Přednáška 12

Mocninné řady

Posloupnosti funkcí

V této přednášce se budeme zabývat tzv. mocninnými řadami. Ty se v matematice poměrně často objevují v úlohách, kdy nelze řešení vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Nejprve se krátce zmíníme o posloupnostech funkcí a jejich limitách.

Definice. *Posloupnost funkcí* jedné reálné proměnné je zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny funkcí, které jsou definovány na množině $M \subset \mathbb{R}$.

Definice říká, že každému přirozenému $n \in \mathbb{N}$ je přiřazena právě jedna funkce $f_n(x)$, která je definována na společném definiční oboru M všech funkcí.

Limitu posloupnosti funkcí $f_n(x)$ můžeme definovat dvěma způsoby.

V prvním vezmeme pevný bod $x \in M$ a definujeme posloupnost čísel $f_n(x)$. Má-li tato číselná posloupnost konečnou limitu $f(x)$ pro každé $x \in M$, řekneme, že posloupnost funkcí $f_n(x)$ konverguje na množině M bodově k funkci $f(x)$.

Definice. Jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $x \in M$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ platí $\big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon$, říkáme, že posloupnost funkcí $f_n(x)$ *konverguje na množině M bodově* k funkci $f(x)$ nebo že funkce $f(x)$ je bodová limita posloupnosti funkcí $f_n(x)$.

Při bodové konvergenci hledáme číslo n_0 k danému $\varepsilon > 0$ a danému $x \in M$. Tedy toto n_0 je obecně funkce ε a $x \in M$. Pomocí značek lze bodovou konvergenci posloupnosti funkcí zapsat jako

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in M\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n > n_0 \ \text{ platí } \ \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon\,.$$

Bodová konvergence posloupností funkcí se zda celkem přirozený pojem. Bohužel obecně nelze o funkci $f(x)$, která je bodovou limitou posloupnosti funkcí $f_n(x)$, dokázat skoro nic. Například pokud platí

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n\,, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,, \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = B\,,$$

kde $f(x)$ je bodová limita posloupnosti funkcí $f_n(x)$, neplyne z toho, že $A = B$.

Příklad: Na intervalu $(0,1)$ uvažujme posloupnost funkcí $f_n(x) = x^n$. Pak je

$$a_n = \lim_{x\to 1_-} x^n = 1\,, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \quad \text{a} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0\,, \quad \lim_{x\to 1_-} f(x) = 0 \neq 1\,.$$

Důvod je ten, že v definici bodové konvergence je n_0 závislé na $x \in M$. Proto se definuje jiná, tzv. stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí, ve které je k danému $\varepsilon > 0$ hodnota n_0 stejná pro všechna $x \in M$.

Definice. Jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $x \in M$ a pro každé $n > n_0$ platí nerovnost $\big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon$, říkáme, že posloupnost funkcí $f_n(x)$

konverguje na množině M stejnoměrně k funkci $f(x)$ nebo že funkce $f(x)$ je na množině M stejnoměrná limita posloupnosti funkcí $f_n(x)$.

Pomocí značek lze stejnoměrnou konvergenci zapsat jako

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}\,, \; \forall n > n_0\,, \; \forall x \in M \quad \text{platí} \quad \bigl|f_n(x) - f(x)\bigr| < \varepsilon\,.$$

Obvykle se tvrzení, že posloupnost funkcí $f_n(x)$ konverguje bodově k funkci $f(x)$ zapisuje jako $f_n(x) \to f(x)$ a pro tvrzení, že posloupnost funkcí $f_n(x)$ konverguje k funkci $f(x)$ stejnoměrně jako $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

Ze stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na množině M plyne její bodová konvergence k funkci $f(x)$. Opak ale není pravda. Tvrzení, že posloupnost funkcí $f_n(x)$ konverguje na množině M k funkci $f(x)$, se většinou dokazuje pomocí následující věty.

