.** Do poháru, který má tvar polokoule s poloměrem  $a$ , pustíte tyč délky  $\ell > 2a$ . Určete rovnovážnou polohu tyče.

*Řešení:*

Zvolme počátek ve středu polokoule a za rovinu  $xy$  vezmeme tu rovinu, ve které leží tyč v rovnováze. Protože  $\ell > 2a$ , opírá se tyč o vrchní část poháru. Nechť jsou souřadnice bodu, ve kterém se tyč opírá  $[a; 0]$  a pohár leží v záporném směru osy  $Oy$ . Lze předpokládat, že průnik roviny  $xy$  s polokoulí je hlavní polokružnice, tj. že má rovnici  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $y < 0$ .

Naši úlohu lze formulovat tak, že máme najít takovou polohu tyče, aby její těžiště bylo co nejnižší.

Označme  $\varphi$  úhel, který svírá tyč a kladným směrem osy  $Ox$ ,  $[x_1; y_1]$  bod, ve kterém se tyč dotýká dna poháru a  $[x_2; y_2]$  bod, ve kterém se nachází druhý konec tyče.  $y$ -ová souřadnice těžiště tyče je  $y_T = \frac{y_1 + y_2}{2}$ . Protože tyč leží v přímce  $y = (x - a) \operatorname{tg} \varphi$ , splňují souřadnice bodů  $[x_1; y_1]$  a  $[x_2; y_2]$  rovnice

$$\begin{aligned} y_1 &= (x_1 - a) \operatorname{tg} \varphi, & y_2 &= (x_2 - a) \operatorname{tg} \varphi, \\ x_1^2 + y_1^2 - a^2, & & (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= \ell^2. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \ell \cos \varphi, & y_2 - y_1 &= \ell \sin \varphi, & y_1 &= (x_1 - a) \operatorname{tg} \varphi, \\ y_T &= y_1 + \frac{\ell}{2} \sin \varphi = (x_1 - a) \operatorname{tg} \varphi + \frac{\ell}{2} \sin \varphi, & x_1^2 + (x_1 - a)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi &= a^2. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic plyne, že  $x_1 = 2(\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)$ . Tedy máme najít minimum funkce  $f(\varphi) = -2a \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\ell}{2} \sin \varphi$  pro  $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Derivace této funkce  $f'(\varphi) = -2a \cos^2 \varphi + 2a \sin^2 \varphi + \frac{\ell}{2} \cos \varphi$  je rovna nule pro  $\cos \varphi = \frac{\ell + \sqrt{128a^2 + \ell^2}}{16a}$ . Protože  $0 \leq \cos \varphi \leq 1$ , je rovnovážná poloha tyče pro  $\ell \leq 4a$  dána úhlem  $\varphi = \arccos \left( \frac{\ell + \sqrt{128a^2 + \ell^2}}{16a} \right)$  s pro  $\ell > 4a$  rovnovážná poloha neexistuje.

---

CVIČENÍ 13 — Jednoduché primitivní funkce

**Příklad 1.** Najděte neurčitý integrál  $\int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx$ .

*Řešení:*

Protože  $(1-x)(1-2x)(1-3x) = 1 - 6x + 11x^2 - 6x^3$ , je

$$\begin{aligned} \int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx &= \int dx - 6 \int x dx + 11 \int x^2 dx - 6 \int x^3 dx = \\ &= x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + C, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$


---

**Příklad 2.** Najděte neurčitý integrál  $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$ .

*Řešení:*

Protože platí rovnost  $\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 = \left(-1 + \frac{1}{x}\right)^2 = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ , je

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int dx - 2 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = x - 2 \ln|x| - \frac{1}{x} + C, \quad x \neq 0.$$


---

**Příklad 3.** Najděte neurčitý integrál  $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$ .

*Řešení:*

Neboť  $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = x^{1/2} + x^{-1/2}$ , je

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C, \quad x \in (0, +\infty).$$


---

**Příklad 4.** Najděte neurčitý integrál  $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$ .

*Řešení:*

Protože  $\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} = x^{1/4} - 2x^{5/12} + x^{-1/4}$ , je

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx &= \int x^{1/4} dx - 2 \int x^{5/12} dx + \int x^{-1/4} dx = \\ &= \frac{4}{5}x^{5/4} - \frac{24}{17}x^{17/12} + \frac{4}{3}x^{3/4} + C, \quad x > 0. \end{aligned}$$

---

**Příklad 5.** Najděte neurčitý integrál  $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ .

*Řešení:*

Protože platí  $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ , je

$$\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

---

**Příklad 6.** Najděte neurčitý integrál  $\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$ .

*Řešení:*

Neboť  $\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ , je

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \\ &= \arcsin x + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C = \arcsin x + \operatorname{argsinh} x + C, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

---

**Příklad 7.** Najděte neurčitý integrál  $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$ .

*Řešení:*

Protože platí rovnost  $\frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} = \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{2^x \cdot 5^x} = 2 \cdot 5^{-x} - \frac{2^{-x}}{5}$ , je

$$\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx = 2 \int 5^{-x} dx - \frac{1}{5} \int 2^{-x} dx = -\frac{2}{\ln 5} 5^{-x} + \frac{2^{-x}}{5 \ln 2} + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

---

**Příklad 8.** Najděte neurčitý integrál  $\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx$ .

*Řešení:*

Protože lze psát

$$\sqrt{1 - \sin 2x} = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x} = \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} = |\cos x - \sin x|$$

je pro  $\cos x - \sin x > 0$

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx = \sin x + \cos x + C, \quad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( \frac{4k-1}{4} \pi, \frac{4k+1}{4} \pi \right)$$

a pro  $\cos x - \sin x < 0$  je

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx = -\sin x - \cos x + C, \quad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( \frac{4k+1}{4} \pi, \frac{4k+3}{4} \pi \right).$$

---

**Příklad 9.** Najděte neurčitý integrál  $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$ .

*Řešení:*

Neboť platí  $\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ , je

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C, \quad x \neq \frac{2k+1}{2} \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

---

**Příklad 10.** Najděte neurčitý integrál  $\int \operatorname{cotgh}^2 x \, dx$ .

*Řešení:*

Neboť platí  $\operatorname{cotgh}^2 x = \frac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{1 + \sinh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{1}{\sinh^2 x} + 1$ , je

$$\int \operatorname{cotgh}^2 x \, dx = \int \frac{dx}{\sinh^2 x} + \int dx = \operatorname{cotgh} x + x + C, \quad x \neq 0.$$

---

**Příklad 11.** Najděte neurčitý integrál  $\int \frac{dx}{(5x-2)^{5/2}}$ .

*Řešení:*

Substitucí  $5x - 2 = y$ , pro kterou je  $dx = \frac{dy}{5}$ , dostaneme

$$\int \frac{dx}{(5x-2)^{5/2}} = \frac{1}{5} \int \frac{dy}{y^{5/2}} = -\frac{2}{15y^{3/2}} + C = -\frac{2}{15(5x-2)^{3/2}} + C, \quad x > \frac{2}{5}.$$

---

**Příklad 12.** Najděte neurčitý integrál  $\int \frac{dx}{2+3x^2}$ .

*Řešení:*

Substitucí  $x = y\sqrt{\frac{2}{3}}$ , pro kterou je  $dx = \sqrt{\frac{2}{3}}dy$ , dostaneme

$$\int \frac{dx}{2+3x^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\operatorname{arctg} y}{\sqrt{6}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}}x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

---

**Příklad 13.** Najděte neurčitý integrál  $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$ .

*Řešení:*

Substitucí  $x = y\sqrt{\frac{2}{3}}$ , pro kterou je  $dx = \sqrt{\frac{2}{3}}dy$ , dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln(y + \sqrt{y^2-1}) + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln(\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2-2}) + C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{argcosh} \sqrt{\frac{3}{2}}x + C_2, \quad x > \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

---

**Příklad 14.** Najděte neurčitý integrál  $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ .

*Řešení:*

Protože platí rovnost  $\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2\cos^2 x/2}$ , je

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x/2} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C, \quad x \neq (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

---

**Příklad 15.** Najděte neurčitý integrál  $\int \ln x \, dx$ .

*Řešení:*

Integrál najdeme integrací per partes.

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C, \quad x > 0.$$

---

**Příklad 16.** Najděte neurčitý integrál  $\int x^2 e^{-2x} \, dx$ .

*Řešení:*



Integrál najdeme integrací per partes.

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-2x} dx &= -\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx = -\frac{x^2}{2} e^{-2x} - \frac{x}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = \\ &= -\frac{2x^2 + 2x + 1}{4} e^{-2x} + C, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

---

**Příklad 17.** Najděte neurčitý integrál  $\int x^3 \cosh 3x dx$ .

*Řešení:*

Integrál najdeme integrací per partes.

$$\begin{aligned}\int x^3 \cosh 3x dx &= \frac{x^3}{3} \sinh 3x - \int x^2 \sinh 3x dx = \\ &= \frac{x^3}{3} \sinh 3x - \frac{x^2}{3} \cosh 3x + \frac{2}{3} \int x \cosh 3x dx = \\ &= \frac{x^3}{3} \sinh 3x - \frac{x^2}{3} \cosh 3x + \frac{2}{9} x \sinh 3x - \frac{2}{9} \int \sinh 3x dx = \\ &= \frac{3x^3 + 2x}{9} \sinh 3x - \frac{9x^2 + 2}{27} \cosh 3x + C, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

---

**Příklad 18.** Najděte neurčitý integrál  $\int x \operatorname{arctg} x dx$ .

*Řešení:*

Použijeme integraci per partes. Po troše přemýšlení lze dostat

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int dx = \frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{arctg} x - x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

---

**Příklad 19.** Najděte neurčitý integrál  $\int \frac{x^2}{1+x} dx$ .

*Řešení:*

Protože platí  $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$ , je

$$\int \frac{x^2}{1+x} dx = \int x dx - \int dx + \int \frac{dx}{1+x} = \frac{x^2}{2} - x + \ln|1+x|, \quad x \neq -1.$$

---

**Příklad 20.** Najděte neurčitý integrál  $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$ .

*Řešení:*

Protože platí  $\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2}$  je

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} &= \int \sqrt{x+1} dx - \int \sqrt{x-1} dx = \\ &= \frac{1}{3} \left( (x+1)^{3/2} - (x-1)^{3/2} \right) + C, \quad x \in (1, +\infty). \end{aligned}$$

---

**Příklad 21.** Najděte neurčitý integrál  $\int \frac{dx}{x^2 - x + 2}$ .

*Řešení:*

Protože platí vztah  $x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ , použijeme substituce  $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2} y$ .

Z toho dostaneme  $dx = \frac{\sqrt{7}}{2} dy$ . Proto je

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 2} = \frac{2}{\sqrt{7}} \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} y = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{7}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

---

**Příklad 22.** Najděte neurčitý integrál  $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ .

*Řešení:*

Protože platí vztah  $x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ , použijeme substituci  $x - \frac{1}{2} = \frac{y}{2}$ . Z

toho dostaneme  $dx = \frac{dy}{2}$ . Integrál tedy je

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y + C = \arcsin(2x-1) + C, \quad x \in (0, 1).$$

---

CVIČENÍ 14 — Primitivní funkce

**Příklad 1.** Najděte primitivní funkci  $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ .

*Řešení:*

Substitucí  $x^2 = y$ , pro kterou je  $2x \, dx = dy$ , dostaneme

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = -\sqrt{1-y} + C = -\sqrt{1-x^2} + C, \quad x \in (-1, 1).$$


---

**Příklad 2.** Najděte primitivní funkci  $\int \frac{x \, dx}{4+x^4}$ .

*Řešení:*

Substitucí  $x^2 = y$ , pro kterou je  $2x \, dx = dy$ , dostaneme

$$\int \frac{x \, dx}{4+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{4+y^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{y}{2} + C = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$


---

**Příklad 3.** Najděte primitivní funkci  $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ .

*Řešení:*

Substitucí  $x = y^2$ , pro kterou je  $dx = 2y \, dy$ , dostaneme

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int \frac{2dy}{1+y^2} = 2 \operatorname{arctg} y + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C, \quad x > 0.$$


---

**Příklad 4.** Najděte primitivní funkci  $\int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}$ .

*Řešení:*

Substitucí  $x = \frac{1}{y}$ , pro kterou je  $dx = -\frac{dy}{y^2}$ , dostaneme

$$\int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} = - \int \sin y \, dy = \cos y + C = \cos \frac{1}{x} + C, \quad x \neq 0.$$


---

**Příklad 5.** Najděte primitivní funkci  $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ .

*Řešení:*

Protože  $\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$ , dostaneme po substituci  $e^x = y$ , pro kterou je  $e^x dx = dy$ ,

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \operatorname{arctg} y + C = \operatorname{arctg} e^x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

---

**Příklad 6.** Najděte primitivní funkci  $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$ .

*Řešení:*

Substitucí  $\ln x = y$ , pro kterou je  $\frac{dx}{x} = dy$ , získáme

$$\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \int \frac{dy}{y \ln y}.$$

Další substitucí  $\ln y = t$ , pro kterou je  $\frac{dy}{y} = dt$ , dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} &= \int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \\ &= \ln |\ln y| + C = \ln |\ln(\ln x)| + C, \quad x \in (1, e) \cup (e, +\infty). \end{aligned}$$

---

**Příklad 7.** Najděte primitivní funkci  $\int \sin^2 x dx$ .

*Řešení:*

Pomocí vztahu  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$  dostaneme

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

---

**Příklad 8.** Najděte primitivní funkci  $\int \sin 3x \cdot \sin 5x dx$ .

*Řešení:*

Pomocí vztahu  $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$  dostaneme

$$\int \sin 3x \cdot \sin 5x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 8x) dx = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 8x}{16}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

---

**Příklad 9.** Najděte primitivní funkci  $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ .

*Řešení:*

Protože platí  $d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$  a  $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ , je výhodné použít substituce  $\operatorname{tg} x = y$ . Pak je

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1+y^2) dy = y + \frac{y^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C, \quad x \neq \frac{2k+1}{2} \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

---

**Příklad 10.** Najděte primitivní funkci  $\int \arcsin x \, dx$ .

*Řešení:*

Je výhodné použít integrace per partes. Pomocí ní dostaneme

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C, \quad x \in (-1, 1).$$

---

**Příklad 11.** Najděte primitivní funkci  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx$ .

*Řešení:*

Daný integrál lze najít tak, že nejprve integrujeme per partes. Pomocí této integrace dostaneme získáme

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx = x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x} \, dx}{1+x}.$$

Druhý integrál najdeme pomocí substituce  $x = y^2$ . Pak je  $dx = 2y \, dy$  a

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} \, dx}{1+x} &= 2 \int \frac{y^2 \, dy}{1+y^2} = 2 \int dy - 2 \int \frac{dy}{1+y^2} = \\ &= 2y - 2 \operatorname{arctg} y + C = 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Tedy

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx = (x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C, \quad x > 0.$$

Ale bylo by možné najít tento integrál přímo integrací per partes. Stačilo by zvolit v první integraci místo  $x$  funkci  $x+1$ , jejíž derivace je také rovna 1. Pak bychom přímo dostali

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx = (x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = (x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C, \quad x > 0.$$

---

**Příklad 12.** Najděte primitivní funkci  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ .

*Řešení:*

Integrály tohoto typu lze s výhodou řešit pomocí substituce  $x = a \sin t$ . Pak je totiž  $dx = a \cos t dt$  a  $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$ . Pro  $x \in (-a, a)$  je tedy daný integrál

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C = \\ &= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C. \end{aligned}$$

---

**Příklad 13.** Najděte primitivní funkci  $\int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx$ .

*Řešení:*

Integrály tohoto typu lze často řešit substitucí  $x = a \sinh t$ . Protože je  $dx = a \cosh t dt$  a  $\sqrt{a^2 + x^2} = a \cosh t$ , dostaneme

$$\int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx = a^4 \int \sinh^2 t \cosh^2 t dt.$$

Tento integrál lze vyřešit pomocí vztahů  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ ,  $\cosh^2 t + \sinh^2 t = \cosh 2t$  a  $2 \sinh t \cosh t = \sinh 2t$ , které jsou podobné vztahům pro goniometrické funkce. Jiná možnost je použít definičních vztahů  $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  a  $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ . Pomocí těchto vztahů získáme

$$\int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{a^4}{16} \int (e^{2t} - e^{-2t})^2 dt = \frac{a^4}{64} (e^{4t} - e^{-4t}) - \frac{a^4}{8} t + C_1.$$

Z rovnice  $x = a \frac{e^t - e^{-t}}{2}$  dostaneme  $e^t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{a}$  a  $e^{-t} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - x}{a}$ . Po dosazení a volbě jiné integrační konstanty  $C$  dostaneme

$$\int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{8} x (a^2 + 2x^2) \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Podobně lze integrály, které obsahují výrazy  $\sqrt{x^2 - a^2}$ , mnohdy řešit substitucí  $x = a \cosh t$ .

Povšimněte si, že jsme v našem příkladě mohli zvolit substituci  $t = x + \sqrt{a^2 + x^2}$ . Substituce tohoto typu se nazývají *Eulerovy* substituce a seznámíme se s nimi později.

---

**Příklad 14.** Najděte primitivní funkci  $\int \frac{x^{11} dx}{x^8 + 3x^4 + 2}$ .

*Řešení:*

Protože jmenovatel integrovaného výrazu je funkcí pouze  $x^4$ ,  $x^{11} = x^3 \cdot x^8$  a  $(x^4)' = 4x^3$ , je výhodné použít substituce  $x^4 = y$ . Pak je  $4x^3 dx = dy$  a daný integrál je

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{11} dx}{x^8 + 3x^4 + 2} &= \frac{1}{4} \int \frac{y^2 dy}{y^2 + 3y + 2} = \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{3y + 2}{y^2 + 3y + 2}\right) dy = \\ &= \frac{y}{4} - \frac{1}{4} \int \frac{3y + 2}{y^2 + 3y + 2} dy. \end{aligned}$$

Poslední integrál lze najít pomocí tzv. rozkladu na parciální zlomky. Protože platí  $y^2 + 3y + 2 = (y + 1)(y + 2)$ , budeme se snažit najít reálná čísla  $A$  a  $B$  tak, aby identicky platila rovnost  $\frac{3y + 2}{y^2 + 3y + 2} = \frac{A}{y + 1} + \frac{B}{y + 2}$ . Z toho dostaneme, že pro všechna  $y \in \mathbb{R}$  musí platit rovnost  $3y + 2 = A(y + 2) + B(y + 1)$ . Pro  $y = -1$  získáme  $A = -1$  a pro  $y = -2$  dostaneme  $B = 4$ . Tedy

$$\int \frac{3y + 2}{y^2 + 3y + 2} dy = - \int \frac{dy}{y + 1} + 4 \int \frac{dy}{y + 2} = -\ln|y + 1| + 4 \ln|y + 2|.$$

Z tohoto vztahu tak dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{11} dx}{x^8 + 3x^4 + 2} &= \frac{y}{4} - \frac{1}{4} \ln|y + 1| + \ln|y + 2| + C = \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4} \ln|x^4 + 1| + \ln|x^4 + 2| + C, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

---

**Příklad 15.** Najděte primitivní funkci  $\int x^2 e^{\sqrt{x}} dx$ .

*Řešení:*

Na první pohled je vidět, že problémy nám bude dělat  $\sqrt{x}$  v exponentu. Proto zavedeme novou proměnnou  $y^2 = x$ . Pak je  $dx = 2y dy$  a  $\int x^2 e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int y^5 e^y dy$ . Tento integrál najdeme pomocí integrace per partes. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{\sqrt{x}} dx &= 2(y^5 - 5y^4 + 20y^3 - 60y^2 + 120y - 120)e^y + C = \\ &= 2(x^{5/2} - 5y^2 + 20y^{3/2} - 60y + 120y^{1/2} - 120)e^{\sqrt{x}} + C, \quad x > 0. \end{aligned}$$

**Příklad 16.** Najděte primitivní funkci  $\int e^{-2x} \sin 3x \, dx$ .

*Řešení:*

Integrály tohoto typu lze najít integrací per partes. Pomocí ní získáme vztah

$$\begin{aligned} \int e^{-2x} \sin 3x \, dx &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin 3x + \frac{3}{2} \int e^{-2x} \cos 3x \, dx = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin 3x - \frac{3}{4} e^{-2x} \cos 3x - \frac{9}{4} \int e^{-2x} \sin 3x \, dx. \end{aligned}$$

To je rovnice, ze které lze vypočítat hledaný integrál. Snadno z ní dostaneme

$$\int e^{-2x} \sin 3x \, dx = -\frac{e^{-2x}}{13} (2 \sin 3x + 3 \cos 3x) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

---

**Příklad 17.** Najděte primitivní funkci  $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$ .

*Řešení:*

V tomto případě lze použít substituci  $e^x = y$  (i když je asi lepší substituce  $e^{-x} = y$ ).

Pak je  $dx = \frac{dy}{y}$ . Odtud dostaneme

$$\int \frac{dx}{(1+e^x)^2} = \int \frac{dy}{y(1+y)^2}.$$

Tento integrál se najde tak, že integrovaný výraz rozložíme na zlomky. Jak ukážeme později, lze psát  $\frac{1}{y(1+y)^2} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1+y} + \frac{C}{(1+y)^2}$ , kde  $A$ ,  $B$  a  $C$  jsou konstanty.

Po vynásobení společným jmenovatelem  $y(1+y)^2$  získáme pro tyto konstanty vztah  $1 = A(1+y)^2 + By(1+y) + Cy$ , která musí platit pro všechna  $y \in \mathbb{R}$ . Pro  $y = 0$  dostaneme  $A = 1$  a pro  $y = -1$  dostaneme  $C = -1$ . Po dosazení těchto hodnot získáme vztah  $y + y^2 + B(y + y^2) = 0$ . Z této rovnice plyne  $B = -1$ . Proto platí

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+e^x)^2} &= \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{1+y} - \int \frac{dy}{(1+y)^2} = \\ &= \ln |y| - \ln |1+y| + \frac{1}{1+y} + C = \ln \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x} + C, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

---

**Příklad 18.** Najděte primitivní funkci  $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ .

*Řešení:*



Bylo by možné použít substituci  $e^x = y$ , ale protože  $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \int \frac{e^{-x/2} dx}{\sqrt{1 - e^{-x}}}$ , vede rychleji k cíli substituce  $e^{-x/2} = y$ . Pak je  $-\frac{1}{2} e^{-x/2} dx = dy$  a z integrálu dostaneme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = -2 \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = -2 \arcsin y + C = -2 \arcsin e^{-x/2} + C, \quad x > 0.$$


---

**Příklad 19.** Najděte primitivní funkci  $\int \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$ .

*Řešení:*

Tento integrál lze snadno najít metodou per partes. Pomocí ní dostaneme

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx &= \frac{2}{3} x^{3/2} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{3} \int \frac{x dx}{1+x} = \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{3} \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \ln|1+x| + C, \quad x > 0. \end{aligned}$$


---

**Příklad 20.** Najděte primitivní funkci  $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$ .

*Řešení:*

Daný integrál lze najít integrací per partes. Zvolíme-li  $u' = x$  a  $v = \ln \frac{1+x}{1-x}$ , dostaneme  $v' = \frac{2}{1-x^2}$ . Proto je výhodnější zvolit  $u = \frac{x^2-1}{2}$ . Při této volbě dostaneme pro  $x \in (-1, 1)$

$$\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{x^2-1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + \int dx = \frac{x^2-1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + x + C.$$


---

**Příklad 21.** Najděte primitivní funkci  $\int \operatorname{tgh} x dx$ .

*Řešení:*

Protože je  $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$  a  $(\cosh x)' = \sinh x$ , je

$$\int \operatorname{tgh} x dx = \int \frac{d(\cosh x)}{\cosh x} = \ln(\cosh x) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

---

**Příklad 22.** Odvodte vzorce pro snížení řádu v integrálech

$$\text{a) } I_n = \int \sin^n x \, dx; \quad \text{b) } K_n = \int \cos^n x \, dx \quad (n \geq 2)$$

a s jejich pomocí určete  $\int \sin^6 x \, dx$  a  $\int \cos^8 x \, dx$ .

