Přednáška 8

Neurčitý integrál

Definice. Nechť je dána funkce $f : X \to \mathbb{R}$, kde $X \subset \mathbb{R}$. Každou funkci $F : X \to \mathbb{R}$, pro kterou platí

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X\,, \tag{1}$$

nazýváme *primitivní funkce* k funkci $f(x)$ na množině X.

Příklad. Funkce $F_1(x) = \sin^2 x$, $F_2(x) = -\cos^2 x$ a $F_3(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$ jsou primitivní funkce k funkci $f(x) = \sin 2x$ na $\mathbb{R}$.

Věta. Jsou-li funkce $F_1(x)$ a $F_2(x)$ primitivní funkce k funkcím $f_1(x)$ a $f_2(x)$ na množině M a c_1, c_2 reálná čísla, je funkce $F(x) = c_1F_1(x) + c_2F_2(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$ na množině X.
DŮKAZ: Pro každé $x \in X$ je

$$F'(x) = \big(c_1F_1(x) + c_2F_2(x)\big)' = c_1F_1'(x) + c_2F_2'(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x) = f(x)\,.$$

Věta. Nechť jsou $F_1(x)$ a $F_2(x)$ dvě primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{I}$ je $F_2(x) = F_1(x) + c$.
DŮKAZ: Uvažujme funkci $F(x) = F_2(x) - F_1(x)$. Protože jsou funkce $F_1(x)$ a $F_2(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$ je podle předchozí věty

$$F'(x) = \big(F_2(x) - F_1(x)\big)' = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

pro každé $x \in \mathcal{I}$. A jak jsme dokázali dříve, plyne z toho, že $F(x)$ je na $\mathcal{I}$ konstantní.

Není-li množina X interval, může existovat víc primitivních funkcí. Například jedna primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{1}{x}$ na množině $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je $F_1(x) = \ln|x|$. Ale také funkce $F_2(x) = \ln|x| + c_+$ pro $x > 0$ a $F_2(x) = \ln|x| + c_-$ pro $x < 0$ je primitivní funkce k $f(x)$ na množině X.

Definice. Nechť je $f : X \to \mathbb{R}$. Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na množině X se nazývá *neurčitý integrál* funkce $f(x)$ na množině X. Tuto množinu funkcí budeme značit $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Často se pro vyjádření skutečnosti, že neurčitý integrál není funkce, ale celá množina funkcí, používá zápis

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c\,,$$

kde $F(x)$ je jedna z primitivních funkcí k funkci $f(x)$. Toto označení pochází z toho, že na intervalu je neurčitý integrál určen až na konstantu jednou primitivní funkcí.
V přednášce většinou nebudu toto značení používat, ale musíte si uvědomit, že například z rovnosti $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + 1$ neplyne $0 = 1$.

Neurčitý integrál se většinou počítá tak, že jej buď znáte nebo se ho snažíte převést na integrál, který znáte, pomocí následujících vět. Ty jsou důsledkem vět o derivacích.

Věta. Když existují integrály funkcí $f_1(x)$ a $f_2(x)$ a a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$, pak je

$$\int \big(a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)\big)\,\mathrm{d}x = a_1 \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + a_2 \int f_2(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2}$$

Věta (*integrace per partes*). Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ diferencovatelné a existuje $\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$. Pak existuje $\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ a platí

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{3}$$

Důkaz: Tato věta je důsledkem věty o derivaci součinu. Z ní plyne, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(f(x)\,g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\Big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x) = f'(x)g(x)\,.$$

Uvedeme tři typické příklady na použití metody integrace per partes.
Příklad. Najděte neurčitý integrál $\int x \sin x\,\mathrm{d}x$.
Řešení: Derivací funkce $g(x) = x$ se zbavíme mocniny a zůstane nám integrál, který známe.
Vybereme tedy $f'(x) = \sin x$ a $g(x) = x$. Pak je $f(x) = -\cos x$ a $g'(x) = 1$. Podle vztahu (3) pak je

$$\int x \sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x - \int (-\cos x)\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x\,.$$