Věta. Posloupnost funkcí $f_n(x)$ konverguje na množině M k funkci $f(x)$ stejnoměrně právě tehdy, když je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in M} \bigl|f_n(x) - f(x)\bigr| \right) = 0\,.$$

Příklad: Ukažte, že posloupnost funkcí $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ nekonverguje stejnoměrně na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Řešení: Pro každé pevné $x \in \langle 0, 1\rangle$ je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \bigl(x^n - x^{2n}\bigr) = 0\,.$$

Tedy posloupnost funkcí $f_n(x)$ konverguje na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ bodově k funkci $f(x) = 0$. Na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ budeme pro dané n hledat supremum funkce

$$\varphi_n(x) = \bigl|f_n(x) - f(x)\bigr| = \bigl|f_n(x)\bigr| = x^n - x^{2n}\,.$$

Protože je funkce $\varphi_n(x)$ spojitá na kompaktním intervalu $\langle 0, 1\rangle$, má na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ maximum. Její derivace $\varphi_n'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1}$ je rovna nule v bodě $x_n = 2^{-1/n}$. Protože je $\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0$ a $\varphi_n(x_n) = \frac{1}{4}$, je

$$\sup_{x\in\langle 0,1\rangle} \bigl|f_n(x) - f(x)\bigr| = \sup_{x\in\langle 0,1\rangle} f_n(x) = \tfrac{1}{4} \neq 0\,.$$

Pro stejnoměrně konvergentní posloupnosti funkcí platí následující věty:

Věta. Jestliže posloupnost funkcí $f_n(x)$ konverguje k funkci $f(x)$ stejnoměrně na množině M, pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in M}} f(x) \right) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in M}} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right).$$

Speciálně je stejnoměrná limita posloupnosti spojitých funkcí na množině M spojitá funkce.

Věta. Nechť $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$. Jsou-li $F_n(x)$ primitivní funkce k funkcím $f_n(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$, je $F_n(x) \rightrightarrows F(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$ a funkce $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$.

Věta. Nechť posloupnost funkcí $f_n'(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\mathcal{I}$ a existuje $x_0 \in \mathcal{I}$ takové, že číselná posloupnost $f_n(x_0)$ konverguje. Pak $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$ a platí $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Řady funkcí

Nechť je dána posloupnost funkcí $f_n(x)$ na množině M. Pro každé $x \in M$ označme

$$s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\,, \tag{1}$$

tzv. *N-tý částečný součet*. Takto dostaneme posloupnost funkcí $s_N(x)$.

Definice. Množinu všech $x \in M$, pro která konverguje posloupnost částečných součtů $s_N(x)$, tj. pro které existuje konečná limita

$$s(x) = \lim_{N\to\infty} s_N(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\,, \tag{2}$$

nazýváme *obor konvergence* řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a funkci $s(x)$ součtem této řady.

Je-li limita v (2) bodová, říkáme, že řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje k funkci $s(x)$ bodově a je-li limita v (2) stejnoměrná, říkáme, že řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje k funkci $s(x)$ stejnoměrně.

Pro pevné $x \in M$ zkoumáme vlastně konvergenci číselné řady. Proto lze použít kritéria konvergence číselných řad. Z nich plyne následující věta.

Věta. Nechť existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|f_n(x)\right|} = q(x) \quad \text{nebo} \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = q(x)\,.$$

Pak řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje na množině těch $x \in M$, pro kterou je $q(x) < 1$ a diverguje na množině $x \in M$, pro kterou je $q(x) > 1$.

V této přednášce se budeme zabývat *mocninnými řadami*, tj. řadami

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

a v další pak tzv. *Fourierovými řadami*, tj. řadami

$$f(x) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x\big)\,.$$

Mocninné řady

Definice. Nechť jsou dána reálná čísla a a c_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Pak řadu funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots \tag{3}$$

nazýváme *mocninná řada.*
Reálné číslo a nazýváme *střed mocninné řady* a čísla c_n *koeficienty* mocninné řady (3).

Je zřejmé, že mocninná řada (3) vždy konverguje ve svém středu, tj. pro $x = a$, a její součet je v tomto bodě roven c_0.
Z odmocninového kritéria konvergence plyne, že pokud existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|c_n(x-a)^n\right|} = |x-a| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\,,$$

mocninná řada konverguje pro všechna x, pro která je

$$\frac{|x-a|}{R} < 1\,, \quad \text{kde} \quad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

a diverguje pro všechna x, pro která je $|x-a| > R$.
Podobně z podílového kritéria konvergence dostaneme, že pokud existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n}\right| = |x-a| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|,$$

mocninná řada konverguje pro všechna x, pro která je

$$|x-a| < R\,, \quad \text{kde} \quad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$$

a diverguje pro všechna x, pro která je $|x-a| > R$.