*Řešení:*

Oba tyto integrály lze počítat integrací per partes. Jestliže napíšeme  $\sin^n x = \sin x \cdot \sin^{n-1} x$ , získáme touto metodou

$$\begin{aligned} I_n &= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \cos^2 x \cdot \sin^{n-2} x \, dx = \\ &= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^{n-2} x \, dx = \\ &= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned}$$

Jestliže z této rovnosti vypočítáme  $I_n$ , dostaneme

$$I_n = -\frac{1}{n} \cos x \cdot \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Zcela analogicky lze získat vztah

$$K_n = \frac{1}{n} \sin x \cdot \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} K_{n-2}.$$

Pomocí těchto vztahů snadno najdeme pro  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int \sin^6 x \, dx &= -\frac{1}{6} \cos x \cdot \sin^5 x + \frac{5}{6} \int \sin^4 x \, dx = \\ &= -\frac{1}{6} \cos x \cdot \sin^5 x - \frac{5}{24} \cos x \cdot \sin^3 x + \frac{5}{8} \int \sin^2 x \, dx = \\ &= -\frac{1}{6} \cos x \cdot \sin^5 x - \frac{5}{24} \cos x \cdot \sin^3 x - \frac{5}{16} \cos x \cdot \sin x + \frac{5}{16} x + C. \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \int \cos^8 x \, dx &= K_8 = \frac{1}{8} \sin x \cdot \cos^7 x + \frac{7}{8} K_6 = \\ &= \frac{1}{8} \sin x \cdot \cos^7 x + \frac{7}{48} \sin x \cdot \cos^5 x + \frac{35}{48} K_4 = \\ &= \frac{1}{8} \sin x \cdot \cos^7 x + \frac{7}{48} \sin x \cdot \cos^5 x + \frac{35}{192} \sin x \cdot \cos^3 x + \frac{35}{64} K_2 = \\ &= \frac{1}{8} \sin x \cdot \cos^7 x + \frac{7}{48} \sin x \cdot \cos^5 x + \frac{35}{192} \sin x \cdot \cos^3 x + \\ &\quad + \frac{35}{128} \sin x \cdot \cos x + \frac{35}{128} x + C. \end{aligned}$$

CVIČENÍ 15 — Integrace racionálních funkcí

**Příklad 1.** Najděte integrál  $\int \frac{x \, dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ .

*Řešení:*

Integrand rozložíme na parciální zlomky. Z rovnosti

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

plyne vztah  $x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ . pro  $x = -1$  dostaneme  $A = -\frac{1}{2}$ , pro  $x = -2$  dostaneme  $B = 2$  a pro  $x = -3$  získáme  $C = -\frac{3}{2}$ . Tedy

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + 2 \int \frac{dx}{x+2} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x+3} = \\ &= -\frac{1}{2} \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| - \frac{3}{2} \ln|x+3| + C, \quad x \neq -1, -2, -3. \end{aligned}$$


---

**Příklad 2.** Najděte integrál  $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} \, dx$ .

*Řešení:*

Protože je  $\frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}$  a  $x^3 - 5x^2 + 6x = x(x-2)(x-3)$ , stačí najít reálné konstanty  $A$ ,  $B$  a  $C$  tak, aby

$$\frac{5x^2 - 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Z této rovnice plyne vztah  $5x^2 - 6x + 1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)$ . Pro  $x = 0$  dostaneme  $A = \frac{1}{6}$ , pro  $x = 2$  je  $B = -\frac{9}{2}$  a pro  $x = 3$  získáme  $C = \frac{28}{3}$ . Tedy

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} \, dx = x + \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x-2| + \frac{28}{3} \ln|x-3| + C, \quad x \neq 0, 2, 3.$$


---

**Příklad 3.** Najděte integrál  $\int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} \, dx$ .

*Řešení:*

Integrand rozložíme na parciální zlomky. Z rovnosti  $\frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x - 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$  plyne vztah  $x^2 + 1 = A(x + 1)^2 + B(x - 1)(x + 1) + C(x - 1)$ . Pro  $x = 1$  dostaneme  $A = \frac{1}{2}$  a pro  $x = -1$  máme  $C = -1$ . Srovnáním koeficientů u  $x^2$  dostaneme  $A + B = 1$ , tj.  $B = \frac{1}{2}$ . tedy

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x - 1)} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x - 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x + 1} - \int \frac{dx}{(x + 1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + \frac{1}{x + 1} + C, \quad x \neq \pm 1. \end{aligned}$$

**Příklad 4.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + 1)}$ .

*Řešení:*

Integrand rozložíme na parciální zlomky. Tedy máme najít reálné konstanty  $A$ ,  $B$  a  $C$ , pro které platí  $\frac{1}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$ . Z této rovnice plyne, že pro každé  $x \in \mathbb{R}$  musí platit rovnost  $1 = A(x^2 + 1) + Bx(x + 1) + C(x + 1)$ . Pro  $x = -1$  dostaneme  $A = \frac{1}{2}$ . Srovnáním koeficientů u  $x^2$  a  $x^0$  dostaneme vztahy  $A + B = 0$  a  $A + C = 1$ . Z nich plyne, že  $B = -\frac{1}{2}$  a  $C = \frac{1}{2}$ . Tedy

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + 1)} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{x dx}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x + 1| - \frac{1}{4} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C, \quad x \neq -1. \end{aligned}$$

**Příklad 5.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}$ .

*Řešení:*

Protože  $\frac{1}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)} = \frac{1}{(x - 2)^2((x - 2)^2 + 1)}$ , je výhodné zavést novou proměnnou  $y = x - 2$ . Pak dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)} &= \int \frac{dy}{y^2(y^2 + 1)} = \int \frac{dy}{y^2} - \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \\ &= -\frac{1}{y} - \operatorname{arctg} y + C = -\frac{1}{x - 2} - \operatorname{arctg}(x - 2) + C, \quad X \neq 2. \end{aligned}$$

---

**Příklad 6.** Najděte integrál  $\int \frac{x \, dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$ .

*Řešení:*

Integrand rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Z této rovnice plyne pro všechna  $x \in \mathbb{C}$  vztah  $x = A(x-1)(x^2+2x+2) + B(x^2+2x+2) + Cx(x-1)^2 + D(x-1)^2$ . Pro  $x = 1$  dostaneme  $B = \frac{1}{5}$ . Jestliže derivujeme tuto rovnici v bodě  $x = 1$  dostaneme  $1 = 5A + 4B$ , tj.  $A = \frac{1}{25}$ . Srovnáním členů u  $x^3$  získáme vztah  $A + C = 0$ , tj.  $C = -\frac{1}{25}$ . A konečně pro bod  $x = 0$  dostáváme rovnost  $-2A + 2B + D = 0$ , tj.  $D = -\frac{8}{25}$ . Tedy pro  $x \neq 1$  je

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} &= \frac{1}{25} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{25} \int \frac{(x+8) \, dx}{x^2+2x+2} = \\ &= \frac{1}{25} \ln|x-1| - \frac{1}{5(x-1)} - \frac{1}{50} \int \frac{(2x+2) \, dx}{x^2+2x+2} - \frac{7}{25} \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \\ &= \frac{1}{25} \ln|x-1| - \frac{1}{5(x-1)} - \frac{1}{50} \ln(x^2+2x+2) - \frac{7}{25} \operatorname{arctg}(x+1) + C. \end{aligned}$$

---

**Příklad 7.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$ .

*Řešení:*

Integrand rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{1+x+x^2}.$$

Tedy konstanty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$  splňují pro všechna  $x \in \mathbb{C}$  rovnici

$$1 = A(1+x)(1+x+x^2) + Bx(1+x+x^2) + Cx^2(1+x) + Dx(1+x).$$

Pro  $x = 0$  dostaneme  $A = 1$  a pro  $x = -1$  získáme  $B = -1$ . Srovnáním členů u  $x^3$  a  $x^2$  dostaneme  $A + B + C = 0$  a  $2A + B + C + D = 0$ . Z těchto rovnic plyne  $C = 0$  a  $D = -1$ . Tedy

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)} &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4} = \\ &= \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C, \quad x \neq 0, -1. \end{aligned}$$

---

**Příklad 8.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$ .

*Řešení:*

Protože je  $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ , budeme hledat rozklad na parciální zlomky ve tvaru  $\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$ . Z tohoto vztahu dostaneme  $1 = A(x^2 - x + 1) + Bx(x + 1) + C(x + 1)$ . Odtud pro  $x = -1$  máme  $A = \frac{1}{3}$ . Pro  $x = 0$  dostaneme  $A + C = 1$ , tj.  $C = \frac{2}{3}$ . Srovnáním členů u  $x^2$  dostaneme  $A + B = 0$ , neboli  $B = -\frac{1}{3}$ . Tedy

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 + 1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x + 1} - \frac{1}{3} \int \frac{(x - 2) dx}{x^2 - x + 1} = \\ &= \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \int \frac{(2x - 1) dx}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x - 1/2)^2 + 3/4} = \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x + 1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C, \quad x \neq -1. \end{aligned}$$

---

**Příklad 9.** Najděte integrál  $\int \frac{x dx}{x^3 - 1}$ .

*Řešení:*

Protože je  $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ , budeme hledat rozklad na parciální zlomky ve tvaru  $\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$ . Z tohoto vztahu dostaneme  $x = A(x^2 + x + 1) + Bx(x - 1) + C(x - 1)$ . Odtud pro  $x = 1$  máme  $A = \frac{1}{3}$ . Pro  $x = 0$  dostaneme  $A - C = 0$ , tj.  $C = \frac{1}{3}$ . Srovnáním členů u  $x^2$  dostaneme  $A + B = 0$ , neboli  $B = -\frac{1}{3}$ . Tedy

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{x^3 - 1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{3} \int \frac{(x - 1) dx}{x^2 + x + 1} = \\ &= \frac{1}{3} \ln|x - 1| - \frac{1}{6} \int \frac{(2x + 1) dx}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x + 1/2)^2 + 3/4} = \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x - 1)^2}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C, \quad x \neq 1. \end{aligned}$$

---

**Příklad 10.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$ .

*Řešení:*

Integrand rozložíme na parciální zlomky. Protože platí

$$\frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4} \frac{1}{1-x},$$

je

$$\int \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C, \quad x \neq \pm 1.$$

---

**Příklad 11.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}$ .

*Řešení:*

Protože je  $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ , budeme hledat rozklad na parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1}.$$

Z toho dostaneme  $1 = Ax(x^2 - x + 1) + B(x^2 - x + 1) + Cx(x^2 + x + 1) + D(x^2 + x + 1)$ . Srovnáním členů u stejných mocnin dostaneme

$$A + C = 0, \quad -A + B + C + D = 0, \quad A - B + C + D = 0, \quad B + D = 1.$$

Řešení těchto rovnic je  $A = B = D = \frac{1}{2}$ ,  $C = -\frac{1}{2}$ . Tedy

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} &= \frac{1}{2} \int \frac{(x+1) dx}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{(x-1) dx}{x^2 - x + 1} = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{(2x+1) dx}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{4} \int \frac{(2x-1) dx}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

---

**Příklad 12.** Najděte integrál  $\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^{100}}$ .

*Řešení:*

Rozložíme funkci  $f(x) = x^3$  do Taylorovy řady se středem v bodě  $x = 1$ . Protože je  $f(1) = 1$ ,  $f'(1) = 3$ ,  $f''(1) = 6$ ,  $f'''(1) = 6$  a  $f^{(n)}(1) = 0$  pro  $n \geq 4$ , dostaneme  $x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$ . Proto je pro  $x \neq 1$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 dx}{(x-1)^{100}} &= \int \frac{dx}{(x-1)^{100}} + 3 \int \frac{dx}{(x-1)^{99}} + 3 \int \frac{dx}{(x-1)^{98}} + \int \frac{dx}{(x-1)^{97}} = \\ &= -\frac{1}{99} \frac{1}{(x-1)^{99}} - \frac{3}{98} \frac{1}{(x-1)^{98}} - \frac{3}{97} \frac{1}{(x-1)^{97}} - \frac{1}{96} \frac{1}{(x-1)^{96}} + C. \end{aligned}$$

---

**Příklad 13.** Najděte integrál  $\int \frac{x \, dx}{x^8 - 1}$ .

*Řešení:*

Substitucí  $x^2 = y$ , pro kterou je  $2x \, dx = dy$  dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{x^8 - 1} &= \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^4 - 1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} y + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{y+1}{y-1} \right| + C = \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^2 + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x^2+1}{x^2-1} \right| + C, \quad x \neq \pm 1. \end{aligned}$$

---

**Příklad 14.** Najděte integrál  $\int \frac{x^3 \, dx}{x^8 + 3}$ .

*Řešení:*

Substitucí  $x^4 = y$ , pro kterou je  $4x^3 \, dx = dy$  dostaneme

$$\int \frac{x^3 \, dx}{x^8 + 3} = \frac{1}{4} \int \frac{dy}{y^2 + 3} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^4}{\sqrt{3}} + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

---

**Příklad 15.** Najděte integrál  $\int \frac{(x^4 - 3) \, dx}{x(x^8 + 3x^4 + 2)}$ .

*Řešení:*

Tento integrál by bylo možné řešit přímo rozkladem na parciální zlomky. Ale tento rozklad je poměrně složitý. Jestliže si ale uvědomíme, že

$$\int \frac{(x^4 - 3) \, dx}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} = \int \frac{x^3(x^4 - 3)}{x^4(x^8 + 3x^4 + 2)},$$

lze snadno nahlédnout, že je výhodná substituce  $x^4 = y$ . Pak je  $4x^3 \, dx = dy$  a

$$\int \frac{(x^4 - 3) \, dx}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} = \frac{1}{4} \int \frac{(y - 3) \, dy}{y(y^2 + 3y + 2)}.$$

Rozklad této funkce na parciální zlomky je podstatně jednodušší. Snadno se ukáže, že platí  $\frac{y-3}{y(y^2+3y+2)} = -\frac{3}{2y} + \frac{4}{y+1} + \frac{5}{2(y+2)}$ . Proto je

$$\int \frac{(x^4 - 3) \, dx}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} = -\frac{3}{8} \ln |y| + \ln |y+1| + \frac{5}{8} \ln |y+2| + C =$$



$$= -\frac{3}{2} \ln|x| + \ln|x^4 + 1| + \frac{5}{8} \ln|x^4 + 2| + C, \quad x \neq 0.$$

Jiná a možná ještě jednodušší možnost je přepsat

$$\frac{x^4 - 3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} = \frac{1 - 3x^{-4}}{x^{-5}(1 + 3x^{-4} + 2x^{-8})}$$

a použít substituce  $x^{-4} = y$ . Tento postup ukážeme v následujícím příkladě.

---

**Příklad 16.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{x(x^{10} + 2)}$ .

*Řešení:*

Protože lze psát  $\frac{1}{x(x^{10} + 2)} = \frac{1}{x^6(x^5 + 2x^{-5})}$ , je výhodné použít substituce  $x^{-5} = y$ . Pak je  $-5 \frac{dx}{x^6} = dy$  a

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x^{10} + 2)} &= -\frac{1}{5} \int \frac{y dy}{1 + 2y^2} = \\ &= -\frac{1}{20} \ln(1 + 2y^2) + C = -\frac{1}{20} \ln \frac{x^{10} + 2}{x^{10}} + C, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$


---

**Příklad 17.** Odvoďte rekurentní vzorec pro výpočet integrálu

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}, \quad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac \neq 0.$$

Pomocí tohoto vztahu určete  $I_3 = \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^3}$ .

*Řešení:*

Rekurentní vzorec lze odvodit integrací per partes. Pomocí ní dostaneme

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(ax^2 + bx + c)^n} + n \int \frac{x(2ax + b) dx}{(ax^2 + bx + c)^{n+1}} = \\ &= \frac{x}{(ax^2 + bx + c)^n} + 2n \int \frac{(ax^2 + bx + c)}{(ax^2 + bx + c)^{n+1}} dx - n \int \frac{(bx + 2c) dx}{(ax^2 + bx + c)^{n+1}} = \\ &= \frac{x}{(ax^2 + bx + c)^n} + 2nI_n - \frac{nb}{2a} \int \frac{(2ax + b) dx}{(ax^2 + bx + c)^{n+1}} + \frac{n}{2a} (b^2 - 4ac)I_{n+1} = \\ &= \frac{x}{(ax^2 + bx + c)^n} + \frac{b}{2a} \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n} + 2nI_n + \frac{n}{2a} (b^2 - 4ac)I_{n+1}. \end{aligned}$$

Tedy

$$I_{n+1} = \frac{2ax + b}{n(4ac - b^2)} \cdot \frac{x}{(ax^2 + bx + c)^n} + \frac{2a}{4ac - b^2} \cdot \frac{2n - 1}{n} I_n.$$

V našem případě je  $a = b = c = 1$  a  $4ac - b^2 = 3$ . Proto je

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{2x + 1}{6(x^2 + x + 1)^2} + I_2 = \frac{2x + 1}{6(x^2 + x + 1)^2} + \frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{2}{3} I_1 = \\ &= \frac{2x + 1}{6(x^2 + x + 1)^2} + \frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C, \end{aligned}$$

Protože je

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}.$$


---

**Příklad 18.** Pro výpočet integrálu  $I = \int \frac{dx}{(x + a)^n(x + b)^m}$ , kde  $n$  a  $m$  jsou přirozená čísla, použijte substituci  $t = \frac{x + a}{x + b}$ .

Pomocí této substituce určete  $\int \frac{dx}{(x - 2)^2(x + 3)^3}$ .

*Řešení:*

Substituce  $t = \frac{x + a}{x + b}$  dává  $x = \frac{bt - a}{1 - t}$ . Tedy  $dx = \frac{b - a}{(t - 1)^2} dt$  Protože  $x + a = \frac{t(b - a)}{1 - t}$  a  $x + b = \frac{b - a}{1 - t}$ , dostaneme po dosazení

$$I = \int \frac{dx}{(x + a)^n(x + b)^m} = \frac{1}{(b - a)^{n+m-1}} \int \frac{(1 - t)^{n+m-2}}{t^n} dt.$$

V našem případě je  $a = -2$ ,  $b = 3$ ,  $n = 2$  a  $m = 3$ . Tedy

$$\int \frac{dx}{(x - 2)^2(x + 3)^3} = \frac{1}{625} \int \frac{(1 - t)^3}{t^2} dt = \frac{1}{625} \left( -\frac{1}{t} - 3 \ln |t| + 3t - \frac{t^2}{2} \right) + C,$$

kde  $t = \frac{x - 2}{x + 3}$ .

---

CVIČENÍ 16 — Integrály, které lze převést na racionální funkce

**Příklad 1.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ .

*Řešení:*

Po substituci  $x = y^2$  dostaneme  $dx = 2y dy$  a

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = 2 \int \frac{y dy}{1 + y} = 2(y - \ln(1 + y)) + C = 2(\sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})) + C, \quad x > 0.$$


---

**Příklad 2.** Najděte integrál  $\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx$ .

*Řešení:*

Protože nejmenší společný násobek čísel 2 a 3 je 6, použijeme substituci  $x + 1 = y^6$ . Pak je  $dx = 6y^5 dy$  a

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx &= 6 \int \frac{y^5(1 - y^3)}{1 + y^2} dy = \\ &= 6 \int \left( -y^6 + y^4 + y^3 - y^2 - y + 1 + \frac{y - 1}{1 + y^2} \right) dy = \\ &= -\frac{6}{7} y^7 + \frac{6}{5} y^5 + \frac{3}{2} y^4 - 2y^3 - 3y^2 + 6y + 3 \ln(1 + y^2) - 6 \operatorname{arctg} y + C, \end{aligned}$$

kde  $y = \sqrt[6]{x+1}$  a  $x > -1$ .

---

**Příklad 3.** Najděte integrál  $\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx$ .

*Řešení:*

Tento integrál lze převést na integrál z racionální funkce substitucí  $\frac{x-1}{x+1} = y^2$ . Ale je asi jednodušší rozšířit zlomek výrazem  $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$ . Pak dostaneme

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx = \int (x - \sqrt{x^2 - 1}) dx.$$

Druhý integrál najdeme substitucí  $x = \cosh y$ . Pak je  $dx = \sinh y dy$  a

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 1} dx &= \int \sinh^2 y dy = \frac{1}{2} \int (\cosh 2y - 1) dy = \\ &= \frac{1}{2} (\cosh y \sinh y - y) = \frac{1}{2} (x \sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{argcosh} x). \end{aligned}$$

Tedy

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx = \frac{1}{2}(x^2 - x\sqrt{x^2-1} + \operatorname{argcosh} x) + C, \quad x > 1.$$

---

**Příklad 4.** Najděte integrál  $\int \frac{e^{2x} dx}{1+e^x}$ .

*Řešení:*

V tomto integrálu zavedeme substituci  $e^x = y$ . Pak je  $dx = \frac{dy}{y}$  a dostaneme integrál

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x} dx}{1+e^x} &= \int \frac{y dy}{1+y} = \int dy - \int \frac{dy}{1+y} = \\ &= y - \ln(1+y) + C = e^x - \ln(1+e^x) + C, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

---

**Příklad 5.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}$ .

*Řešení:*

Po substituci  $e^x = y$  dostaneme  $dx = \frac{dy}{y}$  a integrál je

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2} &= \int \frac{dy}{y(y^2 + y - 2)} = -\frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} + \frac{1}{3} \int \frac{dy}{y-1} + \frac{1}{6} \int \frac{dy}{y+2} = \\ &= -\frac{1}{2} \ln y + \frac{1}{3} \ln |y-1| + \frac{1}{6} \ln(y+2) + C = \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \ln |e^x - 1| + \frac{1}{6} \ln(e^x + 2) + C, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

---

**Příklad 6.** Najděte integrál  $\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx$ .

*Řešení:*

Nejprve bych zavedl novou proměnnou  $y = e^x$ . Pak je  $dx = \frac{dy}{y}$  a z integrálu dostaneme

$$\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx = \int \frac{1}{y} \cdot \sqrt{\frac{y-1}{y+1}} dy.$$

Tento integrál převedeme na integrál z racionální lomené funkce substitucí  $\frac{y-1}{y+1} =$

$t^2$ . Pak je  $y = \frac{1+t^2}{1-t^2}$  a  $dy = \frac{4t dt}{(1-t^2)^2}$ . Po dosazení dostaneme

$$\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx = \int \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot t \cdot \frac{4t dt}{(1-t^2)^2} = \int \frac{4t^2 dt}{(1+t^2)(1-t^2)} =$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \int \frac{dt}{1+t^2} + \int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{dt}{1-t} = -2 \operatorname{arctg} t + \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \\
&= -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} + \ln \left( e^x + \sqrt{e^{2x}-1} \right) + C, \quad x > e.
\end{aligned}$$


---

**Příklad 7.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$ .

*Řešení:*

Protože platí  $R(\cos x, \sin x) = \frac{1}{(2+\cos x)\sin x} = -R(\cos x, -\sin x)$ , zavedeme novou proměnnou  $y = \cos x$ . Pak je  $-\sin x dx = dy$  a z integrálu dostaneme

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} &= - \int \frac{dy}{(2+y)(1-y^2)} = \\
&= \frac{1}{3} \int \frac{dy}{2+y} - \frac{1}{2} \int \frac{dy}{1+y} - \frac{1}{6} \int \frac{dy}{1-y} = \\
&= \frac{1}{3} \ln(2+y) - \frac{1}{2} \ln(1+y) + \frac{1}{6} \ln(1-y) + C = \\
&= \frac{1}{6} \ln \frac{(2+\cos x)^2(1-\cos x)}{(1+\cos x)^3} + C, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$


---

**Příklad 8.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{1+3\cos x}$ .

*Řešení:*

Tento integrál převedeme na integrál z racionální funkce substitucí  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ . Pro jednoduchost složíme tuto substituci pomocí substituce  $x = 2y$  a substituce  $\operatorname{tg} y = t$ . Po první substituci dostaneme

$$\int \frac{dx}{1+3\cos x} = \int \frac{2 dy}{1+3\cos^2 y - 3\sin^2 y} = \int \frac{dy}{2\cos^2 y - \sin^2 y}.$$

Protože pro substituci  $\operatorname{tg} y = t$  je  $dy = \frac{dt}{1+t^2}$  a  $\cos^2 y = \frac{1}{1+t^2}$ ,  $\sin^2 y = \frac{t^2}{1+t^2}$  dostaneme

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+3\cos x} &= \int \frac{dt}{2-t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left( \frac{1}{t+\sqrt{2}} - \frac{1}{t-\sqrt{2}} \right) dt = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(x/2) + \sqrt{2}}{\operatorname{tg}(x/2) - \sqrt{2}} \right| + C.
\end{aligned}$$


---

**Příklad 9.** Najděte integrál  $\int \frac{\sin^2 x \, dx}{1 + \sin^2 x}$ .

*Řešení:*

Protože integrovaná funkce má vlastnost

$$R(\cos x, \sin x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} = R(-\cos x, -\sin x),$$

použijeme substituci  $\operatorname{tg} x = t$ . Protože  $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$  a  $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ , dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x \, dx}{1 + \sin^2 x} &= \int \frac{t^2 \, dt}{(1+t^2)(1+2t^2)} = \int \left( \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+2t^2} \right) dt = \\ &= \operatorname{arctg} t - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} t\sqrt{2} + C = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

---

**Příklad 10.** Najděte integrál  $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx$ .

*Řešení:*

Protože integrand nemá žádnou speciální symetrii, převedeme jej na integrál z racionální funkce substitucí  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ . Pak je  $dx = \frac{2 \, dt}{1+t^2}$ ,  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$  a  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ . Z daného integrálu po úpravách dostaneme

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} = \int \frac{4t(1-t^2) \, dt}{(1+t^2)^2(1+2t-t^2)}.$$

Ale tento integrál je na výpočet poměrně pracný. Proto zvolíme jinou metodu výpočtu. Snadno se přesvědčíme, že platí

$$\frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2\sqrt{2} \left( \frac{\sin x}{\sqrt{2}} + \frac{\cos x}{\sqrt{2}} \right)} = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{2} \cos(x - \pi/4)}.$$

Proto je výhodné použít nejprve substituci  $x - \frac{\pi}{4} = y$ . Pak dostaneme

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\cos 2y}{\cos y} \, dy = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\cos y} \, dy.$$

V tomto integrálu můžeme zřejmě použít substituci  $\sin y = t$  a dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{1 - 2t^2}{1 - t^2} dt = \\ &= \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + C = \\ &= \frac{\sin(x - \pi/4)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1 - \sin(x - \pi/4)}{1 + \sin(x - \pi/4)} + C = \\ &= \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} - \sin x + \cos x}{\sqrt{2} + \sin x - \cos x} + C. \end{aligned}$$


---

**Příklad 11.** Najděte integrál  $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ .

*Řešení:*

Protože je  $R(\cos x, \sin x) = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = R(-\cos x, -\sin x)$ , lze převést tento

integrál na integrál z racionální funkce substitucí  $\operatorname{tg} x = t$ . Protože  $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ , dostaneme

$$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int \frac{t^2 - 1}{t^4 + 1} dt.$$

Ale výpočet tohoto integrálu je poměrně složitý. Proto integrovaný výraz upravíme. Platí

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{-\cos 2x}{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{2 \cos 2x}{\sin^2 2x - 2}.$$

V tomto integrálu je výhodná substituce  $\sin 2x = t$ . Pak je  $2 \cos 2x dx = dt$  a integrál je

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx &= \int \frac{dt}{t^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left( \frac{1}{t - \sqrt{2}} - \frac{1}{t + \sqrt{2}} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} - t}{\sqrt{2} + t} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} - \sin 2x}{\sqrt{2} + \sin 2x} \right| + C, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$


---

**Příklad 12.** Najděte integrál  $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$ .

*Řešení:*

Protože platí vztah  $R(\cos x, \sin x) = \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} = -R(-\cos x, \sin x)$ , lze převést tento integrál na integrál z racionální funkce substitucí  $\sin x = t$ . Po této substituci z integrálu dostaneme

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx = \int \frac{t dt}{1 + t^4}.$$

Snadno lze vidět, že integrál lze snadno řešit substitucí  $t^2 = y$ . Pak je  $2t dt = dy$  a platí

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\sin^2 x) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Příklad 13.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$ .