Kdybychom zvolili $f'(x) = x$ a $g(x) = \sin x$ dostali bychom ze vztahu (3)

$$\int x \sin x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,x^2 \sin x - \tfrac{1}{2}\int x^2 \cos x\,\mathrm{d}x\,,$$

což je sice správně, ale k výpočtu integrálu to nevede.
Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \ln\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.
Řešení: Položíme $f'(x) = 1$ a $g(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$. Protože je $f(x) = x$ a $g'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, dostaneme z (3)

$$\int \ln\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x\ln\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = x\ln\sqrt{x^2+1} - \int\Big(1 - \frac{1}{x^2+1}\Big)\,\mathrm{d}x =$$
$$= x\ln\sqrt{x^2+1} - x + \operatorname{arctg} x\,.$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \mathrm{e}^x \sin 2x\,\mathrm{d}x$.
Řešení: Označíme $f'(x) = \mathrm{e}^x$ a $g(x) = \sin 2x$. Protože $f(x) = \mathrm{e}^x$ a $g'(x) = 2\cos 2x$, je podle (3)

$$\int \mathrm{e}^x \sin 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \sin 2x - 2\int \mathrm{e}^x \cos 2x\,\mathrm{d}x\,.$$

V integrálu na pravé straně použijeme ještě jednou integrace per partes. Označíme $f'(x) = \mathrm{e}^x$ a $g(x) = \cos 2x$. Protože $f(x) = \mathrm{e}^x$ a $g'(x) = -2\sin 2x$, je podle (3)

$$\int \mathrm{e}^x \sin 2x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \sin 2x - 2\Big(\mathrm{e}^x \cos 2x + 2\int \mathrm{e}^x \sin 2x \,\mathrm{d}x\Big) = \\ = \mathrm{e}^x \sin 2x - 2\mathrm{e}^x \cos 2x - 4\int \mathrm{e}^x \sin 2x \,\mathrm{d}x\,.$$

To je rovnice pro $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin 2x \,\mathrm{d}x$, ze které plyne

$$\int \mathrm{e}^x \sin 2x = \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^x \sin 2x - \frac{2}{5}\,\mathrm{e}^x \cos 2x\,.$$

Další metoda integrace souvisí s derivací složené funkce. Zhruba řečeno platí

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F\big(\varphi(t)\big)\,.$$

Následující dvě věty o substituci se liší v tom, že v první větě předpokládáme, že známe integrál vlevo a počítáme integrál vpravo, kdežto ve druhé je tomu naopak.

Věta (*první věta o substituci*). Nechť je $f : X \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\varphi : T \to X$ je diferencovatelná funkce. Pak platí

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F\big(\varphi(t)\big)\,. \tag{4}$$

DŮKAZ: Podle věty o derivaci složené funkce je pro každé $t \in T$

$$\frac{\mathrm{d}F\big(\varphi(t)\big)}{\mathrm{d}t} = F'\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,,$$

protože $F'(x) = f(x)$.

Uvedeme dva příklady na použití této věty.

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8+1}$.

ŘEŠENÍ: Když označíme $y = y(x) = x^4$, je derivace $y'(x) = 4x^3$ a integrál lze zapsat ve tvaru

$$\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8+1} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3\,\mathrm{d}x}{x^8+1} = \frac{1}{4}\int \frac{y'(x)\,\mathrm{d}x}{y^2(x)+1}\,.$$

A protože $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \operatorname{arctg} y$, je

$$\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8+1} = \frac{\operatorname{arctg} x^4}{4}\,.$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Toto je typický příklad na substituci v integrálech, které obsahují funkce $\sin x$ a $\cos x$. Protože $(\sin x)' = \cos x$ a sudé mocniny $\cos x$ lze pomocí vztahu $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ převést na mocniny funkce $\sin x$, je výhodné v integrálech, které jsou liché ve funkci $\cos x$, tj. když změníme znaménko u funkce $\cos x$, změní se znaménko integrované funkce, zavést substituci $y(x) = \sin x$. V našem případě je

$$\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \int \cos^2 x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \int \bigl(1 - \sin^2 x\bigr) \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \int \bigl(1 - y^2(x)\bigr) \cdot y'(x) \,\mathrm{d}x\,.$$

A protože $\int (1 - y^2) \,\mathrm{d}y = y - \frac{1}{3} y^3$, je

$$\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \sin x - \tfrac{1}{3} \sin^3 x\,.$$

Ve druhé větě o substituci předpokládáme, že známe integrál

$$\int f\bigl(\varphi(t)\bigr)\, \varphi'(t) \,\mathrm{d}t = \Psi(t)\,.$$

Abychom se vrátili zpět k proměnné $x = \varphi(t)$, musíme udělat předpoklady, které zaručí, že existuje inverzní funkce $t = \varphi^{(-1)}(x)$.