Obecně platí

Věta. Existuje právě jedno $R \geq 0$ takové, že mocninná řada (3) konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$ taková, že $|x-a| < R$ a diverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$ taková, že $|x-a| > R$.

Definice. Nezáporné číslo R z předchozí věty se nazývá *poloměr konvergence* mocninné řady (3).

Pro poloměr konvergence mocninné řady (3) platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\,,$$

kde značíme $\frac{1}{0} = +\infty$ a $\frac{1}{+\infty} = 0$.
Poloměr konvergence lze také určit ze vztahů

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\,, \qquad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|, \tag{4}$$

pokud ovšem tyto limity existují.

Věta. Nechť je $R > 0$ poloměr konvergence mocninné řady (3). Pak na intervalu $|x-a| < R$ mocninná řada konverguje absolutně a pro každé ρ, $0 < \rho < R$ konverguje mocninná řada na intervalu $|x-a| \leq \rho$ stejnoměrně.

Jestliže má mocninná řada (3) poloměr konvergence $R > 0$, definuje pro $|x-a| < R$ funkci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \,. \tag{5}$$

Uvedeme některé vlastnosti funkce $f(x)$ definované vztahem (5).

Věta. Nechť má mocninná řada (3) poloměr konvergence $R > 0$. Pak je funkce $f(x)$ definovaná vztahem (5) na intervalu $|x-a| < R$ spojitá.

Věta. Nechť má mocninná řada (3) poloměr konvergence $R > 0$. Pak má mocninná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} (x-a)^n$$

poloměr konvergence R a na intervalu $|x-a| < R$ platí

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} (x-a)^n \,.$$

Z této věty plyne, že pokud je funkce $f(x)$ definována řadou s poloměrem konvergence $R > 0$, má na intervalu $|x-a| < R$ derivaci, kterou dostaneme tak, že v řadě derivujeme každý její člen. Tato derivace je zase definována řadou se stejným poloměrem konvergence R a lze ji tedy opět derivovat. Proto má funkce $f(x)$ definovaná pro $|x-a| < R$ rovností (5) na tomto intervalu derivace všech řádů.

Věta. Nechť má mocninná řada (3) poloměr konvergence $R > 0$ a funkce $f(x)$ je na intervalu $|x-a| < R$ definována vztahem (5). Pak je

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \,. \tag{6}$$

Věta. Nechť má mocninná řada (3) poloměr konvergence $R > 0$. Pak má mocninná řada

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n (x-a)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} (x-a)^n$$

poloměr konvergence R a na intervalu $|x-a| < R$ je funkce $F(x)$ definovaná touto řadou primitivní funkcí k funkci $f(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $|x-a| < R$.

Věta. Nechť má řada $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ poloměr konvergence $R > 0$ a číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n$ konverguje. Pak platí

$$\lim_{x \to R_+} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n \,.$$

Příklad: Uvažujme geometrickou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. Pak je $c_n = 1$ pro každé n, a tedy $R = 1$. Tedy pro $|x| < 1$ lze definovat funkci

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \,.$$

Pro $|x| < 1$ platí rovnost

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = 1 + x\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots\right) = 1 + xf(x)\,.$$

Tedy pro $|x| < 1$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,. \tag{7}$$

Pro $|x| < 1$ lze vztah (7) derivovat. Derivace pak pro $|x| < 1$ dává

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \,.$$

Z tohoto vztahu například pro $|x| < 1$ plyne

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n + \frac{1}{1-x}\,,$$

neboli

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

Jestliže vztah (7) integrujeme, dostaneme pro $|x| < 1$ rovnost

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,.$$

Když v tomto vztahu položíme $x \mapsto -x$, dostaneme pro $|x| < 1$ rovnost

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n \,. \tag{8}$$

Protože je podle Leibnizova kritéria řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergentní, je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln 2\,.$$