*Řešení:*

V tomto integrálu je výhodné použít Eulerovu substituci  $x + \sqrt{x^2 + x + 1} = y$ . Z tohoto vztahu plyne, že  $x = \frac{y^2 - 1}{2y + 1}$ . Po derivaci dostaneme  $dx = \frac{2(y^2 + y + 1)}{(2y + 1)^2} dy$  a integrál přejde na

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} &= \int \frac{2(y^2 + y + 1)}{y(2y + 1)^2} dy = \int \left( \frac{2}{y} - \frac{3}{2y + 1} - \frac{3}{(2y + 1)^2} \right) dy = \\ &= 2 \ln |y| - \frac{3}{2} \ln |2y + 1| + \frac{3}{2(2y + 1)} + C = 2 \ln(x + \sqrt{x^2 + x + 1}) - \\ &\quad - \frac{3}{2} \ln(2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}) + \frac{3}{2(2x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1})} + C. \end{aligned}$$

**Příklad 14.** Najděte integrál  $\int x\sqrt{x^2 - 2x + 2} dx$ .

*Řešení:*

Integrál by bylo možné řešit Eulerovou substitucí. Ale tato metoda je na výpočet dost pracná. Proto ukážeme jinou možnost řešení tohoto integrálu. Když napíšeme  $\sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{(x - 1)^2 + 1}$ , je vidět, že je vhodná substituce  $x - 1 = \sinh t$ . Pak dostaneme  $dx = \cosh t dt$  a

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x^2 - 2x + 2} dx &= \int (\sinh t + 1) \cosh^2 t dt = \\ &= \int \sinh t \cosh^2 t dt + \frac{1}{2} \int (\cosh 2t + 1) dt = \\ &= \frac{1}{3} \cosh^3 t + \frac{1}{2} (\sinh t \cosh t + t) + C = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} (1 + \sinh^2 t)^{3/2} + \frac{1}{2} \sinh t \sqrt{1 + \sinh^2 t} + \frac{t}{2} + C = \\
&= \frac{1}{3} (x^2 - 2x + 2)^{3/2} + \frac{1}{2} (x - 1) \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{2} \operatorname{argsinh}(x - 1) + C.
\end{aligned}$$


---

**Příklad 15.** Najděte integrál  $\int \sqrt{x^3 + x^4} dx$ .

*Řešení:*

Eulerova substituce opět vede na integraci racionální funkce, ale vzniklý integrál je jako většinou poměrně složitý. Proto použijeme opět jiné substituce. Když napíšeme

$$\sqrt{x^3 + x^4} = x\sqrt{x + x^2} = x\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{(2x + 1)^2 - 1}.$$

Proto je vhodné použít substituci  $2x + 1 = \cosh t$ . Pak je  $dx = \frac{1}{2} \sinh t dt$  a z integrálu dostaneme

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^3 + x^4} dx &= \frac{1}{8} \int (\cosh t - 1) \sinh^2 t dt = \\
&= \frac{1}{8} \int \cosh t \sinh^2 t dt - \frac{1}{16} \int (\cosh 2t - 1) dt = \\
&= \frac{1}{24} \sinh^3 t - \frac{1}{16} (\sinh t \cosh t - t) + C = \\
&= \frac{1}{24} ((2x + 1)^2 - 1)^{3/2} - \frac{1}{16} (2x + 1) \sqrt{(2x + 1)^2 - 1} - \frac{1}{16} \operatorname{argcosh}(2x + 1) + C = \\
&= \frac{1}{3} (x^2 + x)^{3/2} - \frac{1}{8} (2x + 1) \sqrt{x^2 + x} - \frac{1}{16} \operatorname{argcosh}(2x + 1) + C.
\end{aligned}$$


---

**Příklad 16.** Najděte integrál  $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ .

*Řešení:*

Tento integrál lze vyřešit substitucí  $1 - x^2 = y$ . Pak je  $x^2 = 1 - y$  a  $x dx = -\frac{dy}{2}$ . Po dosazení do integrálu dostaneme

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1 - x^2}} &= -\frac{1}{2} \int \frac{(1 - y)^2}{\sqrt{y}} dy = -\frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{\sqrt{y}} - 2\sqrt{y} + y^{3/2} \right) dy = \\
&= -\sqrt{y} + \frac{2}{3} y^{3/2} - \frac{1}{5} y^{5/2} + C = -\frac{8 + 4x^2 + 3x^4}{15} \sqrt{1 - x^2} + C.
\end{aligned}$$


---

CVIČENÍ 17 — Výpočet určitých integrálů

**Příklad 1.** Najděte integrál  $\int_0^\pi x \sin x \, dx$ .

*Řešení:*

Tento integrál najdeme integrací per partes. Platí

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx = [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \, dx = \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi.$$


---

**Příklad 2.** Najděte integrál  $\int_{e^{-1}}^e |\ln x| \, dx$ .

*Řešení:*

Protože pro  $x \in (e^{-1}, 1)$  je  $\ln x < 0$  a pro  $x \in (1, e)$  je  $\ln x > 0$ , rozdělíme integrál na dva integrály. Oba pak najdeme integrací per partes.

$$\begin{aligned} \int_{e^{-1}}^e |\ln x| \, dx &= -\int_{e^{-1}}^1 \ln x \, dx + \int_1^e \ln x \, dx = -[x \ln x - x]_{e^{-1}}^1 + [x \ln x - x]_1^e = \\ &= -(-1 + e^{-1} + e^{-1}) + (e - e + 1) = 2(1 - e^{-1}). \end{aligned}$$


---

**Příklad 3.** Najděte integrál  $\int_0^1 \arccos x \, dx$ .

*Řešení:*

Daný integrál najdeme nejsnáze integrací per partes. Platí

$$\int_0^1 \arccos x \, dx = [x \arccos x]_0^1 + \int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -[\sqrt{1-x^2}]_0^1 = 1.$$


---

**Příklad 4.** Najděte integrál  $\int_{-1}^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{5-4x}}$ .

*Řešení:*

Hledaný integrál najdeme nejsnáze pomocí substituce  $5 - 4x = y^2$ . Pak je  $dx = -\frac{y}{2} dy$ ,  $x = \frac{5-y^2}{4}$ , bod  $x = -1$  přejde na bod  $y = 3$  a bod  $x = 1$  na bod  $y = 1$ . Protože jsou splněny předpoklady věty o substituci, platí

$$\int_{-1}^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{5-4x}} = \int_3^1 \frac{5-y^2}{4y} \left(-\frac{y}{2}\right) dy = \frac{1}{8} \int_1^3 (5-y^2) dy = \frac{1}{8} \left[5y - \frac{y^3}{3}\right]_1^3 = \frac{1}{6}.$$


---

**Příklad 5.** Najděte integrál  $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$ .

*Řešení:*

Daný integrál lze najít substitucí  $x = a \sin t$ . Pak je  $dx = a \cos t dt$  a obraz intervalu  $(0, a)$  je  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Protože jsou splněny předpoklady věty o substituci, platí

$$\begin{aligned} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \\ &= \frac{a^4}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \frac{a^4}{8} \left[ t - \frac{\sin 4t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{a^4 \pi}{16}. \end{aligned}$$

**Příklad 6.** Najděte integrál  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ .

*Řešení:*

V integrálu nejprve použijeme substituci  $e^x = y$ . Pak je  $dx = \frac{dy}{y}$  a interval  $(0, \ln 2)$  se zobrazí prostě na interval  $(1, 2)$ . Protože jsou splněny předpoklady věty o substituci, platí

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{y-1}}{y} dy.$$

Tento integrál vyřešíme opět substitucí. Položíme  $y = t^2 + 1$ . Pak je  $dy = 2t dt$  a interval  $(1, 2)$  se prostě zobrazí na interval  $(0, 1)$ . Protože jsou splněny předpoklady věty o substituci, platí

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt = 2 \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = 2 \left[ t - \arctg t \right]_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

**Příklad 7.** Najděte integrál  $\int_0^1 x(2 - x^2)^{12} dx$ .

*Řešení:*

Daný integrál lze najít substitucí  $x^2 = y$ . Pak je  $2x dx = dy$  a interval  $(0, 1)$  se prostě zobrazí na interval  $(0, 1)$ . Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, platí

$$\int_0^1 x(2 - x^2)^{12} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2 - y)^{12} dy = -\frac{1}{26} \left[ (2 - y)^{13} \right]_0^1 = \frac{2^{13} - 1}{26}.$$

**Příklad 8.** Najděte integrál  $\int_{-1}^1 \frac{x \, dx}{x^2 + x + 1}$ .

*Řešení:*

Tento integrál najdeme standardní metodou známou z výpočtu neurčitého integrálu. Platí

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{x \, dx}{x^2 + x + 1} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \, dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x - 1/2)^2 + 3/4} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \ln(x^2 + x + 1) \right]_{-1}^1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right]_{-1}^1 = \frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

---

**Příklad 9.** Najděte integrál  $\int_1^e (x \ln x)^2 \, dx$ .

*Řešení:*

Integrál snadno najdeme integrací per partes.

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 \ln^2 x \, dx &= \left[ \frac{1}{3} x^3 \ln^2 x \right]_1^e - \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \ln x \, dx = \\ &= \frac{1}{3} e^3 - \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{3} x^3 \ln x \right]_1^e + \frac{2}{9} \int_1^e x^2 \, dx = \\ &= \frac{1}{3} e^3 - \frac{2}{9} e^3 + \frac{2}{27} (e^3 - 1) = \frac{5e^3 - 2}{27}. \end{aligned}$$

---

**Příklad 10.** Najděte integrál  $\int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} \, dx$ .

*Řešení:*

Integrál lze najít substitucí  $1 - x = y^3$ , tj.  $x = 1 - y^3$ . Pak je  $dx = -3y^2 \, dy$ , bod  $x = 1$  přejde na bod  $y = 0$  a bod  $x = 9$  na bod  $y = -2$ . Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, platí

$$\begin{aligned} \int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} \, dx &= \int_0^{-2} (1 - y^3) y (-3y^2) \, dy = 3 \int_{-2}^0 (y^3 - y^6) \, dy = \\ &= 3 \left[ \frac{y^4}{4} - \frac{y^7}{7} \right]_{-2}^0 = -\frac{468}{7}. \end{aligned}$$

---

**Příklad 11.** Najděte integrál  $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ .

*Řešení:*

Integrál lze najít například tak, že nejprve použijeme substituci  $x^2 - 1 = y$ . Pak je  $2x dx = dy$ , bod  $x = -2$  přejde na bod  $y = 3$  a bod  $x = -1$  na bod  $y = 0$ . Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, je

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2} \int_3^0 \frac{dy}{(y+1)\sqrt{y}} = -\frac{1}{2} \int_0^3 \frac{dy}{(y+1)\sqrt{y}}.$$

Tento integrál lze najít substitucí  $y = t^2$ . Pro ni je  $dy = 2t dt$  a interval  $(0, 3)$  se prostě zobrazí na interval  $(0, \sqrt{3})$ . Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, je

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} = -[\operatorname{arctg} t]_0^{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{3}.$$

Integrál by bylo také možné řešit substitucí  $x = \frac{1}{y}$ , ale pozor na znaménka!

---

**Příklad 12.** Najděte integrál  $\int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx$ .

*Řešení:*

Protože je  $x^{15} = x^8 \cdot x^7$  je vhodné použít nejprve substituci  $x^8 = y$ . Pak je  $8x^7 dx = dy$  a interval  $(0, 1)$  se prostě zobrazí na interval  $(0, 1)$ . Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, je

$$\int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx = \frac{1}{8} \int_0^1 y \sqrt{1+3y} dy.$$

Tento integrál najdeme substitucí  $1+3y = t^2$ . Pro ni je  $y = \frac{t^2-1}{3}$ ,  $dy = \frac{2}{3} t dt$  a interval  $(0, 1)$  se prostě zobrazuje na interval  $(1, 2)$ . Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, je

$$\int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx = \frac{1}{36} \int_1^2 (t^2-1)t^2 dt = \frac{1}{36} \left[ \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right]_1^2 = \frac{29}{270}.$$

---

**Příklad 13.** Najděte integrál  $\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x dx$ .

*Řešení:*

Protože platí vztahy  $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$  a  $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$  je

$$\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}(\sin 3x \cdot \cos x - \sin 3x \cdot \cos 3x) = \frac{1}{4}(\sin 4x + \sin 2x - \sin 6x).$$

Tedy daný integrál je

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \, dx &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (\sin 4x + \sin 2x - \sin 6x) \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \left[ -\frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{6} \cos 6x \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$


---

**Příklad 14.** Najděte integrál  $\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x \, dx$ .

*Řešení:*

Protože je  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$  a  $\int_0^{\pi} e^x \, dx = e^{\pi} - 1$ , stačí najít integrál

$\int_0^{\pi} e^x \cos 2x \, dx$ . Tento integrál najdeme integrací per partes.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^x \cos 2x \, dx &= [e^x \cos 2x]_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} e^x \sin 2x \, dx = \\ &= e^{\pi} - 1 + 2[e^x \sin 2x]_0^{\pi} - 4 \int_0^{\pi} e^x \cos 2x \, dx = \\ &= e^{\pi} - 1 - 4 \int_0^{\pi} e^x \cos 2x \, dx. \end{aligned}$$

Z této rovnice najdeme  $\int_0^{\pi} e^x \cos 2x \, dx = \frac{e^{\pi} - 1}{5}$ . Proto je hledaný integrál

$$\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \left( e^{\pi} - 1 + \frac{e^{\pi} - 1}{5} \right) = \frac{3}{5}(e^{\pi} - 1).$$


---

**Příklad 15.** Najděte rekurentní vzorec pro snížení řádu v integrálu

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx, \quad n > 1.$$

*Řešení:*

Napišeme  $\sin^n x = \sin x \cdot \sin^{n-1} x$  a budeme integrovat per partes. Pak dostaneme

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin^{n-1} x \, dx = \\ &= \left[ -\cos x \cdot \sin^{n-1} x \right]_0^{\pi/2} - (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \sin^{n-2} x \, dx = \end{aligned}$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^{n-2} x \, dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Z tohoto vztahu snadno zjistíme, že  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ .

---

**Příklad 16.** Najděte rekurentní vzorec pro snížení řádu v integrálu

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx, \quad n > 1.$$

*Řešení:*

Napišeme  $\cos^n x = \cos x \cdot \cos^{n-1} x$  a budeme integrovat per partes. Pak dostaneme

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \cos^{n-1} x \, dx = \\ &= \left[ \sin x \cdot \cos^{n-1} x \right]_0^{\pi/2} - (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos^{n-2} x \, dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^{n-2} x \, dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned}$$

Z tohoto vztahu snadno zjistíme, že  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ .

---

**Příklad 17.** Najděte integrál  $\int_0^2 |1-x| \, dx$ .

*Řešení:*

Integrovaná funkce  $f(x) = |1-x|$  je pro  $x \in (0, 1)$  dána předpisem  $f(x) = 1-x$  a pro  $x \in (1, 2)$  je  $f(x) = x-1$ . Proto je hledaný integrál

$$\int_0^2 |1-x| \, dx = \int_0^1 (1-x) \, dx + \int_1^2 (x-1) \, dx = \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[ \frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 = 1.$$


---

**Příklad 18.** Najděte integrál  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}$ ,  $0 < \alpha < \pi$ .

*Řešení:*

Protože je  $x^2 - 2x \cos \alpha + 1 = (x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha$ , dostaneme

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \left[ \operatorname{arctg} \frac{x - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right]_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{\sin \alpha} \left( \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} + \operatorname{arctg} \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right).$$

Protože je  $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  a  $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$  a pro  $x > 0$  platí  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ , je  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} = \frac{\pi}{2 \sin \alpha}$ .

---

**Příklad 19.** Najděte integrál  $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ .

*Řešení:*

Protože je integrovaná funkce  $f(x) = \sqrt{1 - \cos 2x}$  periodická s periodou  $L = \pi$ , platí

$$\begin{aligned} \int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx &= 100 \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = 100 \cdot \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x dx = \\ &= 100 \cdot \sqrt{2} [-\cos x]_0^{\pi} = 200 \cdot \sqrt{2}. \end{aligned}$$


---

**Příklad 20.** Najděte derivaci  $\frac{d}{dx} \left( \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \right)$ .

*Řešení:*

Protože je integrovaná funkce  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$  spojitá, existuje k ní primitivní funkce  $F(t)$ , pro kterou platí  $F'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ . Protože platí

$$\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = F(x^3) - F(x^2),$$

je hledaná derivace rovna

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \right) = \frac{d}{dx} (F(x^3) - F(x^2)) = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}.$$


---

**Příklad 21.** Najděte  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$ .

*Řešení:*



Protože je  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x \cos t^2 dt = 0$ , lze použít l'Hospitalovo pravidlo. Neboť platí

$$\frac{d}{dx} \left( \int_0^x \cos t^2 dt \right) = \cos x^2, \text{ je } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x^2 = 1.$$


---

**Příklad 22.** Najděte integrál  $\int_0^2 f(x) dx$ , kde  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{pro } 1 < x \leq 2; \end{cases}$

*Řešení:*

Protože pro  $x \in (0, 1)$  je  $f(x) = x^2$  a pro  $x \in (1, 2)$  je  $f(x) = 2 - x$ , je hledaný integrál

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2 - x) dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[ 2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{5}{6}.$$


---

**Příklad 23.** Najděte integrál  $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) dx$ .

*Řešení:*

Protože je  $x - x^3 > 0$  pro  $x \in (0, 1)$  a  $x - x^3 < 0$  pro  $x \in (1, 3)$ , je  $\operatorname{sgn}(x - x^3) = 1$  na intervalu  $(0, 1)$  a  $\operatorname{sgn}(x - x^3) = -1$  na intervalu  $(1, 3)$ . Proto je

$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) dx = \int_0^1 dx - \int_1^3 dx = -1.$$


---

**Příklad 24.** Najděte integrál  $\int_0^\pi x \operatorname{sgn}(\cos x) dx$ .

*Řešení:*

Protože  $\cos x > 0$  pro  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  a  $\cos x < 0$  pro  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , je  $x \operatorname{sgn}(\cos x) = x$  pro  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  a  $x \operatorname{sgn}(\cos x) = -x$  pro  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ . Hledaný integrál tedy je

$$\int_0^\pi x \operatorname{sgn}(\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} x dx - \int_{\pi/2}^\pi x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/2} - \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{\pi/2}^\pi = -\frac{\pi^2}{4}.$$


---

**Příklad 25.** Najděte integrál  $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx$ .

*Řešení:*

Doposud jsme u všech počítaných určitých integrálů mohli najít primitivní funkci a pak použít Newton–Leibnizovu formuli. Ale u tohoto integrálu primitivní funkci pomocí elementárních funkcí najít nelze. Přesto je možné tento integrál najít. Jestliže totiž použijeme substituci  $\frac{\pi}{4} - x = y$ , dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x) \, dx &= - \int_{\pi/4}^0 \ln \left( 1 + \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - y \right) \right) \, dy = \\ &= \int_0^{\pi/4} \ln \left( 1 + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \right) \, dx = \int_0^{\pi/4} \ln \left( \frac{2}{1 + \operatorname{tg} x} \right) \, dx = \\ &= \int_0^{\pi/4} \left( \ln 2 \, dx - \ln(1 + \operatorname{tg} x) \right) \, dx = \\ &= \frac{\pi}{4} \ln 2 - \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x) \, dx. \end{aligned}$$

Z tohoto vztahu již snadno dostaneme  $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x) \, dx = \frac{\pi}{8} \ln 2$ .

Všimněte si toho, že v obecných mezích bychom tento integrál nespočítali.

---

CVIČENÍ 18 — Použití určitých integrálů

**Příklad 1.** Najděte obsah obrazce omezeného parabolou  $y = 2x - x^2$  a přímkou  $x + y = 0$ .

*Řešení:*

Dané křivky se protínají v bodech, pro které platí  $-x = 2x - x^2$ , tj. v bodech  $x = 0$  a  $x = 3$ . Protože pro  $0 \leq x \leq 3$  platí  $-x \leq 2x - x^2$ , je hledaný obsah obrazce roven

$$\int_0^3 (2x - x^2 + x) dx = \left[ \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = \frac{9}{2}.$$


---

**Příklad 2.** Najděte obsah obrazce omezeného přímkou  $y = x$  a křivkou  $y = x + \sin^2 x$ , kde  $0 \leq x \leq \pi$ .

*Řešení:*

Protože je  $x \leq x + \sin^2 x$  je obsah obrazce roven

$$\int_0^\pi (x + \sin^2 x - x) dy = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$


---

**Příklad 3.** Najděte obsah elipsy  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

*Řešení:*

Vnitřek elipsy je omezen funkcemi  $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ , kde  $-a < x < a$ . Proto je obsah elipsy  $P$  pomocí integrálu dán vztahem

$$P = \int_{-a}^a 2 \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Tento integrál najdeme substitucí  $x = a \sin t$ . Pak je  $dx = a \cos t dt$  a interval  $(-a, a)$  se prostě zobrazí na interval  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, je

$$P = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = ab \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi ab.$$


---

**Příklad 4.** Najděte obsah obrazce omezeného křivkou  $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ , kde  $x \geq 0$ .