Věta (*druhá věta o substituci*) Nechť je $\mathcal{T}$ interval, $\varphi : \mathcal{T} \to X$ je vzájemně jednoznačná diferencovatelná funkce a $\varphi'(t) \neq 0$ pro každé $t \in \mathcal{T}$. Jestliže existuje integrál $\int f\bigl(\varphi(t)\bigr)\, \varphi'(t) \,\mathrm{d}t = \Psi(t)$, pak existuje

$$\int f(x) \,\mathrm{d}x = \Psi\bigl(\varphi^{(-1)}(x)\bigr)\,. \tag{5}$$

Při praktickém použití vět o substituci často nerozlišujeme, zda používáme první nebo druhou větu o substituci. Stojíme totiž před úkolem najít neurčitý integrál

$$\int f(x) \,\mathrm{d}x\,. \tag{6}$$

Když se rozhodneme použít substituci $x = x(t)$, najdeme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x'(t) \implies \mathrm{d}x = x'(t) \,\mathrm{d}t\,.$$

Po dosazení do (6) dostaneme

$$\int f\bigl(x(t)\bigr)\, x'(t) \,\mathrm{d}t\,.$$

Jestliže umíme najít tento integrál, tj. funkci $\Psi(t)$, musíme z rovnice $x = x(t)$ ještě najít t jako funkci proměnné x, tj. inverzní funkci, a dosadit. To je právě druhá věta o substituci. Jestliže z rovnice $x = x(t)$ nejprve najdeme funkci $t = \varphi(x)$ a derivujeme tento vztah, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x) \implies \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\varphi'(x)}\,, \qquad \varphi'(x) \neq 0\,.$$

Po dosazení dostaneme
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(x(t)\big)\frac{\mathrm{d}t}{\varphi'\big(x(t)\big)}\,.$$
To je vlastně taky druhá věta o substituci. První větu o substituci dostaneme v podstatě tehdy, když se nám $\dfrac{1}{\varphi'\big(x(t)\big)}$ "vykrátí". Pak tímto výrazem nepotřebujeme dělit a nemusíme předpokládat, že je nenulový.

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \mathrm{e}^{3x+2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Uvědomte si, že znáte pouze integrál $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$, nikoliv tento integrál. Proto je výhodné tento integrál na takový integrál převést. To uděláte nejlépe tak, že zavedeme novou proměnnou $t = 3x+2$. Pak je
$$\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{d}t$$
a po dosazení dostaneme
$$\int \mathrm{e}^{3x+2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^t = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3x+2}\,.$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+3x+4}$.

Řešení: Výpočet integrálů tohoto typu závisí na tom, zda má kvadratický polynom $2x^2 + 3x + 4$ reálné kořeny. Každý z integrálů
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^2}\,, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)(x-b)} \quad \text{a} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$$
se totiž počítá jinak. Protože rovnice $2x^2+3x+4 = 0$ nemá reálná řešení, je tento integrál posledního typu a budeme jej snažit na tento tvar převést.
Postupně dostaneme
$$2x^2+3x+4 = 2\big(x^2+\tfrac{3}{2}\,x+2\big) = 2\big((x+\tfrac{3}{4})^2-\tfrac{9}{16}+2\big) = 2\big((x+\tfrac{3}{4})^2+\tfrac{23}{16}\big)\,.$$
Z toho dostaneme
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+3x+4} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{3}{4})^2+\frac{23}{16}}\,.$$
Když si uvědomíme, jaký integrál chceme dostat, nabízí se substituce $x+\frac{3}{4} = t$. Pak je $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ a
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+3x+4} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{23}{16}}\,.$$
Teď je otázka, zda znáte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$ nebo pouze integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x$.
Pokud znáte pouze tento integrál, musíte ještě náš integrál převést na tento tvar.
To uděláme tak, že napíšeme
$$\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\,\frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}$$

a použijeme substituci $\dfrac{x}{a} = y$, tj. $x = ay$. Pak je $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}y$ a

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a\,\mathrm{d}y}{y^2 + 1} = \frac{\operatorname{arctg} y}{a} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\,. \tag{7}$$

Integrál typu (7) se poměrně často vyskytuje při výpočtu integrálů a stojí za to, si jej zapamatovat.