Příklad: Uvažujme funkci $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Její derivace je $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Jestliže pro tuto funkci použijeme vztah (7), kde zaměníme $x \mapsto -x^2$, dostaneme pro $|x| < 1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\,.$$

Protože má tato řada poloměr konvergence $R = 1$, dostaneme pro $|x| < 1$ vztah

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + c\,,$$

kde c je konstanta. Jestliže do této rovnosti dosadíme $x = 0$, tj. bod, kde umíme najít součet, dostaneme $c = 0$. Tedy pro $|x| < 1$ platí

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}\,. \tag{9}$$

A protože řada konverguje podle Leibnizova kritéria také v bodě $x = 1$, plyne odtud

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}\,.$$

Mocninné řady úzce souvisí s Taylorovými polynomy funkce $f(x)$ se středem v bodě a. Připomeňme, že Taylorův polynom stupně N se středem v bodě a funkce $f(x)$, která má n-tou derivaci byl

$$T_N(x;a) = \sum_{n=0}^{N} c_n (x-a)^n\,,$$

kde konstanty c_n jsou dány vztahem (6). Pak platila rovnost

$$f(x) = T_N(x;a) + Z_N(x;a)\,,$$

kde funkce $Z_N(x,a)$ je tzv. zbytek. Jestliže měla funkce $f(x)$ na intervalu (a,x) derivaci $(n+1)$–ního řádu, bylo možné zapsat tento zbytek ve tvaru

$$Z_N(x;a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}\,,$$

kde $c \in (a,x)$.
Z toho plyne, že platí následující věta.
Věta. Nechť existuje $R > 0$ takové, že funkce $f(x)$ má na intervalu $|x-a| < R$ derivace všech řádů a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\, R^n = 0\,.$$

Pak pro všechna $x \in (a-R, a+R)$ platí rovnost (5).

Příklad: Protože pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$ platí $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ pro každé n a pro každé $R > 0$ a $x \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\, R^n = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\, R^n = 0\,,$$

dostaneme z předchozí věty pro každé $x \in \mathbb{R}$ rovnost

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{10}$$

Z definice a z (10) pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ plyne

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Podobně jako pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$ lze ukázat, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí rovnosti

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \ldots \tag{11}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \ldots \tag{12}$$

Pomocí řady (10) lze definovat funkci $f(z) = \mathrm{e}^z$ také pro komplexní $z = x + \mathrm{i}y$. Speciálně pro $z = \mathrm{i}x$, kde $x \in \mathbb{R}$ je podle (10), (11) a (12)

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n!} x^n = 1 + \mathrm{i}x - \frac{x^2}{2} - \mathrm{i}\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{i}\frac{x^5}{5!} - \ldots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \cos x + \mathrm{i} \sin x \,, \end{aligned}$$

což je tzv. *Eulerův vztah.* Pomocí něj například dostaneme vyjádření funkcí $\cos x$ a $\sin x$ pomocí exponenciální funkce s ryze imaginárním argumentem

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \,, \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \,,$$

které je podobné jako vyjádření funkcí $\cosh x$ a $\sinh x$.

Mocninných řad lze někdy použít k nalezení jejich součtu. Princip je ten, že se mocninné řady snažíme převést pomocí jejich integrování a derivovaní na známé mocninné řady, pro které známe součet. Ukážeme alespoň dva typické příklady.

Příklad: Najděte součet mocninné řady

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n \,. \tag{13}$$

Řešení: Mocninná řada (13) konverguje, když je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(n+3)x^{n+1}}{n(n+2)x^n} \right| = |x| < 1 \,.$$

Tedy poloměr konvergence mocninné řady (13) je $R = 1$ a pro $|x| < 1$ definuje tato řada funkci $f(x)$. Protože

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1} \,,$$

platí pro $|x| < 1$

$$F(x) = \int \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{n}\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^n\,.$$

Dále platí pro $|x| < 1$ rovnost

$$xF(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n+1} \implies G(x) = \int xF(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^3}{1-x}\,,$$

kde jsme použili známý součet geometrické řady.
Pak postupně pro $|x| < 1$ dostaneme

$$G'(x) = xF(x) = \left(\frac{x^3}{1-x}\right)' = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2}\,, \qquad F(x) = \frac{3x - 2x^2}{(1-x)^2}\,,$$
$$F'(x) = \frac{f(x)}{x} = \left(\frac{3x - 2x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{3-x}{(1-x)^3}\,, \qquad f(x) = \frac{x(3-x)}{(1-x)^3}\,.$$

Příklad: Najděte součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$.