*Řešení:*

Obrazec je omezen funkcemi  $y = \pm x\sqrt{a^2 - x^2}$ , kde  $0 \leq x \leq a$ . Proto je obsah  $P$  daného obrazce dán integrálem

$$P = \int_0^a 2x\sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Tento integrál najdeme substitucí  $a^2 - x^2 = y$ . Pak je  $2x dx = -dy$ , bod  $x = 0$  přejde na bod  $y = a^2$  a bod  $x = a$  na bod  $y = 0$ . Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, je

$$P = \int_0^a 2x\sqrt{a^2 - x^2} dx = - \int_{a^2}^0 \sqrt{y} dy = -\frac{2}{3} [y^{3/2}]_{a^2}^0 = \frac{2}{3} a^3.$$

**Příklad 5.** Najděte délku oblouku křivky  $y = x^{3/2}$ , kde  $0 \leq x \leq 4$ .

*Řešení:*

Protože je  $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ , je délka  $s$  daného oblouku dána integrálem

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx.$$

Tento integrál najdeme substitucí  $1 + \frac{9}{4}x = t$ . Pak je  $dx = \frac{4}{9} dt$  a interval  $(0, 4)$  se prostě zobrazí na interval  $(1, 10)$ . Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, je

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \int_1^{10} \sqrt{t} dt = \frac{8}{27} [t^{3/2}]_1^{10} = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

**Příklad 6.** Najděte délku oblouku křivky  $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ , kde  $1 \leq y \leq e$ .

*Řešení:*

Protože je  $x' = \frac{dx}{dy} = \frac{y^2 - 1}{2y}$  a  $\sqrt{(x')^2 + 1} = \frac{y^2 + 1}{2y}$ , je délka  $s$  daného oblouku dána integrálem

$$s = \int_1^e \frac{y^2 + 1}{2y} dy = \left[ \frac{y^2}{4} + \frac{1}{2} \ln y \right]_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

**Příklad 7.** Najděte délku oblouku křivky dané parametrickými rovnicemi  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ , kde  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

*Řešení:*

Délka  $s$  oblouku křivky dané parametrickými rovnicemi  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$  je dána integrálem  $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$ , kde  $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$  a  $\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$ .

V našem případě je  $\dot{x} = a(1 - \cos t)$ ,  $\dot{y} = a \sin t$  a  $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right|$ . Protože pro  $t \in (0, 2\pi)$  je  $\sin \frac{t}{2} > 0$ , je délka  $s$  daného oblouku rovna

$$s = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = -4a \left[ \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a.$$

**Příklad 8.** Najděte délku oblouku křivky dané parametrickými rovnicemi  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$ , kde  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

*Řešení:*

Délka  $s$  oblouku křivky dané parametrickými rovnicemi  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$  je dána integrálem  $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$ , kde  $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$  a  $\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$ .

V našem případě je  $\dot{x} = at \cos t$ ,  $\dot{y} = at \sin t$  a  $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = at$ . Tedy délka  $s$  daného oblouku je rovna

$$s = \int_0^{2\pi} at dt = \frac{a}{2} [t^2]_0^{2\pi} = 2\pi^2 a.$$

**Příklad 9.** Najděte objem komolého kužele, jehož základny jsou elipsy s poloosami  $A$ ,  $B$  a  $a$ ,  $b$  a který má výšku  $h$ .

*Řešení:*

Jestliže rozdělíme kužel na elementární vrstvy rovinami kolmými k ose  $Oz$ , které mají šířku  $dz$ , je elementární objem  $dV$  takové vrstvy roven  $dV = S(z) dz$ , kde  $S(z)$  je obsah kolmého řezu ve výšce  $z$ . Proto je objem  $V$  tělesa mezi rovinami  $z_1$  a  $z_2$  roven  $V = \int_{z_1}^{z_2} S(z) dz$ .

V našem případě je  $S(z) = \pi a(z)b(z)$ , kde  $a(z)$  a  $b(z)$  jsou poloosy elipsy, která je řezem kužele ve výšce  $z$ . Jestliže pro  $z = 0$  je  $a(z) = A$ ,  $b(z) = B$  a pro  $z = h$  je  $a(z) = a$ ,  $b(z) = b$ , jsou v obecné výšce  $z \in \langle 0, h \rangle$  poloosy dány vztahem  $a(z) = A + \frac{z}{h}(a - A)$  a  $b(z) = B + \frac{z}{h}(b - B)$ . Hledaný objem  $V$  je tedy dán integrálem

$$V = \frac{\pi}{h^2} \int_0^h (Ah + (a - A)z)(Bh + (b - B)z) dz = \frac{\pi}{6} h((2A + a)B + (2a + A)b).$$

**Příklad 10.** Najděte objem rotačního paraboloidu, jehož základna má obsah  $S$  a jehož výška je  $h$ .

*Řešení:*

Objem tělesa lze určit pomocí integrálu  $V = \int_{z_1}^{z_2} S(z) dz$ , kde  $S(z)$  je obsah řezu kolmého na osu  $Oz$ . Protože v našem případě jde o rotační těleso, je  $S(z) = \pi r^2(z)$ , kde  $r(z)$  je poloměr kruhu, který je kolmým řezem k ose  $OZ$  ve výšce  $z$ . Křivka, jejíž rotací vzniká rotační paraboloid, je parabola. Jestliže její vrchol zvolíme v počátku souřadnic, pak je její rovnice  $y = ar^2$ , kde  $a$  je konstanta. Protože pro  $z = h$  je  $S = \pi r^2(h) = \frac{\pi h}{a}$ , dostaneme  $a = \frac{\pi h}{S}$ . Pak ale je  $z = \frac{\pi h}{S} r^2$ , a tedy  $S(z) = \frac{S}{h} z$ . Z toho plyne, že objem  $V$  daného rotačního paraboloidu je

$$V = \int_0^h \frac{S}{h} z dz = \frac{1}{2} Sh.$$


---

**Příklad 11.** Najděte objem elipsoidu  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

*Řešení:*

Objem  $V$  elipsoidu určíme pomocí integrálu  $V = \int_{-c}^c S(z) dz$ , kde  $S(z) = \pi a(z)b(z)$ ,  $a(z)$  a  $b(z)$  jsou poloosy elipsy, která je kolmým řezem k ose  $Oz$  daného elipsoidu ve výšce  $z$ . Protože

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} \implies \frac{c^2}{a^2(c^2 - z^2)} x^2 + \frac{c^2}{b^2(c^2 - z^2)} y^2 = 1,$$

jsou poloosu  $a(z) = \frac{a\sqrt{c^2 - z^2}}{c}$  a  $b(z) = \frac{b\sqrt{c^2 - z^2}}{c}$ . Tedy  $S(z) = \frac{\pi ab}{c^2} (c^2 - z^2)$ . Z toho plyne, že objem  $V$  daného elipsoidu je

$$V = \frac{\pi ab}{c^2} \int_{-c}^c (c^2 - z^2) dz = \frac{4}{3} \pi abc.$$


---

**Příklad 12.** Dokažte, že objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce  $0 \leq a \leq x \leq b$ ,  $0 \leq y \leq y(x)$ , kde  $y(x)$  je spojitá funkce, kolem osy  $Oy$ , je roven

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy(x) dx.$$

*Řešení:*

Úsečku  $ab$  rozdělíme na elementární úseky délky  $\Delta x$ . Rotací úsečky  $0 \leq y \leq y(x)$  pro pevné  $x \in \langle a, b \rangle$  vznikne válcová plocha s obsahem  $S(x) = 2\pi xy(x)$ . Objem elementárního válce tedy je  $\Delta V(x) = 2\pi xy(x)\Delta x$ . Protože funkce  $xy(x)$  je podle předpokladu spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , dostaneme po sečtení pro  $\Delta x \rightarrow 0$ , že

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy(x) dx.$$


---

**Příklad 13.** Najděte objem tělesa omezeného plochou, která vznikne rotací křivky  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ : a) kolem osy  $Ox$ ; b) kolem osy  $Oy$ .

*Řešení:*

V případě a) rotuje křivka  $z = \sin x$ ,  $x \in \langle 0, \pi \rangle$  kolem osy  $Ox$ . Jestliže tedy rozdělíme interval  $\langle 0, \pi \rangle$  na elementární úseky  $\Delta x$ , je elementární objem těchto úseků roven  $\Delta V = \pi y^2 \Delta x$ . Proto je v tomto případě objem

$$V_x = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

V případě b) rotuje křivka kolem osy  $Oy$ . Podle příkladu 12. je tedy objem  $V_y$  roven

$$V_y = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi [-x \cos x]_0^\pi + 2\pi \int_0^\pi \cos x dx = 2\pi^2.$$


---

**Příklad 14.** Najděte obsah plochy, která vznikne rotací křivky  $y = x\sqrt{\frac{x}{a}}$ ,  $0 \leq x \leq a$ , kolem osy  $Ox$ .

*Řešení:*

Jestliže rotuje spojitá funkce  $y = y(x) \geq 0$ ,  $x \in \langle a, b \rangle$ , kolem osy  $Ox$ , můžeme rozdělit tento interval na elementární úseky  $\Delta x$ . Velikost elementární plochy, která vznikne rotací této části křivky je přibližně rovna  $\Delta S(x) = 2\pi y(x)\sqrt{1 + (y')^2} \Delta x$ . Tedy po sečtení a přechodu k limitě  $\Delta x \rightarrow 0$  dostaneme

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

V našem případě je  $y = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{a}}$ ,  $y' = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{a}}$ , a tedy

$$S = 2\pi \int_0^a \frac{x^{3/2}}{\sqrt{a}} \sqrt{1 + \frac{9x}{4a}} dx.$$

Po substituci  $\frac{9}{4a}x = z$  dostaneme  $x = \frac{4a}{9}z$ ,  $dx = \frac{4a}{9}dz$  a

$$S = \frac{64}{243} \pi a^2 \int_0^{9/4} z^{3/2} \sqrt{1+z} dz.$$

Musíme tedy najít integrál  $\int_0^{9/4} z^{3/2} \sqrt{1+z} dz$ . Mohli bychom použít některou z Eulerových substitucí a tento integrál převést na integrál z racionální funkce (zkuste to). Použijeme ale jinou metodu. Integrand napíšeme ve tvaru

$$z^{3/2} \sqrt{z+1} = z \sqrt{z^2+z} = z \sqrt{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{z}{2} \sqrt{(2z+1)^2 - 1}$$

a použijeme substituci  $2z+1 = t$ . Pak je  $z = \frac{t-1}{2}$ ,  $dz = \frac{dt}{2}$ , bod  $z=0$  přejde na bod  $t=1$  a bod  $z = \frac{9}{4}$  na bod  $t = \frac{11}{2}$ . Pak dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^{9/4} z^{3/2} \sqrt{1+z} dz &= \frac{1}{8} \int_1^{11/2} (t-1) \sqrt{t^2-1} dt = \\ &= \frac{1}{8} \int_1^{11/2} t \sqrt{t^2-1} dt - \frac{1}{8} \int_1^{11/2} \sqrt{t^2-1} dt. \end{aligned}$$

V prvním z těchto integrálů zavedeme substituci  $t^2-1 = u$ . Po této substituci získáme

$$\frac{1}{8} \int_1^{11/2} t \sqrt{t^2-1} dt = \frac{1}{16} \int_0^{117/4} \sqrt{u} du = \frac{1}{24} \left[ u^{3/2} \right]_0^{117/4} = \frac{117}{64} \sqrt{13}.$$

Ve druhém integrálu  $\frac{1}{8} \int_1^{11/2} \sqrt{t^2-1} dt$  zavedeme novou proměnnou  $u$  vztahem  $t = \cosh u$ . Pak je  $dt = \sinh u du$  a z integrálu dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \int_1^{11/2} \sqrt{t^2-1} dt &= \frac{1}{8} \int_0^{\operatorname{argcosh}(11/2)} \sinh^2 u du = \\ &= \frac{1}{16} \int_0^{\operatorname{argcosh}(11/2)} (\cosh 2u - 1) du = \frac{1}{16} \left[ \sinh u \cosh u - u \right]_0^{\operatorname{argcosh}(11/2)} = \\ &= \frac{33}{128} \sqrt{13} - \frac{1}{16} \ln \frac{3\sqrt{13} + 11}{2}, \end{aligned}$$

protože  $\operatorname{argcosh} u = \ln(u + \sqrt{u^2-1})$ . Tedy hledaný integrál je

$$\int_0^{9/4} z^{3/2} \sqrt{1+z} dz = \frac{1}{16} \left( 21\sqrt{13} + \ln \frac{3\sqrt{13} + 11}{2} \right)$$



a obsah dané rotační plochy je

$$S = \frac{4\pi}{243} a^2 \left( 21\sqrt{13} + \ln \frac{3\sqrt{13} + 11}{2} \right).$$


---

**Příklad 15.** Najděte obsah plochy, která vznikne rotací křivky  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ , kolem osy  $Ox$ .

*Řešení:*

Protože  $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ , určíme, jak jsme ukázali v předchozím případě, obsah dané rotační plochy pomocí integrálu

$$S = 2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}} dx = 2\pi \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^4 x + 1}{\cos^3 x} \sin x dx.$$

Tento integrál je výhodné řešit substitucí  $\cos^2 x = z$ . Pak je  $-2 \cos x \sin x = dz$  a získáme pro obsah  $S$  integrál

$$S = \pi \int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t^2} dt.$$

V tomto integrálu zavedeme novou proměnnou  $t$  vztahem  $z = \sinh t$ . Protože  $\sinh^2 t + 1 = \cosh^2 t$  a  $dz = \cosh t dt$ , dostaneme vztah

$$\begin{aligned} S &= \pi \int_{\operatorname{argsinh}(1/2)}^{\operatorname{argsinh} 1} \frac{\cosh^2 t}{\sinh^2 t} dt = \pi \int_{\operatorname{argsinh}(1/2)}^{\operatorname{argsinh} 1} \frac{\sinh^2 t + 1}{\sinh^2 t} dt = \\ &= \pi \int_{\operatorname{argsinh}(1/2)}^{\operatorname{argsinh} 1} \left( 1 + \frac{1}{\sinh^2 t} \right) dt = \pi \left[ t - \frac{\cosh t}{\sinh t} \right]_{\operatorname{argsinh}(1/2)}^{\operatorname{argsinh} 1} = \\ &= \pi \left( \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \sqrt{2} + \sqrt{5} \right) = \pi \left( \ln \frac{2(1 + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{5}} + \sqrt{5} - \sqrt{2} \right). \end{aligned}$$


---

**Příklad 16.** Najděte obsah plochy, která vznikne rotací křivky  $y^2 = 2px$ ,  $0 \leq x \leq x_0$ : a) kolem osy  $Ox$ ; b) kolem osy  $Oy$ .

*Řešení:*

V případě a) určíme obsah plochy  $S$  integrálem  $S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + (y')^2} dx$ . Pro-

tože v tomto případě stačí uvažovat  $y \geq 0$ , lze psát  $y = \sqrt{2px}$ . Pak je  $y' = \sqrt{\frac{p}{2x}}$ .

Obsah dané plochy tedy najdeme pomocí integrálu

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{x_0} \sqrt{2px} \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx = 2\pi \sqrt{p} \int_0^{x_0} \sqrt{2x + p} dx = \\ &= \frac{2}{3} \pi \sqrt{p} \left[ (2x + p)^{3/2} \right]_0^{x_0} = \frac{2}{3} \left( (2x_0 + p) \sqrt{2px_0 + p^2} - p^2 \right). \end{aligned}$$

V případě b) je obsah plochy  $S$  dán integrálem  $S = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x \sqrt{1 + (x')^2} dy$ . Protože  $x = \frac{y^2}{2p}$ ,  $-\sqrt{2px_0} \leq y \leq \sqrt{2px_0}$  a  $x' = \frac{y}{p}$ , je v tomto případě obsah ploch  $S$  roven integrálu

$$S = 2\pi \int_{-\sqrt{2px_0}}^{\sqrt{2px_0}} \frac{y^2}{2p} \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} dy = \frac{2\pi}{p} \int_0^{\sqrt{2px_0}} y^2 \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} dy.$$

Jestliže zavedeme novou proměnnou  $t$  substitucí  $y = p \sinh t$  a označíme-li  $a = \operatorname{argsinh} \sqrt{\frac{2x_0}{p}} = \ln \frac{\sqrt{2x_0} + \sqrt{2x_0 + p}}{\sqrt{p}}$ , dostaneme po jednoduchých úpravách

$$\begin{aligned} S &= 2\pi p^2 \int_0^a \sinh^2 t \cosh^2 t dt = \frac{\pi p^2}{4} \int_0^a (\cosh 4t - 1) dt = \\ &= \frac{\pi p^2}{4} \left[ \sinh t \cosh t (\cosh^2 t + \sinh^2 t) - t \right]_0^a = \\ &= \frac{\pi p^2}{4} \left( \sqrt{\frac{2x_0}{p}} \sqrt{\frac{2x_0}{p} + 1} \left( \frac{4x_0}{p} + 1 \right) - \ln \frac{\sqrt{2x_0} + \sqrt{2x_0 + p}}{\sqrt{p}} \right) = \\ &= \frac{\pi}{4} \left( (4x_0 + p) \sqrt{2x_0(2x_0 + p)} - \ln \frac{\sqrt{2x_0} + \sqrt{2x_0 + p}}{\sqrt{p}} \right). \end{aligned}$$

**Příklad 17.** Najděte obsah plochy, která vznikne rotací křivky  $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ,  $b \geq a$  kolem osy  $Ox$ .

*Řešení:*

Jestliže je křivka, jejíž rotací kolem osy  $Ox$  vzniká rotační plocha, dána parametrickými rovnicemi  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ , lze obsah  $S$  rotační plochy vyjádřit integrálem

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt,$$

kde  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  a  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ .

V našem případě lze napsat parametrické rovnice křivky ve tvaru  $x = a \cos t$ ,  $y = b + a \sin t$ ,  $t \in (0, 2\pi)$ . Tedy obsah dané rotační plochy je

$$S = 2\pi a \int_0^{2\pi} (b - a \sin t) dt = 2\pi a [bt + a \cos t]_0^{2\pi} = 4\pi^2 ab.$$

**Příklad 18.** Určete souřadnice těžiště kruhového oblouku:  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = a \sin \varphi$ ,  $|\varphi| \leq \alpha \leq \pi$ .

*Řešení:*

Souřadnice těžiště křivky určíme ze vztahů  $x_T = \frac{S_x}{s}$ ,  $y_T = \frac{S_y}{s}$ , kde  $s$  je délka křivky a  $S_x$ , resp.  $S_y$  jsou statické momenty křivky vzhledem k osám  $Oy$ , resp.  $Ox$ . Pro křivku zadanou parametrickými rovnicemi  $x = x(\varphi)$ ,  $y = y(\varphi)$ ,  $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ , rovná  $s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\dot{x}^2(\varphi) + \dot{y}^2(\varphi)} d\varphi$  a

$$S_x = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} x(\varphi) \sqrt{\dot{x}^2(\varphi) + \dot{y}^2(\varphi)} d\varphi, \quad S_y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} y(\varphi) \sqrt{\dot{x}^2(\varphi) + \dot{y}^2(\varphi)} d\varphi.$$

V našem případě tedy je  $s = \int_{-\alpha}^{\alpha} a d\varphi = 2a\alpha$ ,  $S_x = \int_{-\alpha}^{\alpha} a^2 \cos \varphi d\varphi = 2a^2 \sin \alpha$  a  $S_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} a^2 \sin \varphi d\varphi = 0$ . Tedy souřadnice těžiště daného kruhového oblouku jsou  $x_T = \frac{\sin \alpha}{\alpha} a$ ,  $y_T = 0$ .

---

**Příklad 19.** Určete souřadnice těžiště oblasti omezené parabolami  $ax = y^2$  a  $ay = x^2$ ,  $a > 0$ .

*Řešení:*

Souřadnice těžiště rovinného obrazce určíme ze vztahů  $x_T = \frac{S_x}{S}$ ,  $y_T = \frac{S_y}{S}$ , kde  $S$  je velikost ploch rovinného obrazce a  $S_x$ , resp.  $S_y$  jsou statické momenty tohoto obrazce vzhledem k osám  $Oy$ , resp.  $Ox$ .

Jestliže je rovinný obrazec dán nerovnostmi  $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ ,  $x_1 \leq x \leq x_2$ , kde  $y_1(x)$  a  $y_2(x)$  jsou funkce proměnné  $x$ , je  $S = \int_{x_1}^{x_2} (y_2(x) - y_1(x)) dx$  a

$$S_x = \int_{x_1}^{x_2} x(y_2(x) - y_1(x)) dx,$$
$$S_y = \int_{x_1}^{x_2} \frac{y_2(x) + y_1(x)}{2} (y_2(x) - y_1(x)) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{y_2^2(x) - y_1^2(x)}{2} dx.$$

V našem se hraniční křivky protínají v bodech, ve kterých platí  $ax = y^2$  a  $ay = x^2$ . Z těchto rovnic dostaneme  $x_1 = 0$  a  $x_2 = a$ . Protože pro  $x \in (0, a)$  je  $\frac{x^2}{a} < \sqrt{ax}$ , je  $y_1(x) = \frac{x^2}{a}$  a  $y_2(x) = \sqrt{ax}$ . Tedy

$$S = \int_0^a \left( \sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx = \left[ \frac{2}{3} \sqrt{ax}^{3/2} - \frac{x^3}{3a} \right]_0^a = \frac{a^2}{3}$$
$$S_x = \int_0^a x \left( \sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx = \left[ \frac{2}{5} \sqrt{ax}^{5/2} - \frac{x^4}{4a} \right]_0^a = \frac{3}{20} a^3$$

$$S_y = \int_0^a \frac{3ax - x^4}{2a^2} dx = \frac{1}{2a^2} \left[ \frac{x^2}{2} a^3 - \frac{x^5}{5} \right]_0^a = \frac{3}{20} a^3.$$

Tedy souřadnice těžiště daného obrazce jsou  $x_T = y_T = \frac{9}{20} a$ .

---

**Příklad 20.** Určete souřadnice těžiště oblasti  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ,  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ .

*Řešení:*

V tomto případě je  $y_1(x) = 0$ ,  $y_2(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $x_1 = 0$  a  $x_2 = a$ . Tedy

$$\begin{aligned} S &= \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ S_x &= \frac{b}{a} \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ S_y &= \frac{b^2}{2a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx. \end{aligned}$$

První integrál najdeme substitucí  $x = a \sin t$ . Po ní dostaneme

$$S = ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{ab}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{ab}{2} \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} ab.$$

Druhý integrál lze najít substitucí  $a^2 - x^2 = t$ . Pak dostaneme

$$S_x = \frac{b}{2a} \int_0^{a^2} \sqrt{t} dt = \frac{b}{3a} \left[ t^{3/2} \right]_0^{a^2} = \frac{1}{3} a^2 b.$$

A konečně pro třetí integrál dostaneme

$$S_y = \frac{b^2}{2a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{b^2}{2a^2} \left[ a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{1}{3} ab^2.$$

Tedy souřadnice těžiště jsou  $x_T = \frac{4}{3\pi} a$  a  $y_T = \frac{4}{3\pi} b$ .

---

**Příklad 21.** Určete těžiště homogenní polokoule s poloměrem  $a$ .

*Řešení:*

Souřadnice tělesa jsou dány vztahy  $x_T = \frac{S_x}{V}$ ,  $y_T = \frac{S_y}{V}$  a  $z_T = \frac{S_z}{V}$ , kde  $V$  je objem tělesa a  $S_x$ ,  $S_y$ , resp.  $S_z$  jsou statické momenty vzhledem k souřadnicovým rovinám  $Oyz$ ,  $Oxz$ , resp.  $Oxy$ . Jestliže je průmět tělesa na osu  $Ox$  interval  $\langle x_1, x_2 \rangle$ , rozdělíme tento interval na elementární úsek  $\Delta x$ . Pak je elementární statický moment  $\Delta S_x =$

$xS(x)\Delta x$ , kde  $S(x)$  je plocha průřezu kolmého k ose  $Ox$  v místě  $x$ . Po sečtení a přechodem k limitě  $\Delta x \rightarrow 0$  dostaneme  $S_x = \int_{x_1}^{x_2} xS(x) dx$ . Podobně zjistíme, že

$$S_y = \int_{y_1}^{y_2} yS(y) dy \text{ a } S_z = \int_{z_1}^{z_2} zS(z) dz.$$

V našem případě je  $S(x) = \frac{\pi}{2} r^2(x) = \frac{\pi}{2} (a^2 - x^2)$ ,  $S(y) = \frac{\pi}{2} r^2(y) = \frac{\pi}{2} (a^2 - y^2)$ ,  $S(z) = \pi r^2(z) = \pi (a^2 - z^2)$  a  $x_1 = y_1 = -a$ ,  $z_1 = 0$  a  $x_2 = y_2 = z_2 = a$ . Pro objem dostaneme

$$V = \pi \int_0^a (a^2 - z^2) dz = \pi \left[ a^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_0^a = \frac{2}{3} \pi a^3.$$

Pro statické momenty pak dostaneme

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\pi}{2} \int_{-a}^a x(a^2 - x^2) dx = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{a^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-a}^a = 0 \\ S_y &= \frac{\pi}{2} \int_{-a}^a y(a^2 - y^2) dy = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{a^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_{-a}^a = 0 \\ S_z &= \pi \int_0^a z(a^2 - z^2) dz = \pi \left[ \frac{a^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_0^a = \frac{\pi}{4} a^4. \end{aligned}$$

Tedy souřadnice těžiště jsou  $x_T = y_T = 0$  a  $z_T = \frac{3}{8} a$ .