V našem integrálu je $a = \dfrac{\sqrt{23}}{4}$, a tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2 + 3x + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{t^2 + \frac{23}{16}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{4t}{\sqrt{23}} = \frac{2}{\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{4x + 3}{\sqrt{23}}\,.$$

V posledních dvou příkladech jsme udělali lineární substituce, tj. substituce typu $t = ax + b$. Tato substituce se používá poměrně často, a proto uvedeme obecný výsledek. Je-li $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)$ a $a \neq 0$, pak

$$\int f(ax + b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(ax + b)\,. \tag{8}$$

Máme-li totiž najít neurčitý integrál $\int f(ax + b)\,\mathrm{d}x$ uděláme substituci $ax + b = t$. Pak je $a\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ a

$$\int f(ax + b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a} F(t) = \frac{1}{a} F(ax + b)\,.$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Tento integrál lze najít integrací per partes nebo pomocí substituce. Při použití substituce jde o to, abychom se v integrovaném výrazu zbavili druhé odmocniny. Jedna z možností, jak to udělat, je použít vztah $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ Pak je $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ a na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, kde je funkce $\cos t$ kladná, je $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$.
Proto položíme $x = \sin t$. Pak je $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ a z integrálu dostaneme pro $t \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t\,.$$

Neurčité integrály typu

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \sin \alpha x \sin \beta x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \cos \alpha x \cos \beta x\,\mathrm{d}x$$

lze najít buď dvojnásobnou integrací per partes podobně jako integrál $\int \mathrm{e}^{ax} \sin \beta x\,\mathrm{d}x$ nebo $\int \mathrm{e}^{ax} \cos \beta x\,\mathrm{d}x$, viz příklad dříve, nebo pomocí vzorců

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta\,, \qquad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\,,$$

ze kterých plyne

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)\,,\\ \cos\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)\,,\\ \sin\alpha\sin\beta &= \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)\,.\end{aligned}$$

Z druhého vztahu pro $\alpha=\beta=t$ dostaneme $\cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)$. Tedy

$$\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\tfrac{1}{2}\int\big(1+\cos 2t\big)\,\mathrm{d}t=\tfrac{1}{2}\big(t+\tfrac{1}{2}\sin 2t\big)=\tfrac{1}{2}\,t+\tfrac{1}{2}\sin t\cos t\,.$$

Z definičního vztahu $x=\sin t$ plyne $t=\arcsin x$ a protože $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-x^2}$, je hledaný integrál

$$\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\,\arcsin x+\tfrac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2}\,.$$

Integrály z racionálních funkcí

V podstatě jediné integrály, které umíme počítat, jsou integrály z racionálních funkcí, tj. integrály

$$\int\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}\,\mathrm{d}x\,,\tag{9}$$

kde $Q_m(x)$ je polynom stupně m a $P_n(x)$ je polynom stupně n. Uvedeme obecný postup při výpočtu integrálů tohoto typu.
Je-li stupeň polynomu v čitateli větší nebo roven stupni polynomu ve jmenovateli, tj. když je $m\geq n$, vydělíme částečně polynom $Q_m(x)$ polynomem $P_n(x)$, tj. napíšeme

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=S(x)+\frac{R_{\widehat{m}}(x)}{P_n(x)}\,,$$

kde $S(x)$ je polynom a stupeň polynomu $R_{\widehat{m}}(x)$, tj. $\widehat{m}$, je menší než stupeň polynomu $P_n(x)$. Integrál (9) pak je

$$\int\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}\,\mathrm{d}x=\int S(x)\,\mathrm{d}x+\int\frac{R_{\widehat{m}}(x)}{P_n(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

První integrál je integrál polynomu a je jednoduchý.
Budeme se zabývat výpočtem druhého integrálu. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že

$$P_n(x)=x^n+c_{n-1}x^{n-1}+c_{n-2}x^{n-2}+\ldots+c_1x+c_0\,.$$

Mělo by být známo, že takový polynom lze zapsat ve tvaru

$$P_n(x)=(x-a_1)^{r_1}(x-a_2)^{r_2}\ldots(x-a_k)^{r_k}\big(x^2+p_1x+q_1\big)^{s_1}\ldots\big(x^2+p_\ell x+q_\ell\big)^{s_\ell}\,,$$

kde a_i, $i=1,\ldots,k$, jsou všechny různé reálné kořeny polynomu $P_n(x)$, r_i je násobnost kořene a_i, kvadratické polynomy $x^2+p_jx+q_j$, $j=1,\ldots,\ell$, jsou navzájem různé a nemají reálné kořeny.