Řešení: Daná řada konverguje (dokonce absolutně). Uvažujme mocninnou řadu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}\, x^{2n}\,. \tag{14}$$

Tato mocninná řada má poloměr konvergence $R = 1$ a pro $|x| < 1$ platí

$$g(x) = f'(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\, x^{2n-1}\,.$$

Pro funkci $g(x)$ dostaneme další derivací

$$g'(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{2}{1+x^2}\,,$$

protože poslední řada je geometrická s kvocientem $q = -x^2$. Proto je pro $|x| < 1$

$$g(x) = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x + c$$

a protože $g(0) = 0$ je $g(x) = f'(x) = 2\operatorname{arctg} x$. Integrací dostaneme, stále pro $|x| < 1$,

$$f(x) = 2\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = 2x\operatorname{arctg} x - \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2x\operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2) + c\,.$$

Protože z (14) plyne $f(0) = 0$, je $c = 0$. Tedy

$$f(x) = 2\operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)\,.$$

A protože naše řada konverguje a je rovna $f(1)$, je její součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} = f(1) = 2 \operatorname{arctg} 1 - \ln 2 = \tfrac{1}{2}\pi - \ln 2 .$$

Velmi často se používá mocninných řad k řešení, tzv. diferenciálních rovnic. Uvedeme zde jeden příklad.

Příklad: Najděte funkci $y = y(x)$, pro kterou platí

$$x(1-x)y'' + \big(\gamma - (\alpha+\beta+1)x\big)y' - \alpha\beta y = 0\,, \qquad y(0) = 1\,, \tag{15}$$

kde jsou α, β a γ dané konstanty, $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$.

Řešení: Předpokládejme, že funkci $y = y(x)$, pro kterou platí (15), vyjádříme jako mocninnou řadu $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, která má poloměr konvergence $R > 0$. Z podmínky $y(0) = 1$ pak plyne, že $y(0) = c_0 = 1$. Pro $|x| < R$ dostaneme

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}\,, \qquad xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n\,,$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}\,, \quad xy''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-1}\,, \quad x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^n\,.$$

Když tyto vztahy dosadíme do (15), dostaneme rovnici

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - (\alpha+\beta+1)\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n - \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+\gamma-1)c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \big(n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta\big) c_n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+\gamma)c_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\beta) c_n x^n = 0\,,$$

kde jsme v první sumě udělali substituci $n \mapsto n+1$. Proto musí pro každé $|x| < R$ platit rovnost

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big((n+1)(n+\gamma)c_{n+1} - (n+\alpha)(n+\beta)c_n \Big) x^n = 0\,.$$

To je ale možné pouze tehdy, když pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$(n+1)(n+\gamma)c_{n+1} - (n+\alpha)(n+\beta)c_n = 0\,. \tag{16}$$

Protože jsme předpokládali, že $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$, je pro každé $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)} \implies \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)} = 1\,.$$

Tedy poloměr konvergence naší řady je $R = 1$ a všechny provedené úvahy platí pro $|x| < 1$. Lze snadno ukázat, že z rovnice (16) a podmínky $c_0 = 1$ plyne

$$y(x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{2! \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdot \beta(\beta+1)(\beta+2)}{3! \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 +$$

$$+ \ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1) \cdot \beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{(n+1)! \cdot \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n + \ldots$$

Rovnice (15) se nazývá *hypergeometrická rovnice* a její řešení *hypergeometrická* funkce, která se obvykle značí $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$. Všimněte si toho, že pokud je $\alpha = 0, -1, -2, \ldots$ nebo $\beta = 0, -1, -2, \ldots$, je hypergeometrická funkce $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ polynom.