---

**Příklad 22.** Jakou práci je třeba vykonat, abychom roztáhli pružinu o 10 cm, jestliže silou 10 kN roztáhneme tuto pružinu o 1 cm?

*Řešení:*

Jestliže působíme silou  $F(x)$  po úsečce  $\langle x_1, x_2 \rangle$  rovnoběžné se směrem síly  $F$ , vykonáme práci  $A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$ . Pro pružinu je síla  $F(x)$  úměrná výchylce  $x$  z její rovnovážné polohy, tj.  $F(x) = kx$ , kde  $k$  je konstanta (tuhost pružiny). Tedy pro pružinu je práce rovna  $A = \int_0^x k\xi d\xi = \frac{k}{2} x^2$ .

Protože ze zadání úlohy plyne, že  $k = \frac{F}{x} = 1000 \text{ kN/m}$  je práce, kterou musíme vykonat rovna  $A = 5 \text{ kJ}$ .

---

**Příklad 23.** Válec o průměru 20 cm a délky 80 cm je naplněn parou pod tlakem  $100 \text{ kN/cm}^2$ . Jakou práci je třeba vykonat, abychom zmenšili objem páry dvakrát, jestliže předpokládáme, že teplota je konstantní?

*Řešení:*

Práci, kterou musíme vykonat při stažení plynu z objemu  $V_1$  na objem  $V_2$  je rovna  $A = - \int_{V_1}^{V_2} p \, dV$ , kde  $p$  je tlak plynu. Pro izotermický proces v ideálním plynu je

$$pV = C = \text{konst. Tedy práce je } A = -C \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = C \ln \frac{V_1}{V_2}.$$

V našem případě je  $V_1 = 8\pi \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ ,  $p_1 = 10^9 \text{ Nm}^{-2}$  a  $V_2 = \frac{1}{2} V_1$ . Konstanta  $C = p_1 V_1 = 8\pi \cdot 10^6 \text{ J}$ . Tedy musíme vykonat práci  $A = 8\pi \ln 2 \cdot 10^6 \text{ J} \doteq 17.42 \cdot 10^6 \text{ J}$ .

---

**Příklad 24.** Určete tlak vody na svislou stěnu, která má tvar půlkruhu s poloměrem  $a$  a jejíž průměr je na povrchu hladiny.

*Řešení:*

Tlak vody v hloubce  $y$  pod hladinou je  $p = \rho g y$ , kde  $\rho$  je hustota vody a  $g$  je gravitační zrychlení. Jestliže rozdělíme půlkruh na úseky šířky  $\Delta y$ , které jsou kolmé na osu  $Oy$  a jejichž délka je  $2\sqrt{a^2 - y^2}$ , bude na takový úsek působit síla  $\Delta F(y) = \rho g y \sqrt{a^2 - y^2} \Delta y$ . Jestliže sečteme tyto elementární síly a přejdeme k limitě  $\Delta y \rightarrow 0$ , dostaneme pro sílu  $F$  vztah

$$F = 2\rho g \int_0^a y \sqrt{a^2 - y^2} \, dy.$$

Tento integrál najdeme substitucí  $a^2 - y^2 = t$ . Pak snadno zjistíme, že

$$F = \rho g \int_0^{a^2} \sqrt{t} \, dt = \frac{2}{3} \rho g \left[ t^{3/2} \right]_0^{a^2} = \frac{2}{3} \rho g a^3.$$


---

**Příklad 25.** Určete tlak vody na svislou stěnu, která má tvar lichoběžníka, jehož dolní základna je  $a = 10 \text{ m}$ , horní  $b = 6 \text{ m}$  a výška  $h = 5 \text{ m}$ , jestliže je dolní základna ponořena v hloubce  $c = 20 \text{ m}$ .

*Řešení:*

Tlak kapaliny v hloubce  $y$  je dán vztahem  $p = \rho g y$ , kde  $\rho$  je hustota kapaliny a  $g$  je gravitační zrychlení. Síla, která působí na úsek délky  $\ell(y)$  kolmé k ose  $Oy$  a šířky  $\Delta y$  v hloubce  $y$  je tedy  $\Delta F = \rho g y \ell(y) \Delta y$ . V našem případě je  $\ell(y) = \frac{4}{5} y - 6$ . Jestliže sečteme všechny tyto síly a přejdeme k limitě  $\Delta y \rightarrow 0$  dostaneme

$$F = \rho g \int_{15}^{20} y \left( \frac{4}{5} y - 6 \right) \, dy = \rho g \left[ \frac{2}{15} y^3 - 3y^2 \right]_{15}^{20} = \frac{2125}{3} \rho g.$$


---

**Příklad 26.** Bod  $M$  se pohybuje ve směru osy  $Ox$  se zrychlením  $a = e^{-t}$ . V čase  $t = 0$  nachází v místě  $x = 0$  a má rychlost  $v = v_0$ . Určete rychlost a polohu bodu  $M$  v čase  $t$ .

*Řešení:*

Podle definice je rychlost  $v = \frac{dx}{dt}$  a zrychlení  $a = \frac{dv}{dt}$ . Tedy máme najít funkce  $v(t)$  a  $x(t)$  takové, že  $\frac{dv}{dt} = e^{-t}$  a  $\frac{dx}{dt} = v(t)$ .

Funkci  $v(t)$  najdeme jako integrál  $v(t) = \int a(t) dt = \int e^{-t} dt = -e^{-t} + C_1$ , kde  $C_1$  je konstanta. Protože rychlost v čase  $t = 0$  je  $v(0) = v_0$ , je konstanta  $C_1 = v_0 + 1$ . Tedy rychlost bodu  $M$  v čase  $t$  je  $v(t) = v_0 + 1 - e^{-t}$ .

Funkci  $x(t)$  najdeme jako integrál  $x(t) = \int v(t) dt = \int (v_0 + 1 - e^{-t}) dt = v_0 t + t + e^{-t} + C_2$ , kde  $C_2$  je konstanta. Protože v čase  $t = 0$  je  $x(0) = 0$ , je konstanta  $C_2 = -1$ . Tedy v čase  $t$  je poloha bodu  $M$   $x(t) = v_0 t + t + e^{-t} - 1$ .

---

**Příklad 27.** Homogenní koule s poloměrem  $R$  a hustotou  $\rho$  se otáčí kolem svého průměru s úhlovou rychlostí  $\omega$ . Určete kinetickou energii koule.

*Řešení:*

Rychlost pohybu bodu koule závisí pouze na vzdálenosti  $r$  od osy rotace a je rovna  $v = r\omega$ . Rozdělme interval  $(0, R)$  na dílky délky  $\Delta r$ . Rychlost bodů v intervalu  $(r, r + \Delta r)$  bude přibližně rovna  $v(r) = r\omega$ . Obsah mezikruží mezi  $r$  a  $r + \Delta r$  je rovna  $\pi((r + \Delta r)^2 - r^2) \approx 2\pi r \Delta r$ . Výška v bodě  $r$  je rovna  $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ . Tedy hmotnost této malé oblasti je  $\Delta m \approx 4\rho\pi r \sqrt{R^2 - r^2} \Delta r$ . Protože se všechny body této malé oblasti pohybují přibližně stejnou rychlostí  $v = r\omega$ , je kinetická energie této malé oblasti přibližně rovna  $\Delta T = \frac{1}{2} v^2 \Delta m = 2\pi\rho\omega^2 r^3 \sqrt{R^2 - r^2} \Delta r$ . Jestliže všechny tyto příspěvky od takových malých oblastí sečteme a přejdeme k limitě  $\Delta r \rightarrow 0$ , dostaneme pro kinetickou energii vztah

$$T = 2\pi\rho\omega^2 \int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2} dr.$$

Při přesných úvahách by bylo třeba používat věty o střední hodnotě, ale výsledek by byl stejný. Integrál lze řešit substitucí  $R^2 - r^2 = t$ . Po této substituci získáme

$$T = \pi\rho\omega^2 \int_0^{R^2} (R^2 - t) \sqrt{t} dt = \pi\rho\omega^2 \left[ \frac{2}{3} r^2 t^{3/2} - \frac{2}{5} t^{5/2} \right]_0^{R^2} = \frac{4}{15} \pi\rho\omega^2 R^5.$$

---

**Příklad 28.** Jakou silou přitahuje nekonečná hmotná přímka s konstantní lineární hustotou  $\mu$  hmotný bod hmotnosti  $m$ , který je ve vzdálenosti  $a$  od této přímky?

*Řešení:*

Síla  $\mathbf{F}_{12}$ , kterou přitahuje hmotný bod s hmotností  $m_1$ , který je v bodě  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ , hmotný bod s hmotností  $m_2$ , který se nachází v bodě  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , je podle Newtonova gravitačního zákona rovna

$$\mathbf{F}_{12} = km_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3},$$

kde  $k$  je gravitační konstanta.

Jestliže ztotožníme osu  $Ox$  s hmotnou přímkou a hmotný bod  $m$  umístíme do bodu  $[0; a; 0]$ , bude malá úsečka  $(x, x + \Delta x)$  působit na hmotný bod  $m$  silou se složkami

$$\Delta F_x = km\mu \frac{x\Delta x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}, \quad \Delta F_y = -km\mu \frac{a\Delta x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}, \quad \Delta F_z = 0.$$

Po sečtení jednotlivých příspěvků a přechodem k limitě  $\Delta x \rightarrow 0$  dostaneme

$$F_x = km\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \, dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = 0$$

$$F_y = -km\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a \, dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$F_z = 0.$$

Integrál pro  $F_y$  najdeme například substitucí  $x = a \sinh t$ . Pak dostaneme

$$F_y = -\frac{km\mu}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\cosh^2 t} = -\frac{km\mu}{a} \left[ \frac{\sinh t}{\cosh t} \right]_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{2k}{a} m\mu.$$

**Příklad 29.** Určete jakou silou přitahuje kruhová deska s poloměrem  $a$  a konstantní plošnou hustotou  $\delta$  hmotný bod  $P$  hmotnosti  $m$ , který se nachází na kolmici k rovině desky, která prochází jejím středem  $Q$ , ve vzdálenosti  $b$  od bodu  $Q$ .

*Řešení:*

Předpokládejme, že deska leží v rovině  $z = 0$  a bod  $P = [0; 0; b]$ . Ze symetrie úlohy plyne, že složky síly  $F_x = F_y = 0$ . Jestliže rozdělíme desku na malá mezikruží s poloměry  $r$  a  $r + \Delta r$ , je plocha takového mezikruží do veličin prvního řádu v  $\Delta r$  rovna  $\Delta S = \pi((r + \Delta r)^2 - r^2) \approx 2\pi r \Delta r$ . Složka síly  $\Delta F_z$ , kterou přitahuje toto mezikruží bod  $P$  je podle Newtonova gravitačního zákona rovna  $\Delta F_z = -2\pi\delta b \frac{r\Delta r}{(r^2 + b^2)^{3/2}}$ , kde  $k$  je gravitační konstanta. Po sečtení přes všechna mezikruží a přechodem k limitě  $\Delta r \rightarrow 0$  dostaneme

$$F_z = -2\pi\delta b \int_0^a \frac{r \, dr}{(r^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Tento integrál lze najít substitucí  $r^2 + b^2 = t$ . Po ní dostaneme

$$F_z = -\pi\delta b \int_{b^2}^{a^2+b^2} t^{-3/2} \, dt = 2\pi\delta b \left[ t^{-1/2} \right]_{b^2}^{a^2+b^2} = 2\pi\delta \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - 1 \right).$$



CVIČENÍ 19 — Nevlastní integrály

**Příklad 1.** Vypočtěte  $\int_0^1 \ln x \, dx$ .

*Řešení:*

Protože  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ , jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Proto jej určíme pomocí limity.

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \ln x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [x(\ln x - 1)]_{\varepsilon}^1 = -1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon(\ln \varepsilon - 1) = -1,$$

protože  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon(\ln \varepsilon - 1) = 0$ .

---

**Příklad 2.** Vypočtěte  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$ .

*Řešení:*

Protože jedna mez integrálu je  $+\infty$ , jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Neboť pro  $x \in \langle 2, +\infty \rangle$  je  $x^2 + x - 2 \neq 0$ , nemá funkce singulární body. Proto budeme integrál počítat pomocí limity

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x^2 + x - 2}.$$

Primitivní funkci najdeme rozkladem na parciální zlomky. Platí

$$\int \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+2}.$$

Proto je

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \frac{A-1}{A+2} - \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \ln 2.$$


---

**Příklad 3.** Vypočtěte  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ .

*Řešení:*

Funkce  $f(x) = 1 + x^3$  má v  $\mathbb{R}$  jediný nulový bod  $x = -1$ . Protože je jedna mez v integrálu rovna  $+\infty$ , jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Musíme jej tedy najít limitou

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^3}.$$

Primitivní funkci  $\int \frac{dx}{1+x^3}$  najdeme rozkladem na parciální zlomky. Platí

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+x^3} &= \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Tedy hledaný integrál je

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{6} \ln \frac{A^2+2A+1}{A^2-A+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2A-1}{\sqrt{3}} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$


---

**Příklad 4.** Vypočtěte  $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ .

*Řešení:*

Protože  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} = +\infty$ , jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Proto jej budeme počítat limitou

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \lim_{a \rightarrow 1^-} \int_0^a \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

Primitivní funkci najdeme substitucí  $1-x=y^2$ . Pak je

$$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = -2 \int \frac{dy}{1+y^2} = -2 \operatorname{arctg} y = -2 \operatorname{arctg} \sqrt{1-x}.$$

Tedy

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = -2 \lim_{a \rightarrow 1^-} \left[ \operatorname{arctg} \sqrt{1-x} \right]_0^a = \frac{\pi}{2}.$$


---

**Příklad 5.** Vypočtěte  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$ .

*Řešení:*

Protože je jedna mez rovna  $+\infty$ , jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Jestliže napíšeme

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{-6}\sqrt{x^{-10}+x^{-5}+1}},$$

je vidět, že je výhodné použít substituci  $x^{-5} = y$ . Pak dostaneme

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} &= -\frac{1}{5} \int_1^0 \frac{dy}{\sqrt{y^2+y+1}} = \frac{1}{5} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(y+1/2)^2+3/4}} = \\ &= \frac{1}{5} \left[ \ln(2y+1+2\sqrt{y^2+y+1}) \right]_0^1 = \frac{1}{5} \ln \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$


---

**Příklad 6.** Vypočtěte  $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$ .

*Řešení:*

Přestože je  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} = 0$ , musíme tento integrál počítat pomocí limit

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$$

Primitivní funkci lze najít integrací per partes. Položíme  $u' = \frac{x}{(1+x^2)^2}$  a  $v = \ln x$ .

Pak je  $u = -\frac{1}{2(1+x^2)}$  a  $v' = \frac{1}{x}$ . Tedy

$$\begin{aligned} \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx &= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \\ &= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \frac{x^2 \ln x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{4} \ln(1+x^2). \end{aligned}$$

Protože

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x^2 \ln x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) \right) = 0$$

a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 \ln x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) \right) &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 \ln x - (1+x^2) \ln(1+x^2))}{1+x^2} = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x \ln x - 2x \ln(1+x^2)}{2x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x^2}{1+x^2} = 0, \end{aligned}$$

je  $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = 0$ .

---

**Příklad 7.** Vypočtěte  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx$ ,  $a > 0$ .

*Řešení:*

Jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Proto jej najdeme pomocí limity

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-ax} \cos bx \, dx.$$

Jestliže použijeme integrace per partes, dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{a} e^{-ax} \cos bx \right]_0^A - \frac{b}{a} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx = \\ &= \frac{1}{a} + \frac{b}{a^2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ e^{-ax} \sin bx \right]_0^A - \frac{b^2}{a^2} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \\ &= \frac{1}{a} - \frac{b^2}{a^2} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx. \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy rovnici

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} - \frac{b^2}{a^2} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx,$$

ze které plyne, že  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}$ .

---

**Příklad 8.** Pomocí snížení řádu vypočtete nevlastní integrál

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Řešení:*

Protože se jedná o nevlastní Riemannův integrál, dostaneme integraci per partes pro  $n \geq 1$

$$I_n = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -e^{-x} x^n \right]_0^A + n \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} \, dx = nI_{n-1}.$$

Protože pro  $n = 0$  je

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -e^{-x} \right]_0^A = 1,$$

je  $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n \, dx = n!$ .

---

**Příklad 9.** Vypočtete  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3}$ .

*Řešení:*

Protože je  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^4} = +\infty$  je také  $\int_0^{+\infty} \sqrt{1+t^4} dt = +\infty$ . Jedná se tedy o limitu typu  $\frac{\infty}{\infty}$ . Proto lze použít l'Hospitalovo pravidlo. Pomocí něj dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

---

**Příklad 10.** Vypočtete  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t} dt}{\ln(1/x)}$ .

*Řešení:*

Protože  $\int_0^{+\infty} t^{-1}e^{-t} dt = +\infty$ , jedná se o limitu typu  $\frac{\infty}{\infty}$ . Proto lze použít l'Hospitalovo pravidlo. Pomocí něj dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t} dt}{\ln(1/x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^{-1}e^{-x}}{-x^{-1}} = 1.$$

---

**Příklad 11.** Nechť je  $f(x)$  spojitá funkce na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  a  $\alpha > 0$ . Vypočtete

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} x^\alpha \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt.$$

*Řešení:*

Protože je  $\alpha > 0$  je  $\lim_{x \rightarrow 0_+} x^{-\alpha} = +\infty$ . Proto lze pro výpočet limity  $\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt}{x^{-\alpha}}$  použít l'Hospitalovo pravidlo. Pomocí něho dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{-x^{-\alpha-1} f(x)}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \frac{f(0)}{\alpha}.$$

---

**Příklad 12.** Vyšetřete konvergenci integrálu  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$ .

*Řešení:*

Protože  $x^4 - x^2 + 1 \neq 0$ , jedná se o chování funkce  $f(x) = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$  v okolí bodu  $+\infty$ . Protože je  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = 1$  a integrál  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  konverguje ( $= 1$ ), konverguje také integrál  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$ .

---

**Příklad 13.** Vyšetřete konvergenci integrálu  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ .

*Řešení:*

Protože pro  $x \in \langle 1, +\infty \rangle$  je  $x\sqrt[3]{x^2+1} \neq 0$ , jedná se o chování funkce  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$  v okolí bodu  $x = +\infty$ . Protože  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{5/3} f(x) = 1$  a integrál  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/3}}$  konverguje ( $= 3/2$ ), konverguje také integrál  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ .

---

**Příklad 14.** Vyšetřete konvergenci integrálu  $\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$ .

*Řešení:*

Funkce  $f(x) = \frac{1}{\ln x}$  není omezená v okolí bodu  $x = 1$ . Proto budeme zkoumat její chování v tomto okolí. Protože je  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$  a integrál  $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$  diverguje, diverguje také integrál  $\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$ .

---

**Příklad 15.** V závislosti na parametru  $p \in \mathbb{R}$  vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

*Řešení:*

Protože pro každé  $p \in \mathbb{R}$  integrál  $\int_1^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$  konverguje, bude nás zajímat konvergence tohoto integrálu v pravém okolí bodu  $x = 0$ . Protože  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{p-1} e^{-x}}{x^{p-1}} = 1$ , konverguje daný integrál právě tehdy, když konverguje integrál  $\int_0^1 x^{p-1} dx$ . Neboť tento integrál konverguje pro  $p > 0$  a diverguje pro  $p \leq 0$ , konverguje integrál  $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$  pro  $p > 0$  a diverguje pro  $p \leq 0$ .

---

**Příklad 16.** V závislosti na parametru  $n \in \mathbb{R}$  vyšetřete konvergenci integrálu  $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} dx$ ,  $a \neq 0$ .

*Řešení:*

Označme  $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}$ . Protože je  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n f(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(a)$ , konverguje integrál  $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} dx$  současně s integrálem  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$ . Tento integrál konverguje pro  $n > 1$  a diverguje pro  $n \leq 1$ .

Protože  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x} = a$ , je  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{n-1} f(x) = a$ . Tedy integrál  $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} dx$  konverguje současně s integrálem  $\int_0^1 \frac{dx}{x^{n-1}}$ . Ten konverguje pro  $n-1 > 1$  a diverguje pro  $n-1 \leq 1$ .

Tedy integrál  $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} dx$  konverguje pro  $n \in (1, 2)$  a diverguje pro  $n \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ .

---

**Příklad 17.** V závislosti na parametru  $n \in \mathbb{R}$  vyšetřete konvergenci integrálu  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ .

*Řešení:*

Protože pro každé  $\varepsilon > 0$  je  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\varepsilon} = 0$  a integrál  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$  konverguje pro  $n > 1$ , konverguje i integrál  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$  pro  $n > 1$ . Protože pro  $n \leq 1$  a  $x \in (1, +\infty)$  je  $\frac{\ln(1+x)}{x^n} > \frac{1}{x}$  a integrál  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$  diverguje, diverguje pro  $n \leq 1$  také integrál  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ .

Označme  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^n}$ . Protože  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ , je  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{n-1} f(x) = 1$ . Tedy integrál  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$  konverguje současně s integrálem  $\int_0^1 \frac{dx}{x^{n-1}}$ . Tento integrál konverguje pro  $n < 2$ .

Tedy  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$  konverguje pro  $n \in (1, 2)$ .

---

**Příklad 18.** V závislosti na parametrech  $m$  a  $n \geq 0$  vyšetřete konvergenci integrálu  $\int_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^n} dx$ .

*Řešení:*

Označme  $f(x) = \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2 + x^n}$ . Protože je  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-m} f(x) = \frac{\pi}{2}$ , konverguje integrál

$\int_1^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2 + x^n} dx$  současně s integrálem  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n-m}}$ . Ale tento integrál konverguje pro  $n - m > 1$  a diverguje pro  $n - m \leq 1$ .

Protože  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ , je  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^{m+1}} = \frac{1}{2}$ . Tedy integrál  $\int_0^1 \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2 + x^n} dx$  konverguje současně s integrálem  $\int_0^1 x^{m+1} dx$ . Protože tento integrál konverguje pro

$m > -2$  a diverguje pro  $m \leq -2$ , konverguje integrál  $\int_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2 + x^n} dx$  pro

$n > m + 1$  a  $m > -2$  a diverguje pro  $0 \leq n \leq m + 1$ .

---

**Příklad 19.** Vyšetřete konvergenci integrálu  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ .

*Řešení:*

Protože  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0$ , bude nás zajímat konvergence integrálu v okolí bodu  $x =$

$+\infty$ , například konvergence integrálu  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ . Nejprve použijeme integraci

per partes. Označme  $u' = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$  a  $v = \frac{1}{x}$ . Pak je  $u = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$  a  $v' = -\frac{1}{x^2}$ . Y integrálu dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x - \sin x \cos x}{2x} \right]_{\pi}^A + \frac{1}{2} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{x - \sin x \cos x}{x^2} dx = \\ &= \int_{\pi}^{\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Protože  $|\sin x \cos x| = \frac{1}{2} |\sin 2x| \leq \frac{1}{2}$ , druhý z těchto integrálů konverguje. Ale

protože první integrál diverguje, diverguje také integrál  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ .

---

**Příklad 20.** V závislosti na parametru  $n \in \mathbb{R}$  vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

*Řešení:*

Funkce  $f(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}$  není omezená v levém okolí bodu  $x = 1$  a možná v pravém

okolí bodu  $x = 0$ . Protože  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \sqrt{1-x} = \frac{1}{2}$  a integrál  $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$  konverguje,

konverguje také integrál  $\int_{1/2}^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$ .



Protože  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^n} = 1$  konverguje integrál  $\int_0^{1/2} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$  současně s integrálem  $\int_0^{1/2} x^n dx$ . Protože tento integrál konverguje pro  $n > -1$  a diverguje pro  $n \leq -1$ , konverguje také integrál  $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$  pro  $n > -1$  a diverguje pro  $n \leq -1$ .