Máme-li polynom $P_n(x)$ zapsán v tomto tvaru, je možné racionální funkci $\dfrac{R_m(x)}{P_n(x)}$, kde $m < n$, rozložit na tzv. *parciální zlomky*. Lze ukázat, že existují reálné konstanty A_{iu_i}, $i = 1, \dots, k$, $u_1 = 1, \dots, r_i$ a B_{jv_j} a C_{jv_j}, $j = 1, \dots, \ell$, $v_j = 1, \dots, s_j$ takové, že

$$
\begin{aligned}
\frac{R_k(x)}{P_n(x)} &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{u_i=1}^{r_i} \frac{A_{iu_i}}{(x-a_i)^{u_i}} + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{v_j=1}^{s_j} \frac{B_{jv_j}x + C_{j,v_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{v_j}} = \\
&= \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1r_1}}{(x-a_1)^{r_1}} + \\
&\quad + \frac{A_{21}}{x-a_2} + \frac{A_{22}}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2r_2}}{(x-a_2)^{r_2}} + \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \frac{A_{k1}}{x-a_k} + \frac{A_{k2}}{(x-a_k)^2} + \ldots + \frac{A_{kr_k}}{(x-a_k)^{r_k}} + \\
&\quad + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{B_{1s_1}x + C_{1s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \\
&\quad + \frac{B_{21}x + C_{21}}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{B_{22}x + C_{22}}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \ldots + \frac{B_{2s_2}x + C_{2s_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}} + \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \frac{B_{\ell 1}x + C_{\ell 1}}{x^2+p_\ell x+q_\ell} + \frac{B_{\ell 2}x + C_{\ell 2}}{(x^2+p_\ell x+q_\ell)^2} + \ldots + \frac{B_{\ell s_\ell}x + C_{\ell s_\ell}}{(x^2+p_\ell x+q_\ell)^{s_\ell}} \,.
\end{aligned}
$$

Proto nám stačí najít integrály typu

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} \qquad \text{a} \qquad \int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x \,.$$

První integrál je až na lineární substituci tabulkový integrál a platí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} \quad \text{pro} \;\; n \neq 1 \qquad \text{a} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \ln|x-a| \,.$$

Integrály s kvadratickými polynomy ve jmenovateli se počítají ve dvou krocích. Protože $\big(x^2+px+q\big)' = 2x+p$, napíšeme

$$\frac{ax+b}{\big(x^2+px+q\big)^n} = \frac{a}{2}\,\frac{2x+p}{\big(x^2+px+q\big)^n} + \frac{b-\frac{1}{2}ap}{\big(x^2+px+q\big)^n} \,.$$

Pak je

$$\int \frac{ax+b}{\big(x^2+px+q\big)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{\big(x^2+px+q\big)^n}\,\mathrm{d}x + \big(b-\tfrac{1}{2}ap\big)\int \frac{\mathrm{d}x}{\big(x^2+px+q\big)^n} \,.$$

V prvním integrálu zavedeme $y = x^2+px+q$ a dostaneme

$$\int \frac{2x+p}{\big(x^2+px+q\big)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^n} \,,$$

což je známý integrál.

Zbývá nám tedy najít integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+px+q\right)^n}\,.$$

Napíšeme

$$x^2+px+q=\left(x+\tfrac{1}{2}p\right)^2+q-\tfrac{1}{4}\,p^2\,.$$

Protože jsme předpokládali, že polynom x^2+px+q nemá reálný kořen, je $q-\frac{1}{4}p^2>0$. Když zavedeme substituci

$$x+\tfrac{1}{2}p=\sqrt{q-\tfrac{1}{4}p^2}\,y\,,$$

dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+px+q\right)^n}=\left(q-\tfrac{1}{4}p^2\right)^{1/2-n}\int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^n}\,.$$

Pro $n=1$ je poslední integrál

$$I_1=\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1}=\operatorname{arctg} y\,.$$

Zbývá ještě najít integrály tvaru

$$I_n=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}\quad \text{pro}\quad n\ge 2\,. \tag{10}$$

Tyto integrály lze najít integrací per partes. Pomocí ní dostaneme pro $n\ge 1$

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}=\frac{x}{(x^2+1)^n}+2n\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n+1}}= \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n}+2n\int \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x= \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n}+2n\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}-2n\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n+1}} \\
I_n &= \frac{x}{(x^2+1)^n}+2nI_n-2nI_{n+1}\,.
\end{aligned}$$

Z poslední rovnice pak plyne, že pro $n\ge 1$ je

$$I_{n+1}=\frac{x}{2n(x^2+1)^n}+\frac{2n-1}{2n}\,I_n\,. \tag{11}$$

Pomocí tohoto vztahu pak lze v integrálu (10) postupně snižovat index n tak dlouho, až dostaneme známy integrál I_1.