---

**Příklad 21.** Vyšetřete konvergenci integrálu  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ .

*Řešení:*

Jediný bod, v jehož okolí není funkce  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}$ , je bod  $x = 0$ . Proto nás bude zajímat chování funkce  $f(x)$  v okolí bodu  $x = +\infty$  a v pravém okolí bodu  $x = 0$ .

Protože je  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} f(x) = 1$  a integrál  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$  konverguje ( $= 2$ ), konverguje také integrál  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ .

Protože je  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} f(x) = 1$  a integrál  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  konverguje ( $= 2$ ), konverguje také integrál  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ . Tedy integrál  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$  konverguje.

---

**Příklad 22.** Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

*Řešení:*

Nejprve budeme zkoumat absolutní konvergenci integrálu, tj. konvergenci integrálu  $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ . Protože platí  $|\sin x| \geq \sin^2 x$  a integrál  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$  diverguje podle příkladu 19, integrál  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  nekonverguje absolutně.

Protože je funkce  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  na intervalu  $(0, +\infty)$  spojitá a omezená, bude nás zajímat integrál v okolí bodu  $x = +\infty$ , například  $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ . Nejprve použijeme integraci per partes. Jestliže zvolíme  $u' = \sin x$  a  $v = \frac{1}{x}$ , dostaneme

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{\cos x}{x} \right]_{\pi/2}^{+\infty} - \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = - \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Protože  $|\cos x| \leq 1$ , integrál  $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$  konverguje. Z toho plyne, že neabsolutní konvergence integrálu  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .

---

**Příklad 23.** Nechť pro funkce  $u(x)$  a  $v(x)$  definované na intervalu  $(a, +\infty)$  platí: 1) integrál  $U(x) = \int_a^x u(\xi) d\xi$  je omezená funkce pro  $x \in (a, +\infty)$ ; 2) funkce  $v(x)$  je diferencovatelná a monotonní na intervalu  $(a, +\infty)$ , 3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 0$ . Pak integrál

$\int_a^{+\infty} u(x)v(x) dx$  konverguje.

*Řešení:*

Důkaz tohoto tvrzení je velmi podobný důkazu neabsolutní konvergence integrálu  $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  z předchozího příkladu. Nejprve použijeme integrace per partes. Z ní dostaneme

$$\int_a^{+\infty} u(x)v(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ U(x)v(x) \right]_a^A - \int_a^{+\infty} U(x)v'(x) dx.$$

Protože je funkce  $U(x)$  omezená a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 0$ , je  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ U(x)v(x) \right]_a^A = 0$ .

Protože je funkce  $v(x)$  monotonní a diferencovatelná, nemění její derivace  $v'(x)$  na intervalu  $(a, +\infty)$  znaménko. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že funkce  $v(x)$  je klesající, a tedy její derivace  $v'(x)$  není kladná. Protože existuje  $K \geq 0$  takové, že  $|U(x)| \leq K$ , platí nerovnost

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{+\infty} U(x)v'(x) dx \right| &\leq \int_a^{+\infty} |U(x)v'(x)| dx \leq -K \int_a^{+\infty} v'(x) dx = \\ &= -K \lim_{A \rightarrow +\infty} [v(x)]_a^A = Kv(a), \end{aligned}$$

protože  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 0$ . Tedy  $\int_a^{+\infty} u(x)v(x) dx$  konverguje.

---

**Příklad 24.** Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x + 100} dx.$$

*Řešení:*

Nejprve ukážeme, že tento integrál nekonverguje absolutně. Protože na intervalu  $(0, +\infty)$  je funkce  $f(x) = \frac{\sqrt{x} \cos x}{x + 100}$  spojitá a omezená, musíme zkoumat konvergenci integrálu v okolí bodu  $x = +\infty$ . Protože pro  $x \in (1, +\infty)$  platí nerovnosti  $\frac{\sqrt{x} |\cos x|}{x + 100} \geq \frac{|\cos x|}{x + 100} \geq \frac{\cos^2 x}{x + 100}$ , stačí ukázat, že integrál  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x + 100} dx$  diverguje. Nejprve použijeme integraci per partes. Jestliže zvolíme  $u' = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$  a  $v = \frac{1}{x + 100}$ , je  $u = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$  a  $v' = -\frac{1}{(x + 100)^2}$ . Tedy

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x + 100} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x + \sin x \cos x}{2(x + 100)} \right]_{\pi}^A + \frac{1}{2} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{x + \sin x \cos x}{(x + 100)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\pi}{100 + \pi} \right) + \frac{1}{2} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{(x + 100)^2} dx + \frac{1}{2} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{x dx}{(x + 100)^2}. \end{aligned}$$

Protože integrál  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{(x + 100)^2} dx$  konverguje a integrál  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{x dx}{(x + 100)^2}$  diverguje, diverguje také integrál  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x + 100} dx$  a tedy daný integrál nekonverguje absolutně.

Při zkoumání neabsolutní konvergence integrálu využijeme výsledku příkladu 23.

Protože je funkce  $f(x) = \frac{\sqrt{x} \cos x}{x + 100}$  spojitá a omezená na celém intervalu  $(0, +\infty)$ , stačí zkoumat konvergenci integrálu v okolí bodu  $x = +\infty$ . Označme  $u(x) = \cos x$

a  $v(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 100}$ . Pak je  $U(x) = \int \cos x dx = \sin x$ . Protože je  $|\sin x| \leq 1$ , je

funkce  $U(x)$  omezená. Funkce  $v(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 100}$  je diferencovatelná v celém intervalu  $(0, +\infty)$ . Její derivace  $v'(x) = \frac{100 - x}{2\sqrt{x}(x + 100)^2}$  je záporná pro  $x > 100$ . Navíc je

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x + 100} = 0$ . Proto například integrál  $\int_{101}^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x + 100} dx$  konverguje. Z toho

ale plyne, že neabsolutně konverguje také integrál  $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x + 100} dx$ .

**Příklad 25.** V závislosti na parametrech  $p$  a  $q \geq 0$  vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1 + x^q} dx.$$

*Řešení:*

Funkce  $f(x) = \frac{x^p \sin x}{1 + x^q}$  je spojitá a omezená snad až na pravé okolí bodu  $x = 0$  a okolí bodu  $x = +\infty$ . Proto budeme vyšetřovat konvergenci integrálu v okolí těchto bodů.

Protože  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , je  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^{p+1}} = 1$ . Tedy integrál konverguje (absolutně) v okolí bodu  $x = 0$  pro  $p > -2$ .

Podobně jako v předchozím příkladě lze ukázat, že daný integrál bude absolutně konvergovat v okolí bodu  $x = +\infty$  právě tehdy, když bude konvergovat integrál

$\int_1^{+\infty} \frac{x^p dx}{1+x^q}$ . Protože  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^p}{1+x^q} \cdot x^{q-p} \right) = 1$ , konverguje tento integrál právě tehdy, když konverguje integrál  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{q-p}}$ , tedy pro  $q - p > 1$ . Proto integrál

$\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$  konverguje absolutně pro  $p > -2$  a  $q > p + 1$ .

Pro vyšetřování neabsolutní konvergence integrálu v okolí bodu  $x = +\infty$  použijeme opět výsledek příkladu 23. Funkce  $\int \sin x dx = -\cos x$  je omezená. Dále je

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{1+x^q} = 0$  pro  $q > p$ . Protože pro  $q \leq p$  není limita  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{1+x^q}$  rovna nule,

integrál pro  $q \leq p$  nekonverguje. Pro  $q > p$  je  $\left( \frac{x^p}{1+x^q} \right)' = \frac{(p-q)x^{p+q-1} + px^{p-1}}{(1+x^q)^2}$ .

Pro velká  $x$  je tato derivace záporná. Proto integrál konverguje neabsolutně pro  $p > -2$  a  $p < q \leq p + 1$ .

---

**Příklad 26.** Vypočtěte V. P.  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2}$ .

*Řešení:*

V intervalu  $(0, +\infty)$  není funkce  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$  omezená v okolí bodu  $x = 1$ . Proto je

$$\text{V. P. } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \int_0^{1-a} \frac{dx}{1-x^2} + \int_{1+a}^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} \right).$$

Protože  $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ , je hledaný integrál roven

$$\begin{aligned} \text{V. P. } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \left[ \ln \frac{1-x}{1+x} \right]_0^{1-a} + \left[ \ln \frac{x+1}{x-1} \right]_{1+a}^A \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \ln \frac{2-a}{a} - \ln \frac{2+a}{a} \right) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \ln \frac{2-a}{2+a} = 0. \end{aligned}$$


---

**Příklad 27.** Vypočtěte V. P.  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$ .

*Řešení:*

Primitivní funkce je

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \int \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right|.$$

Protože funkce  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$  není omezená v okolí bodů  $x = 1$  a  $x = 2$ , je

$$\begin{aligned} \text{V.P. } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} &= \\ &= \lim_{a \rightarrow 0_+} \lim_{b \rightarrow 0_+} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \left[ \ln \frac{2-x}{1-x} \right]_0^{1-a} + \left[ \ln \frac{2-x}{x-1} \right]_{1+a}^{2-b} + \left[ \ln \frac{x-2}{x-1} \right]_{2+b}^A \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0_+} \lim_{b \rightarrow 0_+} \left( \ln \frac{1+a}{a} - \ln 2 + \ln \frac{b}{1-b} - \ln \frac{1-a}{a} - \ln \frac{b}{1+b} \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0_+} \lim_{b \rightarrow 0_+} \left( \ln \frac{1+a}{1-a} + \ln \frac{1+b}{1-b} - \ln 2 \right) = -\ln 2. \end{aligned}$$


---

**Příklad 28.** Vypočtěte V.P.  $\int_{1/2}^2 \frac{dx}{x \ln x}$ .

*Řešení:*

Primitivní funkci k  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$  dostaneme substitucí  $y = \ln x$ . Pak je

$$\int \frac{dx}{x \ln x} \int \frac{dy}{y} = \ln |y| = \ln |\ln x|.$$

Protože na intervalu  $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$  není funkce  $f(x)$  omezená v okolí bodu  $x = 1$ , je

$$\begin{aligned} \text{V.P. } \int_{1/2}^2 \frac{dx}{x \ln x} &= \lim_{a \rightarrow 0_+} \left( \left[ \ln |\ln x| \right]_{1/2}^{1-a} + \left[ \ln |\ln x| \right]_{1+a}^2 \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0_+} \left( \ln(-\ln(1-a)) - \ln(\ln 2) + \ln(\ln 2) - \ln(\ln(1+a)) \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0_+} \ln \frac{-\ln(1-a)}{\ln(1+a)} = \ln 1 = 0. \end{aligned}$$


---

**Příklad 29.** Vypočtěte V.P.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$ .

*Řešení:*

Protože je funkce  $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$  omezená v celém  $\mathbb{R}$ , je

$$\begin{aligned} \text{V. P. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx &= \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^K \frac{1+x}{1+x^2} dx = \\ &= \lim_{K \rightarrow +\infty} \left[ \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_{-K}^K = \\ &= \lim_{K \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg} K - \operatorname{arctg}(-K)) = \pi. \end{aligned}$$

---

**Příklad 30.** Vypočtete V. P.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx$ .

*Řešení:*

Funkce  $\operatorname{arctg} x$  je lichá. Proto pro každé  $K > 0$  je  $\int_{-K}^K \operatorname{arctg} x dx = 0$ . Protože je funkce  $\operatorname{arctg} x$  omezená na celém  $\mathbb{R}$ , je

$$\text{V. P. } \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx = \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^K \operatorname{arctg} x dx = 0.$$

---

CVIČENÍ 20 — Různé příklady na integrály

**Příklad 1.** Najděte integrál  $\int_1^{+\infty} \frac{(x^4 - 3) dx}{x(x^8 + 3x^4 + 2)}$ .

*Řešení:*

Protože  $\frac{x^4 - 3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} = \frac{x^4 - 3}{x^4(x^8 + 3x^4 + 2)} \cdot x^3$ , je výhodné zavést substituci  $x^4 = y$ . Po ní dostaneme

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{(x^4 - 3) dx}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} &= \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{(y - 3) dy}{y(y^2 + 3y + 2)} = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \left( -\frac{3}{2y} + \frac{4}{y+1} - \frac{5}{2(y+2)} \right) dy = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{3}{2} \ln y + 4 \ln(y+1) - \frac{5}{2} \ln(y+2) \right]_1^A = \\ &= \frac{5}{8} \ln 3 - \ln 2 + \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \ln \frac{y+1}{y} - \frac{5}{8} \ln \frac{y+2}{y} \right) = \frac{5}{8} \ln 3 - \ln 2. \end{aligned}$$


---

**Příklad 2.** Najděte integrál  $\int \frac{x^{11} dx}{x^8 + 3x^4 + 2}$ .

*Řešení:*

Protože  $x^{11} = x^3 \cdot x^8$ , je výhodné použít substituci  $x^4 = y$ . Po ní dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{11} dx}{x^8 + 3x^4 + 2} &= \frac{1}{4} \int \frac{y^2 dy}{y^2 + 3y + 2} = \frac{1}{4} \int \left( 1 + \frac{1}{y+1} - \frac{4}{y+2} \right) dy = \\ &= \frac{1}{4} (y + \ln(y+1) - 4 \ln(y+2)) + C = \frac{x^4}{4} + \frac{\ln(x^4 + 1)}{4} - \ln(x^4 + 2) + C. \end{aligned}$$


---

**Příklad 3.** Najděte integrál  $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n + 1} dx$ .

*Řešení:*

V tomto integrálu použijeme substituci  $x^n = y$ . Pak dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{2n-1}}{x^n + 1} dx &= \frac{1}{n} \int \frac{y dy}{y + 1} = \frac{1}{n} \int \left( 1 - \frac{1}{y+1} \right) dy = \\ &= \frac{1}{n} (y - \ln|y+1|) + C = \frac{1}{n} (x^n - \ln|x^n + 1|) + C. \end{aligned}$$


---

**Příklad 4.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{x(x^{10} + 2)}$ .

*Řešení:*

Jestliže napíšeme  $\frac{1}{x(x^{10} + 2)} = \frac{1}{x^{11}(1 + 2x^{-10})}$ , je vidět, že je výhodné použít substituci  $x^{-10} = y$ . Po této substituci dostaneme

$$\int \frac{dx}{x(x^{10} + 2)} = -\frac{1}{10} \int \frac{dy}{1 + 2y} = -\frac{1}{20} \ln(1 + 2y) + C = \frac{1}{20} \ln \frac{x^{10}}{x^{10} + 2} + C.$$

---

**Příklad 5.** Najděte integrál  $\int \frac{1 + e^{x/2}}{(1 + e^{x/4})^2} dx$ .

*Řešení:*

V tomto integrálu použijeme substituci  $e^{x/4} = y$ . Pak je  $dx = \frac{4}{y} dy$  a z integrálu dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + e^{x/2}}{(1 + e^{x/4})^2} dx &= 4 \int \frac{1 + y^2}{y(1 + y)^2} dy = 4 \int \left( \frac{1}{y} - \frac{2}{(1 + y)^2} \right) dy = \\ &= 4 \left( \ln y + \frac{2}{1 + y} \right) + C = x + \frac{8}{1 + e^{x/4}} + C. \end{aligned}$$

---

**Příklad 6.** Najděte integrál  $\int \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1} dx$ .

*Řešení:*

Nejprve zavedeme proměnnou  $y$  substitucí  $y = e^x$ . Z integrálu pak dostaneme

$$\int \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1} dx = \int \frac{\sqrt{y^2 + 4y - 1}}{y} dy.$$

Tento integrál lze převést na integrál z racionální funkce například Eulerovou substitucí  $y + \sqrt{y^2 + 4y - 1} = t$ . Pak je  $y = \frac{t^2 + 1}{2(t + 2)}$ ,  $\sqrt{y^2 + 4y - 1} = t - y = \frac{t^2 + 4t - 1}{2(t + 2)}$  a  $dy = \frac{t^2 + 4t - 1}{2(t + 2)^2} dt$ . Po dosazení do integrálu dostaneme

$$\begin{aligned} \int \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(t^2 + 4t - 1)^2}{(t + 2)^2(t^2 + 1)} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \left( 1 + \frac{4}{t + 2} + \frac{5}{(t + 2)^2} - \frac{4}{t^2 + 1} \right) dt = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left( t + 4 \ln(t + 2) - \frac{5}{t + 2} - 4 \operatorname{arctg} t \right) + C_1 = \\
&= \sqrt{y^2 + 4y - 1} + 2 \ln(y + 2 + \sqrt{y^2 + 4y - 1}) - \\
&\quad - 2 \operatorname{arctg}(y + \sqrt{y^2 + 4y - 1}) + C = \\
&= \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1} + 2 \ln(e^x + 2 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1}) - \\
&\quad - 2 \operatorname{arctg}(e^x + \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1}) + C.
\end{aligned}$$


---

**Příklad 7.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2}$ ,  $ab \neq 0$ .

*Řešení:*

Protože pro integrovanou funkci  $R(\cos x, \sin x)$  platí vztah

$$R(\cos x, \sin x) = R(-\cos x, -\sin x),$$

použijeme substituci  $\operatorname{tg} x = y$ . Pak dostaneme

$$\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2} = \int \frac{dy}{(ay + b)^2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ay + b} + C = -\frac{\cos x}{a(a \sin x + b \cos x)} + C.$$


---

**Příklad 8.** Najděte integrál  $\int \frac{\ln x \, dx}{x(\ln^3 x - 3 \ln x + 2)}$ .

*Řešení:*

Protože  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ , je výhodné zavést substituci  $\ln x = y$ . Daný integrál pak přejde na

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x \, dx}{x(\ln^3 x - 3 \ln x + 2)} &= \int \frac{y \, dy}{y^3 - 3y + 2} = \\
&= \int \left( \frac{1}{3(y-1)^2} + \frac{2}{9(y-1)} - \frac{2}{9(y+2)} \right) dy = \\
&= -\frac{1}{3(y-1)} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{y-1}{y+2} \right| + C = -\frac{1}{3(\ln x - 1)} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{\ln x - 1}{\ln x + 2} \right| + C.
\end{aligned}$$


---

**Příklad 9.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$ .

*Řešení:*

K výpočtu tohoto integrálu lze použít Eulerovy substituce  $1 + \sqrt{1 - 2x - x^2} = xy$ . Pak je  $\sqrt{1 - 2x - x^2} = xy - 1$  a po umocnění dostaneme  $x = 2 \frac{y - 1}{y^2 + 1}$ . Derivováním získáme  $dx = 2 \frac{-y^2 + 2y + 1}{(y^2 + 1)^2} dy$  a po dosazení do integrálu zjistíme, že

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}} &= \int \frac{-y^2 + 2y + 1}{y(y - 1)(y^2 + 1)} dy = \\ &= \int \left( -\frac{1}{y} + \frac{1}{y - 1} - \frac{2}{y^2 + 1} \right) dy = \ln \left| \frac{y - 1}{y} \right| - 2 \operatorname{arctg} y + C = \\ &= \ln \left| \frac{1 - x + \sqrt{1 - 2x - x^2}}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}} \right| - 2 \operatorname{arctg} \frac{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}{x} + C. \end{aligned}$$


---

**Příklad 10.** Najděte integrál  $\int x \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx$ .

*Řešení:*

Tento integrál lze převést na integrál z racionální funkce například Eulerovou substitucí  $x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = y$ . Ale tato substituce vede k poměrně složitému integrálu. Proto použijeme v tomto případě jinou metodu. Jestliže napíšeme  $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$ , lze poměrně snadno nahlédnout, že může být vhodná substituce  $x - 1 = \sinh t$ . Daný integrál pak je

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx &= \int (\sinh t + 1) \cosh^2 t dt = \\ &= \int \sinh t \cosh^2 t dt + \frac{1}{2} \int (\cosh 2t + 1) dt = \\ &= \frac{1}{3} \cosh^3 t + \frac{1}{2} (\sinh t \cosh t + t) + C. \end{aligned}$$

Protože  $\cosh t = \sqrt{\sinh^2 t + 1} = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$  a  $t = \ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2})$ , je

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx &= \frac{1}{3} (x^2 - 2x + 2)^{3/2} + \frac{1}{2} (x - 1) \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \\ &+ \frac{1}{2} \ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}) + C. \end{aligned}$$


---

**Příklad 11.** Najděte integrál  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \cos x dx$ .

*Řešení:*

Protože jedna z mezí v tomto integrálu je  $+\infty$ , jedná se o nevlastní integrál. Protože platí nerovnost  $|x^2 e^{-x} \cos x| \leq x^2 e^{-x}$  a integrál  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$  konverguje ( $= 2$ ), konverguje také integrál  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \cos x dx$  (a to dokonce absolutně). Tento integrál najdeme integrací per partes. Jestliže zvolíme  $u = x^2$  a  $v' = e^{-x} \cos x$ , je zřejmé, že musíme najít primitivní funkci k  $e^{-x} \cos x$ . Tu najdeme integrací per partes. Platí

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \cos x dx &= -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x dx = \\ &= e^{-x}(-\cos x + \sin x) - \int e^{-x} \cos x dx. \end{aligned}$$

Z této rovnice pro  $\int e^{-x} \cos x dx$  získáme

$$\int e^{-x} \cos x dx = \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) \quad \text{a} \quad \int e^{-x} \sin x dx = -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x).$$

Když použijeme tyto vztahy, dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \cos x dx &= \\ &= \lim_{K \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) \right]_0^K - \int_0^{+\infty} x e^{-x} (\sin x - \cos x) dx = \\ &= \lim_{K \rightarrow +\infty} \left[ x e^{-x} \sin x \right]_0^K - \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx = \\ &= \lim_{K \rightarrow +\infty} \left[ \frac{e^{-x}}{2} (\sin x + \cos x) \right]_0^K = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Příklad 12.** Najděte integrál  $\int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx$ .

*Řešení:*

Tento integrál najdeme integrací per partes. Pomocí ní dostaneme

$$\begin{aligned} \int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx &= \\ &= x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) - \frac{1}{2} \int \frac{x(\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x})}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} dx = \\ &= x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2} \int \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \end{aligned}$$

$$= x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C.$$


---

**Příklad 13.** Najděte integrál  $\int x \arccos \frac{1}{x} dx$ .

*Řešení:*

Tento integrál najdeme integrací per partes. Ta dává

$$\begin{aligned} \int x \arccos \frac{1}{x} dx &= \frac{x^2}{2} \arccos \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{x^2 \sqrt{1 - (1/x)^2}} = \\ &= \frac{x^2}{2} \arccos \frac{1}{x} - \frac{\operatorname{sgn} x}{2} \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= \frac{x^2}{2} \arccos \frac{1}{x} - \frac{\operatorname{sgn} x}{2} \sqrt{x^2 - 1} + C. \end{aligned}$$


---

**Příklad 14.** Najděte integrál  $\int \sinh^3 x dx$ .

*Řešení:*

Po substituci  $\cosh x = y$  dostaneme

$$\int \sinh^3 x dx = \int (y^2 - 1) dy = \frac{y^3}{3} - y + C = \frac{1}{3} \cosh^3 x - \cosh x + C.$$


---

**Příklad 15.** Najděte integrál  $\int \operatorname{tgh} x dx$ .

*Řešení:*

Protože  $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$  a  $(\cosh x)' = \sinh x$ , je  $\int \operatorname{tgh} x dx = \ln(\cosh x) + C$ .

---

**Příklad 16.** Najděte integrál  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sinh x + 2 \cosh x}$ .

*Řešení:*

Podobně jako v případě goniometrických funkcí, lze převést tento integrál na integrál z racionální funkce substitucí  $\operatorname{tgh} \frac{x}{2} = t$ . Ale taková substituce obvykle vede k poměrně složitým integrálům. Proto je mnohdy jednodušší použít vztahy

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  a pak substituci  $e^x = y$ . Z daného integrálu pak dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sinh x + 2 \cosh x} &= \int_0^{+\infty} \frac{2 dx}{3e^x + e^{-x}} = \int_1^{+\infty} \frac{2 dy}{3y^2 + 1} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \operatorname{arctg}(y\sqrt{3}) \right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$


---

**Příklad 17.** Najděte integrál  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx$ .

*Řešení:*

Neboť pro integrovanou funkci  $R(\cos x, \sin x) = \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}$  platí vztah  $R(\cos x, \sin x) = -R(\cos x, -\sin x)$ , použijeme substituci  $\cos x = t$ . Z integrálu pak dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx &= - \int_{1/\sqrt{2}}^0 \frac{t^4 dt}{(1-t^2)^2} = \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{3}{4(1-t)} - \frac{3}{4(1+t)} + \frac{1}{4(1-t)^2} + \frac{1}{4(1+t)^2} \right) dt = \\ &= \left[ t - \frac{3}{4} \ln \frac{1+t}{1-t} + \frac{t}{2(1-t^2)} \right]_0^{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \frac{3}{2} \ln(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$


---

**Příklad 18.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$ .

*Řešení:*

Neboť pro integrovanou funkci  $R(\cos x, \sin x) = \frac{1}{\cos^3 x}$  platí vztah  $R(\cos x, \sin x) = -R(-\cos x, \sin x)$ , použijeme substituci  $\sin x = t$ . Pak dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^3 x} &= \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} \right) dt = \\ &= \frac{1}{4} \left( \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t} \right) + C = \frac{1}{4} \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x} + \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + C. \end{aligned}$$


---

**Příklad 19.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$ .

*Řešení:*

Tento integrál by bylo možné převést substitucí  $\operatorname{tg} x = t$  na integrál z racionální funkce. Ale výsledný integrál by byl poměrně složitý. Protože však  $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ , dostaneme

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} = \int \frac{16 dx}{\sin^4 2x} = 16 \int (1 + \operatorname{cotg}^2 2x) \cdot \frac{dx}{\sin^2 2x}.$$

Protože  $(\operatorname{cotg} 2x)' = -\frac{2}{\sin^2 2x}$ , je výhodné použít substituci  $\operatorname{cotg} 2x = y$  a hledaný integrál je

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} &= -8 \int (1 + y^2) dy = -8 \left( y + \frac{y^3}{3} \right) + C = \\ &= -8 \operatorname{cotg} 2x - \frac{8}{3} \operatorname{cotg}^3 2x + C. \end{aligned}$$


---

**Příklad 20.** Najděte integrál  $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^5 x dx$ .

*Řešení:*

Pro integrovanou funkci  $R(\cos x, \sin x) = \operatorname{tg}^5 x = \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}$  platí  $R(\cos x, \sin x) = R(-\cos x, -\sin x)$ . Proto lze převést tento integrál na integrál racionální funkce substitucí  $\operatorname{tg} x = t$ . Pak je

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^5 x dx &= \int_0^1 \frac{t^5 dt}{1+t^2} = \int_0^1 \left( t^3 - t + \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \\ &= \left[ \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$


---

**Příklad 21.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$ .

*Řešení:*

Po substituci  $\operatorname{tg} x = t$  dostaneme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t^2)}.$$

Tento integrál převedeme na integrál z racionální funkce substitucí  $t = y^2$ . Pak dostaneme

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} &= \int \frac{2 dy}{1 + y^4} = \int \frac{2 dy}{(y^2 - y\sqrt{2} + 1)(y^2 + y\sqrt{2} + 1)} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left( \frac{y + \sqrt{2}}{y^2 + y\sqrt{2} + 1} - \frac{y - \sqrt{2}}{y^2 - y\sqrt{2} + 1} \right) dy = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left( \frac{2y + \sqrt{2}}{y^2 + y\sqrt{2} + 1} - \frac{2y - \sqrt{2}}{y^2 - y\sqrt{2} + 1} \right) dy + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{(y + 1/\sqrt{2})^2 + 1/2} + \frac{1}{(y - 1/\sqrt{2})^2 + 1/2} \right) dy = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{y^2 + y\sqrt{2} + 1}{y^2 - y\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \operatorname{arctg}(y\sqrt{2} + 1) + \operatorname{arctg}(y\sqrt{2} - 1) \right) + C = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x + \sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} \right) + C.
 \end{aligned}$$


---

**Příklad 22.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{\sin x}$ .

*Řešení:*

Tento integrál lze převést na integrál z racionální funkce substitucí  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ . Když totiž nejprve zavedeme novou proměnnou vztahem  $x = 2y$ , přejde náš integrál na

$$\int \frac{dx}{\sin x} = 2 \int \frac{dy}{\sin 2y} = \int \frac{dy}{\sin y \cos y} = \int \frac{1}{\operatorname{tg} y} \cdot \frac{dy}{\cos^2 y}.$$

Protože  $(\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y}$ , je  $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln |\operatorname{tg} y| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$ .

---

**Příklad 23.** Najděte integrál  $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$  tak, že převedete jmenovatele na sinus součtu úhlů.

*Řešení:*

Protože  $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha)$ , kde  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  a  $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , lze podle předcházejícího příkladu psát

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\sin(x + \alpha)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \ln \left| \frac{x + \alpha}{2} \right| + C.$$


---

**Příklad 24.** Najděte integrál  $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ .

*Řešení:*

Protože  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\sin x) = -\infty$ , jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Protože je

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/2} \cdot \ln(\sin x) = 0$ , tento integrál konverguje. Pomocí substituce  $y = \frac{\pi}{2} - x$

zjistíme, že  $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$ . Proto je

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin x) + \ln(\cos x)) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x \cos x) dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x) dx - \frac{\pi}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin x) dx - \frac{\pi}{2} \ln 2 = \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx - \frac{\pi}{2} \ln 2 = I - \frac{\pi}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Z této rovnice plyne, že  $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ .

---



CVIČENÍ 21 — Číselné řady s nezápornými členy

**Příklad 1.** Dokažte, že konverguje řada

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots$$

a najděte její součet.

*Řešení:*

Nejprve najdeme částečné součty této řady. Protože se jedná o součet dvou geometrických řad je

$$s_N = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (1/2)^N}{1 - 1/2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - (1/3)^N}{1 - 1/3}.$$

Protože je  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2^N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{3^N} = 0$ , je

$$s = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$


---

**Příklad 2.** Dokažte, že konverguje řada

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} + \cdots$$

a najděte její součet.

*Řešení:*

Protože je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2(2n-1)} = \frac{1}{2}$ , řada konverguje podle limitního podílového kritéria. Označme její součet  $s$ . Pak platí

$$\begin{aligned} s &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}s. \end{aligned}$$

Z tohoto vztahu dostaneme  $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 3$ .

---

**Příklad 3.** Dokažte, že konverguje řada

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$$

a najděte její součet.

*Řešení:*

Protože platí  $\frac{1}{3}(3n-2)(3n+1) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$ , jsou částečné součty

$$\begin{aligned} s_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{3n-2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(3N+1)}. \end{aligned}$$

Protože  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{3N+1} = 0$ , je  $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}$ .

---

**Příklad 4.** Dokažte, že pro  $|q| < 1$  konverguje řada

$$q \cos \alpha + q^2 \cos 2\alpha + \dots + q^n \cos n\alpha + \dots$$

a najděte její součet.

*Řešení:*

Protože  $|a_n| = |q^n \cos n\alpha| \leq |q|^n$  a  $|q| < 1$ , daná řada konverguje a to dokonce absolutně. Protože  $\cos n\alpha = \operatorname{Re}(e^{in\alpha})$ , je součet dané řady roven  $s = \operatorname{Re}(S)$ , kde

$S = \sum_{n=1}^{\infty} q^n e^{in\alpha}$ . Ale to je geometrická řada s kvocientem  $qe^{i\alpha}$ . Protože  $|qe^{i\alpha}| = |q| < 1$ , tato geometrická řada konverguje. Její součet je

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (qe^{i\alpha})^n = \frac{qe^{i\alpha}}{1 - qe^{i\alpha}} = \frac{qe^{i\alpha}(1 - qe^{-i\alpha})}{1 - 2q \cos \alpha + q^2}.$$

Tedy

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha = \operatorname{Re}(S) = \frac{q \cos \alpha - q^2}{1 - 2q \cos \alpha + q^2}.$$

Povšimněte si, že platí  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha = \operatorname{Im}(S) = \frac{q \sin \alpha}{1 - 2q \cos \alpha + q^2}$ .

---

**Příklad 5.** Dokažte, že konverguje řada  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$  a najděte její součet.

*Řešení:*

Nejprve najdeme částečné součty této řady. Ty jsou

$$\begin{aligned} s_N &= \sum_{n=1}^N (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \sum_{n=3}^{N+2} \sqrt{n} - 2 \sum_{n=2}^{N+1} \sqrt{n} + \sum_{n=1}^N \sqrt{n} = \\ &= 1 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{N+1} + \sqrt{N+1} + \sqrt{N+2} = \\ &= 1 - \sqrt{2} - \sqrt{N+1} + \sqrt{N+2}. \end{aligned}$$

Když přejdeme k limitě  $N \rightarrow \infty$ , dostaneme

$$s = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N = 1 - \sqrt{2} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N+2} + \sqrt{N+1}} = 1 - \sqrt{2}.$$


---

**Příklad 6.** Vyšetřete, zda konverguje řada

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

*Řešení:*

Jedná se o řadu s nezápornými členy. Uvažujme funkci  $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ . Protože její derivace  $f'(x) = -\frac{2}{(2x-1)^2} < 0$ , je tato funkce pro  $x > 1$  klesající. Protože

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , můžeme použít integrální kritérium. Neboť  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x-1}$  diverguje,

diverguje také řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ .

---

**Příklad 7.** Vyšetřete, zda konverguje řada

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$$

*Řešení:*

Jedná se o řadu s nezápornými členy. Uvažujme funkci  $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$ . Protože její derivace  $f'(x) = -\frac{4}{(2x-1)^3} < 0$  pro  $x \in (1, +\infty)$ , je funkce na tomto intervalu klesající. Dále  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Lze tedy použít integrální kritérium. Protože

je  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2}$ , a tedy tento integrál konverguje, konverguje také řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ .

---

**Příklad 8.** Vyšetřete, zda konverguje řada

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \cdots$$

*Řešení:*

Jedná se o řadu s nezápornými členy. Uvažujme funkci  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$ . Její derivace  $f'(x) = -\frac{3x+2}{2x^2(x+1)^{3/2}} < 0$  pro  $x > 0$ . Proto je funkce  $f(x)$  na pro  $x > 0$  klesající. Protože  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , konverguje daná řada zároveň s integrálem  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = 2 \ln(\sqrt{2} + 1)$ . Tedy řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$  konverguje.

---

**Příklad 9.** Vyšetřete, zda konverguje řada

$$\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \cdots$$

*Řešení:*

Jedná se o řadu s nezápornými členy. Uvažujme funkci  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}$ . Její derivace  $f'(x) = -\frac{4x}{(4x^2-1)^{3/2}} < 0$  pro  $x > 1$ . Proto je funkce  $f(x)$  na pro  $x > 1$  klesající. Protože  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , konverguje daná řada zároveň s integrálem  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}$ , který diverguje. Tedy řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$  diverguje.

---

**Příklad 10.** Dokažte konvergenci řady

$$\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{2^n} + \cdots$$

*Řešení:*

Protože platí nerovnost  $|a_n| = \left| \frac{\sin nx}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$  a řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  konverguje, konverguje také řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$  pro každé  $x \in \mathbb{R}$  (dokonce absolutně).

---

**Příklad 11.** Dokažte konvergenci řady

$$\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \dots + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \dots$$

*Řešení:*

Částečné součty dané řady jsou

$$\begin{aligned} s_N &= \sum_{n=1}^N \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{\cos nx}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\cos nx}{n-1} = \\ &= \cos x - \frac{\cos(N+1)x}{N} - \sum_{n=2}^N \frac{\cos nx}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Protože  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\cos(N+1)x}{N} = 0$  a řada  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n-1)}$  konverguje, konverguje také

řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$  pro každé  $x \in \mathbb{R}$ .

---

**Příklad 12.** Dokažte konvergenci řady

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \dots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \dots$$

*Řešení:*

Protože platí nerovnost  $|a_n| = \left| \frac{\cos x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$  a řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konverguje, konverguje

také řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}$  pro každé  $x \in \mathbb{R}$ .

---

**Příklad 13.** Dokažte divergenci řady

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

*Řešení:*

Tato řada nemá nezáporné členy. Ale když seskupíme tři po sobě následující členy, dostaneme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^2 - 2}{3n(3n-1)(3n-2)},$$

což už je řada s nezápornými členy. Protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \frac{9n^2 - 2}{3n(3n - 1)(3n - 2)} \right) = \frac{1}{3}$ , konverguje tato řada současně s řadou  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , která, jak je známo, diverguje. Proto diverguje také daná řada.

---

**Příklad 14.** Vyšetřete konvergenci řady

$$\frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \dots + \frac{1000^n}{n!} + \dots$$

*Řešení:*

Jedná se o řadu s nezápornými členy. Abychom zjistili její konvergenci, lze použít limitní podílové kritérium. Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1000^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1000^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000}{n+1} = 0.$$

Protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$ , daná řada konverguje.

---

**Příklad 15.** Vyšetřete konvergenci řady

$$\frac{(1!)^1}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \dots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \dots$$

*Řešení:*

Jedná se o řadu s nezápornými členy. Abychom zjistili její konvergenci, lze použít limitní podílové kritérium. Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1.$$

Proto daná řada konverguje.

---

**Příklad 16.** Vyšetřete konvergenci řady

$$\frac{1!}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots + \frac{n!}{n^n} + \dots$$

*Řešení:*

Jedná se o řadu s nezápornými členy. Abychom zjistili její konvergenci, lze použít limitní podílové kritérium. Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = e^{-1} < 1.$$

Protože daná řada konverguje.

---

**Příklad 17.** Vyšetřete konvergenci řady

$$\frac{2 \cdot 1!}{1} + \frac{2^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{2^3 \cdot 3!}{3^3} + \frac{2^n n!}{n^n} + \dots$$

*Řešení:*

Jedná se o řadu s nezápornými členy. Abychom zjistili její konvergenci, lze použít limitní podílové kritérium. Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = 2e^{-1} < 1.$$

Proto daná řada konverguje.

---

**Příklad 18** Vyšetřete konvergenci řady

$$\frac{3 \cdot 1!}{1} + \frac{3^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 3!}{3^3} + \frac{3^n n!}{n^n} + \dots$$

*Řešení:*

Jedná se o řadu s nezápornými členy. Abychom zjistili její konvergenci, lze použít limitní podílové kritérium. Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = 3e^{-1} > 1.$$

Proto daná řada diverguje.

---

**Příklad 19.** Vyšetřete konvergenci řady

$$\frac{(1!)^1}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^8} + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \dots$$

*Řešení:*

Jedná se o řadu s nezápornými členy. Abychom zjistili její konvergenci, lze použít limitní podílové kritérium. Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{((n+1)!)^2 \cdot 2^{n^2}}{2^{n^2+2n+1} \cdot (n!)^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0 < 1.$$

Tedy daná řada konverguje.

---

**Příklad 20.** Vyšetřete konvergenci řady

$$\frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

*Řešení:*

Jedná se o řadu s nezápornými členy. Abychom zjistili její konvergenci, lze použít limitní podílové kritérium. Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000 + n}{2n + 1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Tedy daná řada konverguje.

---

**Příklad 21.** Vyšetřete konvergenci řady

$$\frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots$$

*Řešení:*

Jedná se o řadu s nezápornými členy. Abychom zjistili její konvergenci, lze použít limitní podílové kritérium. Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 4}{4n + 2} = \frac{3}{4}.$$

Tedy daná řada konverguje.

---

**Příklad 22.** Vyšetřete konvergenci řady  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ .

*Řešení:*

Protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(\ln(\ln n))/n}$  a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln x} = 0$ , je

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} = 1$ . Tedy protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \neq 0$ , řada  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$  diverguje.



---

**Příklad 23.** Vyšetřete konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$ .

*Řešení:*

Jedná se o řadu s nezápornými členy. V tomto případě lze k určení její konvergence použít limitní odmocninové kritérium. Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{2^n + 3^n}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{(2/3)^n + 1}} = \frac{1}{3} < 1,$$

daná řada konverguje.

---

**Příklad 24.** Vyšetřete konvergenci řady  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ .

*Řešení:*

Jedná se o řadu s nezápornými členy. V tomto případě lze k určení její konvergence použít limitní odmocninové kritérium. Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n-1} = e^{-2} < 1,$$

řada  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$  konverguje.

---

**Příklad 25.** Pro která  $p \in \mathbb{R}$  konverguje řada  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ ?

*Řešení:*

Jedná se o řadu s nezápornými členy. Uvažujme funkci  $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$ . Její derivace je  $f'(x) = -\frac{p + \ln x}{x^2 \ln^{p+1} x}$ . Protože pro velká  $x$  je  $f'(x) < 0$ , je tato funkce od jistého  $x_0$  klesající. Limita  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln^p x} = 0$ . Můžeme tedy použít integrální kritérium.

Podle něj konverguje daná řada společně s integrálem  $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x}$ . Když zavedeme

substituci  $\ln x = y$  zjistíme, že řada konverguje současně s integrálem  $\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{y^p}$ ,

který konverguje pro  $p > 1$  a diverguje pro  $p \leq 1$ . Tedy daná řada konverguje také pro  $p > 1$  a diverguje pro  $p \leq 1$ .

---

**Příklad 26.** V závislosti na parametrech  $p, q \in \mathbb{R}$  vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p (\ln(\ln n))^q}.$$

*Řešení:*

Jedná se o řadu s nezápornými členy. Uvažujme funkci  $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x \cdot \ln^q(\ln x)}$ .

Její derivace je  $f'(x) = -\frac{\ln x \cdot \ln(\ln x) + p \ln(\ln x) + q}{x^2 \ln^{p+1} x \cdot \ln^{q+1}(\ln x)}$  je pro dostatečně velká  $x$

záporná. Tedy pro dostatečně velká  $x$  je funkce  $f(x)$  klesající. Protože

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln^p x \cdot \ln^q(\ln x)} = 0$ , můžeme použít integrální kritérium. Podle něj kon-

verguje daná řada současně s integrálem  $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x \cdot \ln^q(\ln x)}$ . V tomto integrálu

zavedeme substituci  $\ln x = y$ . Po ní zjistíme, že daná řada konverguje současně s integrálem  $\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{y^p \ln^q y}$ . Tento integrál konverguje pro  $p > 1$  a diverguje pro  $p < 1$ .

Pro  $p = 1$  máme integrál  $\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{y \ln^q y}$ , který konverguje pro  $q > 1$  a diverguje pro  $q \leq 1$ . Tedy daná řada konverguje pro  $p > 1$  nebo  $p = 1$  a  $q > 1$  a diverguje pro  $p < 1$  nebo  $p = 1$  a  $q \leq 1$ .

---

CVIČENÍ 22 — Číselné řady s obecnými členy

**Příklad 1.** Vyšetřujte konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$ .

*Řešení:*

Jedná se o alternující řadu. Nejprve budeme vyšetřovat, zda tato řada konverguje absolutně. Podle limitního odmocninového kritéria dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+100}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1.$$

Proto řada  $\sum_{n=1}^{\infty} (1-)^n \left( \frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$  konverguje a to dokonce absolutně.

---

**Příklad 2.** Vyšetřujte konvergenci řady

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

*Řešení:*

Protože řada  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  je harmonická řada, není daná řada absolutně konvergentní.

Daná řada není ani alternující. Ale když seskupíme tři po sobě jdoucí členy, dostaneme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{27n^2 - 18n + 2}{3n(3n-1)(3n-2)},$$

která již je alternující. Protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} \right) = 0$ , stačí k důkazu

konvergence dané řady dokázat, že posloupnost  $a_n = \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n}$  je klesající. Ale to je zcela zřejmé. Proto daná řada konverguje neabsolutně.

---

**Příklad 3.** Vyšetřujte konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ .

*Řešení:*

Protože řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+100}$  diverguje, nekongruje daná řada absolutně. Ale jedná se o alternující řadu. Proto se můžeme k důkazu její konvergence pokusit použít

Leibnizova kritéria. Protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+100} = 0$ , stačí dokázat, že posloupnost  $a_n =$

$\frac{\sqrt{n}}{n+100}$  je od jistého  $n_0$  klesající. Uvažujme funkci  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+100}$ . Její derivace  $f'(x) = \frac{100-x}{2\sqrt{x}(x+100)^2}$  je pro  $x \geq 101$  záporná, a tedy pro  $x \geq 101$  je funkce  $f(x)$  klesající. Proto je pro  $n \geq 101$  klesající i posloupnost  $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ . Z Leibnizova kritéria tedy plyne, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$  konverguje neabsolutně.

---

**Příklad 4.** Vyšetřujte konvergenci řady  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ .

*Řešení:*

Protože  $|a_n| = \left| \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{n} + 1}$  a řada  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 1}$  diverguje, nekonverguje daná řada absolutně. Protože se jedná o alternující řadu, můžeme se k důkazu její konvergence pokusit použít Leibnizova kritéria. Protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n} = 0$ , stačí dokázat, že posloupnost  $b_n = \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$  je monotonní. Protože je  $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}-1}$ , je  $b_{2n} < b_{2n+1}$ . Ale na druhé straně platí nerovnost  $\frac{1}{\sqrt{2n+1}-1} > \frac{1}{\sqrt{2n+2}+1}$ , ze které plyne, že  $b_{2n+1} > b_{2n+2}$ . Proto není posloupnost  $b_n$  monotonní. Protože nejsou splněny předpoklady Leibnizova kritéria, nelze pomocí něj rozhodnout o konvergenci nebo divergenci této řady. Ale platí

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}-1} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n} - 2}{(\sqrt{2n+1})(\sqrt{2n+1}-1)}. \end{aligned}$$

To už je řada, jejíž členy nemění znaménka. Protože je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n} - 2}{(\sqrt{2n+1})(\sqrt{2n+1}-1)} \right) = -1$$

a řada  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverguje, diverguje také řada  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ .

---

**Příklad 5.** Vyšetřujte absolutní a neabsolutní konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ .

*Řešení:*

Protože řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  konverguje pro  $p > 1$  a diverguje pro  $p \leq 1$ , konverguje řada

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$  absolutně pro  $p > 1$ .

Pro  $p \leq 0$  není  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$  rovna nule, a proto pro  $p \leq 0$  řada diverguje.

Pro  $0 < p \leq 1$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$  a platí  $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{(n+1)^p}$ . Proto podle Leibnizova

kritéria řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$  konverguje pro  $0 < p \leq 1$  neabsolutně.

---

**Příklad 6.** Vyšetřujte absolutní a neabsolutní konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1/n}}$ .

*Řešení:*

Protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^p \cdot \frac{1}{n^{p+1/n}} \right) = 1$  a řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  konverguje pro  $p > 1$ , konverguje i

řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1/n}}$  pro  $p > 1$  absolutně.

Pro  $p \leq 0$  není  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1/n}}$  rovna nule, a proto pro  $p \leq 0$  řada diverguje.

Pro  $0 < p \leq 1$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1/n}} = 0$ . Abychom ukázali, že pro tuto  $p$  řada kon-

verguje, stačí podle Leibnizova kritéria ukázat, že je posloupnost  $a_n = \frac{1}{n^{p+1/n}}$

od jistého  $n$  klesající. Uvažujme funkci  $f(x) = \frac{1}{x^{p+1/x}}$ . Její derivace  $f'(x) =$

$\frac{1}{x^{p+1/x}} \cdot \frac{-px + \ln x - 1}{x^2}$  je pro dostatečně velká  $x$  záporná. Proto pro taková  $x$

je funkce  $f(x)$  klesající. Proto je pro dostatečně velká  $n$  posloupnost  $a_n = \frac{1}{n^{p+1/n}}$

klesající, a tedy daná řada konverguje pro  $0 < p \leq 1$  neabsolutně.

---

**Příklad 7.** V závislosti na  $x \in \mathbb{R}$  vyšetřujte absolutní a neabsolutní konvergenci

řady  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}$ .

*Řešení:*

Nejdříve budeme zkoumat absolutní konvergenci řady. K tomu lze použít například limitního podílového kritéria. Protože je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} \sin^2 x = 2 \sin^2 x,$$

řada konverguje absolutně pro  $|\sin x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , tj. pro  $x \in \left(\frac{4k-1}{4}\pi, \frac{4k+1}{4}\pi\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Pro  $x \in \left(\frac{4k+1}{4}\pi, \frac{4k+3}{4}\pi\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , je  $|\sin x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Proto není

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}$  rovna nule. Tedy pro  $x \in \left(\frac{4k+1}{4}\pi, \frac{4k+3}{4}\pi\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , řada diverguje.

Pro  $x = \frac{2k+1}{4}\pi$  se jedná o řadu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ , která konverguje neabsolutně.

---

**Příklad 8.** Ze znalosti součtu řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$  najděte součty řady

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

získaných z této řady záměnou jejích členů

*Řešení:*

Protože se jedná o součet řady, která vzniká z neabsolutně konvergentní řady

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ , závisí součet této řady na pořadí jejích členů. V našem případě je

$$\begin{aligned} & 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4n+1} + 0 + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2} + \dots = \\ & = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n+4} + \dots + \\ & + 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \dots + 0 + \frac{1}{4n+2} + 0 - \frac{1}{4n+4} + \dots \end{aligned}$$

Tedy součet této řady je  $s = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2$ .