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{x^4+2x+4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Jedná se o integrál z racionální funkce. Protože je stupeň polynomu ve čitateli větší než stupeň polynomu jmenovateli nejprve oba polynomy vydělíme. Protože

$$\frac{x^4+2x+4}{x^3+1}=x+\frac{x+4}{x^3+1}\,,$$

dostaneme

$$\int \frac{x^4+2x+4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x + \int \frac{x+4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x+4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Polynom ve jmenovateli rozložíme na součin

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)\,.$$

Zlomek v posledním integrálu rozložíme na parciální zlomky, tj. budeme hledat reálná čísla A, B a C tak, aby platilo

$$\frac{x+4}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}\,.$$

Jestliže tento vztah vynásobíme nejmenším společným jmenovatelem $(x+1)(x^2-x+1)$, dostaneme vztah

$$x+4 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)\,, \tag{12}$$

který musí platit pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Speciálně pro $x=-1$ získáme $3=3A$, tj. $A=1$. Když napíšeme rovnost (12) ve tvaru

$$x+4 = (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + A + C\,,$$

vidíme, když srovnáme členy u stejných mocnin x, že pro čísla A, B a C musí platit

$$A+B=0\,, \qquad -A+B+C=1\,, \qquad A+C=4\,.$$

A protože víme, že $A=1$, dostaneme z prvního a třetího vztahu $B=-1$ a $C=3$. Pokud to není moc pracné, je dobré se přesvědčit, že je splněn i druhý vztah.
Tedy pro každé x platí

$$\frac{x+4}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{-x+3}{x^2-x+1}\,,$$

a proto je

$$\int \frac{(x+4)\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \int \frac{x-3}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x+1| - \int \frac{x-3}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Protože $\left(x^2-x+1\right)' = 2x-1$, rozložíme poslední integrál na dva členy

$$\int \frac{x-3}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)\,\mathrm{d}x}{x^2-x+1} - \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}\,.$$

V prvním integrálu zavedeme novou proměnnou $y=x^2-x+1$, a protože $\mathrm{d}y=(2x-1)\,\mathrm{d}x$, dostaneme

$$\int \frac{x-3}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\ln|y| - \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} =$$
$$= \ln\sqrt{x^2-x+1} - \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}\,.$$

Zatím jsme dostali

$$\int \frac{x^4+2x+4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| - \ln\sqrt{x^2-x+1} + \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} =$$
$$= \frac{x^2}{2} + \ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{5}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}\,.$$

Jmenovatel v posledním integrálu je $x^2-x+1=\bigl(x-\frac{1}{2}\bigr)^2+\frac{3}{4}$. Po substituci $x-\frac{1}{2}=y$ dostaneme z integrálu

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} = \int\frac{\mathrm{d}y}{y^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2y}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\,,$$

kde jsme využili vztah (7). Celkově tedy

$$\int\frac{x^4+2x+4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\,.$$

Substituce, které vedou na integrály z racionálních funkcí

Uvedeme nějaké známé substituce, které převádějí uvedené integrály na integrály z racionální funkce. Je ovšem třeba poznamenat, že tyto obecné substituce vedou na poměrně složité racionální funkce, jejichž integrace je pracná. Proto se při výpočtu konkrétních integrálů často používají i jiné substituce.

Integrály typu $\displaystyle\int R\biggl(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\biggr)\,\mathrm{d}x$, kde $R(x,y)$ je racionální funkce proměnných x a y, tj. podíl polynomů dvou proměnných x a y. Budeme předpokládat, že $ad-bc\neq 0$. V opačném případě je $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c}$.
Integrály tohoto typu převedeme na integrál racionální funkce substitucí

$$\frac{ax+b}{cx+d}=y^n\,.$$

Pak je

$$x=\frac{dy^n-b}{a-cy^n}\,,\qquad \mathrm{d}x=\frac{n(ad-bc)y^{n-1}}{\bigl(cy^n-a\bigr)^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Příklad: Jako příklad najdeme pomocí této substituce integrál

$$\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení: Zavedeme novou proměnnou $y^2=\dfrac{1-x}{1+x}$. Pak dostaneme

$$x=\frac{1-y^2}{1+y^2}\,,\qquad 1+x=\frac{2}{1+y^2}\,,\qquad \mathrm{d}x=\frac{-4y\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)^2}\,.$$

Po dosazení získáme integrál

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -8\int \frac{y^2}{(1+y^2)^3}\,\mathrm{d}y = -8\int \frac{y^2+1-1}{(1+y^2)^3}\,\mathrm{d}y = 8\big(I_3(y)-I_2(y)\big)\,,$$

kde integrály I_2 a I_3 jsou dány v (10). Pomocí (11) dostaneme

$$\begin{aligned} 8\big(I_3(y)-I_2(y)\big) &= \frac{2y}{(1+y^2)^2} - 2I_2(y) = \frac{2y}{(1+y^2)^2} - \frac{y}{1+y^2} - I_1(y) = \\ &= \frac{2y}{(1+y^2)^2} - \frac{y}{1+y^2} - \operatorname{arctg} y\,. \end{aligned}$$

Jestliže se vrátíme k proměnné x, dostaneme

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,.$$

Integrály typu $\int R\big(\mathrm{e}^x\big)\,\mathrm{d}x$, kde $R(y)$ je racionální funkce proměnné y, převedeme na integrál z racionální funkce substitucí $y=\mathrm{e}^x$. Pak je

$$\mathrm{d}y = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{d}y}{y}\,.$$

Příklad: Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x}$.

Řešení: Podle definice je funkce $\sinh x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$. Proto je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \int \frac{2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}-1}\,.$$

Po substituci $y=\mathrm{e}^x$ dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x} &= \int \frac{2\,\mathrm{d}y}{y^2-1} = \int \Big(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\Big)\,\mathrm{d}y = \ln|y-1| - \ln|y+1| = \ln\Big|\frac{y-1}{y+1}\Big| = \\ &= \ln\Big|\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\Big| = \ln\Big|\frac{\mathrm{e}^{x/2}-\mathrm{e}^{-x/2}}{\mathrm{e}^{x/2}+\mathrm{e}^{-x/2}}\Big| = \ln\Big|\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\Big|. \end{aligned}$$

Integrály typu $\displaystyle\int R\big(\ln x\big)\frac{\mathrm{d}x}{x}$, kde $R(y)$ je racionální funkce proměnné y, převedeme na integrál z racionální funkce substitucí $y=\ln x$. Pak je

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x} \implies \int R\big(\ln x\big)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int R(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Příklad: Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x\big(\ln^2 x + 2\ln x + 5\big)}$.

Řešení: Substituce $y = \ln x$ vede k integrálu

$$\int \frac{\ln x \, \mathrm{d}x}{x\bigl(\ln^2 x + 2\ln x + 5\bigr)} = \int \frac{y \, \mathrm{d}y}{y^2 + 2y + 5},$$

což je integrál z racionální funkce. Protože $\bigl(y^2 + 2y + 5\bigr)' = 2y + 2$, napíšeme integrál ve tvaru

$$\int \frac{y \, \mathrm{d}y}{y^2 + 2y + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{2y + 2}{y^2 + 2y + 5} \, \mathrm{d}y - \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + 2y + 5}.$$

V prvním integrálu použijeme substituci $y^2 + 2y + 5 = z$ a dostaneme

$$\frac{1}{2} \int \frac{2y + 2}{y^2 + 2y + 5} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\ln |z|}{2} = \ln \sqrt{y^2 + 2y + 5}.$$

Ve druhém integrálu napíšeme $y^2 + 2y + 5 = (y + 1)^2 + 4$ a když použijeme (7), dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + 2y + 5} = \int \frac{\mathrm{d}y}{(y + 1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{y + 1}{2}.$$

Celkově tedy

$$\int \frac{\ln x \, \mathrm{d}x}{x\bigl(\ln^2 x + 2\ln x + 5\bigr)} = \ln \sqrt{\ln^2 x + 2\ln x + 5} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\ln x + 1}{2}.$$

Integrály typu $\int R(\cos x, \sin x) \, \mathrm{d}x$, kde $R(x, y)$ je racionální funkce dvou proměnných. Všechny integrály tohoto typu lze převést na integrál racionální funkce substitucí $y = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$. Tato substituce je ale příliš obecná a používá se pouze tehdy, když je to nevyhnutelné. Má-li funkce $R(\cos x, \sin x)$ určité vlastnosti, je výhodnější použít jiné substituce.