---

**Příklad 9.** Ze znalosti součtu řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$  najděte součty řady

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

získaných z této řady záměnou jejích členů

*Řešení:*

Protože se jedná o součet řady, která vzniká z neabsolutně konvergentní řady

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ , závisí součet této řady na pořadí jejích členů. V našem případě je

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} + \dots = \\
& = 1 + 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n+1} + 0 - \frac{1}{2n+2} + \dots + \\
& + 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots + 0 - \frac{1}{2(2n+1)} + \frac{1}{2(2n+2)} + \dots
\end{aligned}$$

Tedy součet této řady je  $s = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2$ .

---

V předcházejících případech jste si mohli všimnout, že pro alternující řady hrálo velkou roli Leibnizovo kritérium konvergence. Toto kritérium je speciálním případem obecnějšího *Abelova kritéria* konvergence, které nyní dokážeme. Nejprve odvodíme jeden vztah pro konečný součet posloupnosti, jejíž členy jsou součinem dvou posloupností. Tato metoda sčítání se nazývá *Abelova parciální sumace*. Pro

každá přirozená  $n$  a  $k$  a každé dvě posloupnosti  $a_n$  a  $b_n$  označíme  $s_{n,k} = \sum_{i=0}^k a_{n+i}$ .

Pak je  $a_{n+i} = s_{n,i} - s_{n,i-1}$  (pro  $i < 0$  klademe  $s_{n,i} = 0$ ). Pak ale je

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^k a_{n+i} b_{n+i} &= \sum_{i=0}^k (s_{n,i} - s_{n,i-1}) b_{n+i} = \sum_{i=0}^k s_{n,i} b_{n+i} - \sum_{i=1}^k s_{n,i-1} b_{n+i} = \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} s_{n,i} (b_{n+i} - b_{n+i+1}) + s_{n,k} b_{n+k}.
\end{aligned}$$

Platí *Abelovo kritérium* konvergence: Jestliže má posloupnost  $a_n$  omezené součty  $s_{n,k}$ , tj. existuje  $K \in \mathbb{R}$  takové, že pro každé přirozené  $n$  a  $k$  je  $|s_{n,k}| \leq K$ , posloupnost  $b_n$  je monotonní a  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  konverguje.

Jestliže totiž označíme pro pevné  $n \in \mathbb{N}$  součet  $S_{n,k} = \sum_{i=0}^k a_{n+i} b_{n+i}$  pak je

$$\begin{aligned}
|S_{n,k}| &= \left| \sum_{i=0}^k s_{n,i} (b_{n+i} - b_{n+i+1}) + s_{n,k} b_{n+k} \right| \leq \\
&\leq \sum_{i=0}^{k-1} |s_{n,i}| \cdot |b_{n+i} - b_{n+i+1}| + |s_{n,k}| \cdot |b_{n+k}| \leq \\
&\leq K \left( \sum_{i=1}^{k-1} |b_{n+i} - b_{n+i+1}| + |b_{n+k}| \right).
\end{aligned}$$

Protože je posloupnost  $b_n$  monotonní, mají výrazy  $b_{n+i} - b_{n+i+1}$  stále stejná zna-

ménka. Proto je  $\sum_{i=1}^{k-1} |b_{n+i} - b_{n+i+1}| = |b_n - b_{n+k}|$ . Tedy

$$|S_{n,k}| \leq K \left( |b_n - b_{n+k}| + |b_{n+k}| \right).$$

Protože je posloupnost  $b_n$  monotonní, platí pro každé  $k$  nerovnost  $|S_{n,k}| \leq 3K|b_n|$ . Protože je  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , je  $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_{n,k}| = 0$  nezávisle na  $k$ . Proto konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$


---

**Příklad 10.** Vyšetřujte konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$ .

*Řešení:*

Označme  $a_n$  a  $b_n$  posloupnosti  $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$  a  $b_n = \frac{\ln^{100} n}{n}$ . Protože pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí  $a_{n+8} = a_n$  a  $a_1 = a_3 = -a_5 = -a_7 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $a_2 = -a_6 = 1$  a  $a_4 = a_8 = 0$ ,

je  $|s_{n,k}| = \left| \sum_{i=0}^k \sin \frac{(n+i)\pi}{4} \right| \leq \sqrt{2} + 1$ . Podle Abelova kritéria stačí k důkazu

konvergence dané řady dokázat, že posloupnost  $b_n = \frac{\ln^{100} n}{n}$  má limitu nula a je od jistého  $n_0$  klesající. Označme  $f(x) = \frac{\ln^{100} x}{x}$ . Pomocí l'Hospitalova pravidle snadno

ukážeme, že  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{100} x}{x} = 0$ . Protože derivace této funkce  $f'(x) = \frac{100 - \ln x}{x^2}$  je pro  $x \geq e^{101}$  záporná, je funkce  $f(x)$  pro  $x \geq e^{101}$  klesající. Proto je pro  $n \geq e^{101}$

klesající i posloupnost  $b_n$ . Tedy posloupnosti  $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$  a  $b_n = \frac{\ln^{100} n}{n}$  splňují

předpoklady Abelova kritéria, a proto řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \cdot \sin \frac{n\pi}{4}$  konverguje.

---

**Příklad 11.** Vyšetřujte konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ .

*Řešení:*

Označme posloupnost  $a_n = (-1)^n \sin^2 n$  a posloupnost  $b_n = \frac{1}{n}$ . Protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  a posloupnost  $b_n$  je klesající, stačí k důkazu konvergence dané řady ukázat, že je

omezená posloupnost součtů  $s_{n,k} = \sum_{j=0}^k a_{n+j} = \sum_{j=0}^k (-1)^{n+j} \sin^2(n+j)$ . Protože je

$$\sin^2(n+j) = \frac{1}{2} (1 - \cos 2(n+j)) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(1 - e^{i(n+j)}),$$



Dostaneme pro  $s_{n,k}$  vztah

$$\begin{aligned} s_{n,k} &= \frac{(-1)^n}{2} \operatorname{Re} \left( \sum_{j=0}^k ((-1)^j - (-1)^j e^{i(n+j)}) \right) = \\ &= \frac{(-1)^n}{2} \left( \frac{1 - (-1)^k}{2} - e^{in} \frac{1 - (-1)^k e^{ik}}{1 + e^i} \right). \end{aligned}$$

Z této rovnosti získáme odhad  $|s_{n,k}| \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{1 - \cos 1} \right) = K$ . Tedy protože jsou součty  $|s_{n,k}| \leq K$ , konverguje řada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$  podle Abelova kritéria.

---

## CVIČENÍ 23 — Mocninné řady

### Příklad 1.

Najděte poloměr a interval konvergence mocninné řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$ , kde  $p \in \mathbb{R}$ .

*Řešení:*

Poloměr konvergence dané řady najdeme ze vztahu

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p}{n^p} = 1.$$

Protože střed konvergence je  $x_0 = 0$ , je interval konvergence  $(-1, 1)$ .

---

### Příklad 2.

Najděte poloměr a interval konvergence mocninné řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ .

*Řešení:*

Poloměr konvergence dané řady najdeme ze vztahu

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot (3^n + (-2)^n)}{n \cdot (3^{n+1} + (-2)^{n+1})} = \frac{1}{3}.$$

Protože střed konvergence je  $x_0 = -1$ , je interval konvergence  $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}\right)$ .

---

### Příklad 3.

Najděte poloměr a interval konvergence mocninné řady  $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} x^n$ , kde  $a \in (0, 1)$ .

*Řešení:*

Poloměr konvergence dané řady najdeme ze vztahu  $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ , protože  $0 < a < 1$ . Protože poloměr konvergence této mocninné řady je  $R = \infty$ , je interval konvergence mocninné řady  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ .

---

### Příklad 4.

Najděte poloměr a interval konvergence mocninné řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$ , kde  $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$  a  $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)$ .

*Řešení:*

Poloměr konvergence dané řady najdeme ze vztahu

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{2n+2}{2n+1} = 2.$$

Protože střed konvergence je  $x_0 = 1$ , je interval konvergence  $(-1, 1)$ .

---

### Příklad 5.

Najděte poloměr a interval konvergence mocninné řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}$ , kde  $a, b > 0$

*Řešení:*

Poloměr konvergence dané řady najdeme ze vztahu

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = \max(a, b).$$

Protože střed konvergence je  $x_0 = 0$ , je interval konvergence  $(-R, R)$ .

---

### Příklad 6.

Najděte poloměr a interval konvergence mocninné řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + (-1)^n)^n}{n} x^n$ .

*Řešení:*

V tomto případě neexistuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + (-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ . Proto použijeme obecného vztahu  $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 4$ . Protože střed konvergence mocninné řady je  $x_0 = 0$ , je interval konvergence  $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ .

---

**Příklad 7.** Najděte oblast konvergence řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ .

*Řešení:*

Jestliže označíme  $y = \frac{1-x}{1+x}$ , dostaneme mocninnou řadu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{2n+1}$ . Její interval konvergence je  $|y| < 1$ . Tedy řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$  konverguje pro  $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1$  a diverguje pro  $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| > 1$ . Je-li  $\frac{1-x}{1+x} = 1$ , řada diverguje (podle integrálního

kritéria) a pro  $\frac{1-x}{1+x} = -1$  řada konverguje (neabsolutně). Tedy oblast konvergence je dána nerovnostmi  $-1 \leq \frac{1-x}{1+x} < 1$ , tj.  $x > 0$ .

---

**Příklad 8.** Najděte oblast konvergence řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$ .

*Řešení:*

Jestliže označíme  $y = e^{-x}$ , dostaneme mocninou řadu  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} y^n$ , která konverguje pro  $|y| < e$  a diverguje pro  $|y| > e$ . Tedy daná řada konverguje pro  $e^{-x} < e$ , tj. pro  $x > -1$  a diverguje pro  $x < -1$ . Pro  $x = -1$  se jedná o číselnou řadu  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^n$ . Ale protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^n = \sqrt{e} \neq 0$ , řada pro  $x = -1$  diverguje. Obor konvergence tedy je množina  $x > -1$ .

---

**Příklad 9.** Rozviňte funkci  $f(x) = e^{-x^2}$  do mocninné řady se středem v bodě  $x_0 = 0$ .

*Řešení:*

Protože pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  je  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ , je  $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$ .

---

**Příklad 10.** Rozviňte funkci  $f(x) = \cos^2$  do mocninné řady se středem v bodě  $x_0 = 0$ .

*Řešení:*

Platí rovnost  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ . Protože pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  je  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ , je  $\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{(2n)!} x^{2n}$ , a tedy  $\cos^2 x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$ .

---

**Příklad 11.** Rozviňte funkci  $f(x) = \frac{x^{10}}{1-x}$  do mocninné řady se středem v bodě  $x_0 = 0$ .

*Řešení:*

Protože pro  $|x| < 1$  je  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , platí pro  $|x| < 1$  rovnost  $\frac{x^{10}}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{10+n} = \sum_{n=10}^{\infty} x^n$ .

---

**Příklad 12.** Rozviňte funkci  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$  do mocninné řady se středem v bodě  $x_0 = 0$ .

*Řešení:*

Pro  $|x| < 1$  platí rovnost  $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x))$ . Ze známého vztahu  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ , který platí pro  $|x| < 1$ , dostaneme rozvoj

$$\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$


---

**Příklad 13.** Rozviňte funkci  $f(x) = \frac{12-5x}{6-5x-x^2}$  do mocninné řady se středem v bodě  $x_0 = 0$ .

*Řešení:*

Rozložíme-li funkci  $f(x)$  na parciální zlomky, dostaneme  $f(x) = \frac{12-5x}{6-5x-x^2} = \frac{6}{x+6} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1+x/6} + \frac{1}{1-x}$ . Jestliže použijeme známý rozvoj obou funkcí do geometrické řady, dostaneme  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{6}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right) x^n$ .

Protože použité rozvoje platí pro  $\left|\frac{x}{6}\right| < 1$  a  $|x| < 1$ , platí tento rozvoj na množině  $|x| < 1$ .

---

**Příklad 14.** Rozviňte funkci  $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$  do mocninné řady se středem v bodě  $x_0 = 0$ .

*Řešení:*

Jestliže napíšeme  $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3}$ , lze pro  $|x| < 1$  použít rozvoj  $\frac{1}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$ . Tedy pro  $|x| < 1$  lze psát  $\frac{1}{1+x+x^2} = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , kde  $c_{3k} = 1$ ,  $c_{3k+1} = -1$  a  $c_{3k+2} = 0$ , což lze zapsat jako  $\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin \frac{2(n+1)\pi}{3}$ .

---

**Příklad 15.** Najděte rozvoj funkce  $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$  do mocninné řady se středem v bodě  $x_0 = 0$ .

*Řešení:*

Protože derivace funkce  $f(x)$  je  $f'(x) = 1 + \ln(1+x)$ , lze pro  $|x| < 1$  psát

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n} x^n. \text{ Její integrací dostaneme } (1+x)\ln(1+x) = C +$$

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} x^{n+1}. \text{ Po dosazení } x = 0 \text{ dostaneme } C = 0. \text{ Tedy pro } |x| < 1 \text{ je}$$

$$(1+x)\ln(1+x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n.$$


---

**Příklad 16.** Najděte rozvoj funkce  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{2-x^2}$  do mocninné řady se středem v bodě  $x_0 = 0$ .

*Řešení:*

Derivace funkce  $f(x)$  je  $f'(x) = \frac{4+2x^2}{4+x^4} = \frac{1+x^2/2}{1+x^4/4}$ . Jestliže použijeme rozvoj

do geometrické řady, lze pro  $|x| < \sqrt{2}$  psát  $f'(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} x^{4n} =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} x^{4n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot 4^n} x^{4n+2}$ . Integrací této rovnosti a s použitím toho, že

$f(0) = 0$ , dostaneme  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(4n+1)} x^{4n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(4n+3)} x^{4n+3}$ , což

platí pro  $|x| < \sqrt{2}$ . Lze se snadno přesvědčit, že tento výraz lze psát ve tvaru

$$\operatorname{arctg} \frac{2x}{2-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{[n/2]} \frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}, \text{ kde } [n/2] \text{ je celá část čísla } \frac{n}{2}.$$


---

**Příklad 17.** Najděte rozvoj funkce  $f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}$  do mocninné řady se středem v bodě  $x_0 = -1$ .

*Řešení:*

Označme  $y = x - x_0 = x + 1$ . Pak dostaneme  $f(y) = -\ln(1+y^2)$ . Použijeme-li

známého rozvoje  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ , který platí pro  $|x| < 1$ , dostaneme

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} y^{2n}. \text{ Po zpětné substituci dostaneme, že pro } x \in (-2, 0) \text{ platí}$$

$$f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x+1)^{2n}.$$


---

**Příklad 18.** Rozviňte funkci  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  do mocninné řady v proměnné  $\frac{1}{x}$ .

*Řešení:*

Zavedeme novou proměnnou  $y = \frac{1}{x}$ . Pak platí  $f(y) = -\frac{y}{1-y}$ . Rozvineme-li tuto

funkci do mocninné řady, dostaneme vztah  $f(y) = -\sum_{n=1}^{\infty} y^n$ , který platí pro  $|y| < 1$ .

Zpětnou substitucí získáme vztah  $\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$ , který platí pro  $|x| > 1$ .

---

**Příklad 19.** Rozviňte funkci  $f(x) = \ln x$  do mocninné řady v proměnné  $\frac{x-1}{x+1}$ .

*Řešení:*

Zavedeme novou proměnnou  $y = \frac{x-1}{x+1}$ . Z tohoto vztahu plyne  $x = \frac{1+y}{1-y}$ . Pak

dostaneme  $\ln x = \ln \frac{1+y}{1-y} = \ln(1+y) - \ln(1-y)$ . Použijeme-li známé vyjádření

logaritmu pomocí řad, dostaneme, že pro  $|y| < 1$  platí  $\ln \frac{1+y}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{2n+1}$ . Po

zpětné substituci dostaneme  $\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$ , který platí pro  $x > 0$

a  $-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1$ , tj. pro  $x > 0$ .

---

**Příklad 20.** Rozviňte do mocninné řady se středem v bodě  $x_0 = 0$  funkci  $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

*Řešení:*

Jestliže použijeme rozvoj funkce  $e^x$  do mocninné řady, dostaneme integrand ve

tvaru  $e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}$ . Protože poloměr konvergence této mocninné řady je

$R = \infty$ , platí pro každé  $x \in \mathbb{R}$  vztah  $\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ .

---

**Příklad 21.** Rozviňte do mocninné řady se středem v bodě  $x_0 = 0$  funkci  $f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt$ .

*Řešení:*

Pro  $|t| < 1$  je  $\operatorname{arctg} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}$ . Tedy pro  $|x| < 1$  platí rovnost  $f(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} x^{2n+1}$ .

---



CVIČENÍ 24 — Sčítání řad. Výpočet určitých integrálů pomocí řad

**Příklad 1.** Nalezněte součet řady  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$ .

*Řešení:*

Podle podílového kritéria řada konverguje. Jestliže budeme psát  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} 2^n =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} 2^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} + e^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!} + e^2 = 3e^2, \text{ kde jsme využili}$$

toho, že  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ .

---

**Příklad 2.** Najděte součet řady  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$ .

*Řešení:*

Uvedenou řadu zapíšeme ve tvaru  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left( \frac{2n+1}{2} - \frac{1}{2} \right) =$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \frac{\cos 1 - \sin 1}{2}, \text{ kde jsme využili řad pro } \cos x \text{ a } \sin x.$$


---

**Příklad 3.** Najděte součet řady  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$ .

*Řešení:*

Abychom mohli použít řadu  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ , řadu upravíme. Postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} + e^{x/2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} + e^{x/2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2} + \frac{x}{2} e^{x/2} + e^{x/2} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1\right) e^{x/2}. \end{aligned}$$


---

**Příklad 4.** Najděte součet řady  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)!} x^n$ .

*Řešení:*

Abychom mohli použít součtů známých řad, napíšeme  $n^2 = \frac{1}{4}(2n+1)(2n) - \frac{1}{4}(2n+1) + \frac{1}{4}$ . Tím dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)!} x^n = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n)}{(2n+1)!} x^n - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(2n+1)!} x^n + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^n.$$

Protože pro  $x > 0$  je  $x = (\sqrt{x})^2$ , je pro  $x > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)!} x^n &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (\sqrt{x})^{2n+2} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (\sqrt{x})^{2n} + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (\sqrt{x})^{2n} = \frac{x+1}{4\sqrt{x}} \sinh \sqrt{x} - \frac{\cosh \sqrt{x}}{4}. \end{aligned}$$

Pro  $x < 0$  je  $x = -(\sqrt{|x|})^2$ . Tedy pro  $x < 0$  dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)!} x^n &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} (\sqrt{|x|})^{2n+2} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sqrt{|x|})^{2n} + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\sqrt{|x|})^{2n} = \frac{x+1}{4\sqrt{|x|}} \sin \sqrt{|x|} - \frac{\cos \sqrt{|x|}}{4}. \end{aligned}$$

**Příklad 5.** Najděte součet řady  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ .

*Řešení:*

Řada konverguje pro  $|x| < 1$ . Označme její součet  $f(x)$ . Pro  $|x| < 1$  dostaneme derivováním vztah  $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$ . Integrací dostaneme pro  $|x| < 1$

vztah  $f(x) = \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$ , kde  $C$  je reálná konstanta. Dosazením

bodů  $x = 0$  dostaneme  $C = 0$ . Tedy pro  $|x| < 1$  je  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \ln \sqrt{\left| \frac{1+x}{1-x} \right|}$ .

**Příklad 6.** Najděte součet řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ .

*Řešení:*

Řada konverguje pro  $|x| \leq 1$ . Označme její součet  $f(x)$ . Vynásobíme-li tuto funkci proměnnou  $x$  a dvakrát derivujeme, dostaneme pro  $|x| < 1$  vztahy  $(xf(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  a  $(xf(x))'' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ . Integrací dostaneme pro  $|x| < 1$  vztah  $(xf(x))' = -\ln(1-x) + C$ . Dosazení bodu  $x = 0$  dává  $C = 0$ , tj.  $(xf(x))' = -\ln(1-x)$ . Další integrace nás vede k tomu, že pro  $|x| < 1$  platí  $xf(x) = (1-x)\ln(1-x) + x + C$ , kde  $C$  je konstanta. Dosazení  $x = 0$  dává  $C = 0$ . Tedy pro  $|x| < 1$ ,  $x \neq 0$  dostaneme  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x)$ . Pomocí l'Hospitalova pravidla se lze přesvědčit, že  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . Protože řada konverguje také v bodech  $x = \pm 1$ , je  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$  (což jsme věděli dříve) a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = 1 - 2 \ln 2$  (což jsme zatím nevěděli).

---

**Příklad 7.** Najděte součet řady  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2 x^n$ .

*Řešení:*

Tato řada konverguje pro  $|x| < 1$ . Na tomto intervalu ji lze proto integrovat člen po členu. Ale abychom dostali integraci řady, jejíž součet známe (geometrickou řadu), nejprve ji trochu upravíme. Označme součet řady  $f(x)$ . Tuto funkci vydělíme proměnnou  $x$  a dostaneme  $\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2 x^{n-1}$ . Pro  $|x| < 1$  je její primitivní

funkce  $g(x) = \int \frac{f(x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^n$ . Abychom získali geometrickou řadu, vydělíme funkci  $g(x)$  proměnnou  $x$  a integrujeme. Takto dostaneme pro  $|x| < 1$  vztah  $\int \frac{g(x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n = \frac{x}{1+x}$ . Nyní přejdeme zpět k funkci  $f(x)$ .

Nejprve derivací dostaneme  $\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{(1+x)^2}$ , tj.  $g(x) = \int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{x}{(1+x)^2}$ .

Podobným způsobem získáme  $\frac{f(x)}{x} = \frac{1-x}{(1+x)^3}$ , a tedy pro  $|x| < 1$  je  $f(x) = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$ .

---

**Příklad 8.** Najděte součet řady  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$ .

*Řešení:*

Tato řada konverguje pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ . Označíme-li její součet  $f(x)$ , platí pro každé  $x \in \mathbb{R}$  rovnost  $\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = xe^{x^2}$ . Tedy  $f(x) = (xe^{x^2})' = (2x^2 + 1)e^{x^2}$ .

Tuto řadu jsme mohli sečíst také bez použití integrace. Platí totiž

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n-1)!} = e^{x^2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n!} = e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}.$$

**Příklad 9.** Najděte integrál  $\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx$ .

*Řešení:*

Tento integrál lze najít tak, že integrovanou funkci rozvineme do vhodné řady a zaměníme pořadí sumy a integrace. Pro  $|x| < 1$  je  $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ . Když

použijeme tuto řadu, dostaneme  $\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \ln x dx$ .

Protože pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí na intervalu  $(0, 1)$  nerovnost  $|x^n \ln x| \leq \frac{e^{-1}}{n}$ , lze

ukázat, že můžeme zaměnit pořadí sumy a integrace. Proto je  $\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx =$

$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^n \ln x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$ , kde jsme použili toho, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$

je  $\int_0^1 x^n \ln x dx = -\frac{1}{(n+1)^2}$ .

Abychom sečetli tuto řadu, rozložíme sčítance na parciální zlomky. Snadno se přesvědčíme, že platí  $\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$ . Z toho dostaneme  $\int_0^1 \ln x \cdot$

$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) = 2 - \frac{\pi^2}{6}$ .

V posledním součtu jsme použili známého součtu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Obdobné součty se objevují při sčítání mocninných řad poměrně často, ale odvodit je, není bez použití

jiných matematických prostředků, např. Fourierovy řady nebo funkce komplexní proměnné, snadné.

---

**Příklad 10.** Najděte integrál  $\int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{e^x + 1}$ .

*Řešení:*

Tento integrál lze najít také tak, že integrovanou funkci rozvineme do řady v proměnné  $e^{-x}$ . Protože pro  $x > 0$  je  $e^x > 1$ , nelze přímo rozvinout funkci  $\frac{1}{e^x + 1}$

pomocí proměnné  $e^x$ , ale musíme napsat  $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(n+1)x}$ .

Tedy platí  $\int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{e^x + 1} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x e^{-(n+1)x} \, dx$ . Opět lze dokázat (v tomto případě se použije jistá věta z teorie Lebesgueova integrálu, který je pro limitní přechody podstatně vhodnější než integrál Riemannův), že lze zaměnit pořadí sčítání a integrace. Protože pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $\int_0^{+\infty} x e^{-nx} \, dx = \frac{1}{n^2}$ , dostaneme

$\int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{e^x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ . Tento součet lze psát jako

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2 \pi^2}{6} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Tedy  $\int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{12}$ .

---