Jestliže platí $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, tj. když změníme znaménko o funkce $\cos x$, změní se znaménko integrované funkce, používá se substituce $\sin x = y$. Důvod je ten, že v tomto případě je funkce

$$R(\cos x, \sin x) = S\bigl(\cos^2 x, \sin x\bigr) \cos x = S\bigl(1 - \sin^2 x, \sin x\bigr) \cos x$$

a $\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\sin x) = \cos x \, \mathrm{d}x$.

Podobně když je $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, tj. když změníme znaménko o funkce $\sin x$, změní se znaménko integrované funkce, používá se substituce $\cos x = y$, protože

$$R(\cos x, \sin x) = T\bigl(\cos x, \sin^2 x\bigr) \sin x = T\bigl(\cos x, 1 - \cos^2 x\bigr) \sin x$$

a $\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\cos x) = -\sin x \, \mathrm{d}x$.

Příklad: Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

Řešení: Protože můžeme psát

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\sin x \, \mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x \, \mathrm{d}x}{1 - \cos^2 x},$$

je výhodné použít substituci $\cos x = y$. Po dosazení pak dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{-\,\mathrm{d}y}{1-y^2} = -\frac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\Big)\,\mathrm{d}y = -\tfrac{1}{2}\big(\ln|1+y| - \ln|1-y|\big) =$$
$$= \ln\sqrt{\Big|\frac{1-y}{1+y}\Big|} = \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \ln\Big|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big|.$$

Jestliže platí $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$, tj. když současně změníme znaménko u obou funkcí $\cos x$ i $\sin x$, nezmění se integrovaná funkce, lze použít substituci $\operatorname{tg} x = y$. Funkce s takovou vlastností jsou vlastně funkce proměnných $\cos^2 x$, $\cos x \sin x$ a $\sin^2 x$. Pro tyto funkce platí

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,, \quad \cos x \sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,, \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$
$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}\big(\operatorname{tg} x\big) = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \implies \mathrm{d}x = \cos^2 x\,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}\,.$$

Příklad: Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x}$.

Řešení: V tomto integrálu je výhodné zavést novou proměnnou $y = \operatorname{tg} x$. To je vidět například tehdy, když napíšeme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 3}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\,.$$

Po substituci dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+4y+3} = \int \frac{\mathrm{d}y}{(y+1)(y+3)} =$$
$$= \frac{1}{2}\int\Big(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+3}\Big)\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}\big(\ln|y+1| - \ln|y+3|\big) = \ln\sqrt{\Big|\frac{y+1}{y+3}\Big|} =$$
$$= \ln\sqrt{\Big|\frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x + 3}\Big|} = \ln\sqrt{\Big|\frac{\sin x + \cos x}{\sin x + 3\cos x}\Big|}\,.$$

Nemá-li funkce $R(\cos x, \sin x)$ žádnou z výše zmíněných vlastností, lze nejprve zavést proměnnou $t = \frac{1}{2}x$, tj. $x = 2t$. Protože $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$ a $\sin 2t = 2\sin t\cos t$, je

$$R(\cos x, \sin x) = R\big(\cos^2 t - \sin^2 t, 2\cos t\sin t\big) = S(\cos t, \sin t)\,.$$

Proto je $S(-\cos t, -\sin t) = S(\cos t, \sin t)$ a lze použít substituci $y = \operatorname{tg} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Příklad: Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}$.

Řešení: Když zavedeme proměnnou t vztahem $x = 2t$, dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-\sin 2t} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-2\sin t\cos t} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t + \sin^2 t - 2\sin t\cos t}\,.$$

Když v tomto integrálu položíme $y = \operatorname{tg} t$, dostaneme po úpravě integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}y}{(1-y)^2} = \frac{2}{1-y} = \frac{2}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)} =$$
$$= \frac{2\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{1-\cos x}} = \frac{1+\cos x+\sin x}{\cos x}$$

neboli $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$, kde jsme vynechali pro neurčitý integrál nepodstatnou konstantu.

Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$, kde $R(x,y)$ je racionální funkce dvou proměnných a $a \neq 0$. Cílem je odstranit odmocninu kvadratického výrazu. K tomu se používají nejrůznější substituce.

Obecně lze použít tzv. *Eulerovy substituce*:

Má-li kvadratický polynom ax^2+bx+c reálné kořeny, používá se úprava

$$\sqrt{(x-a)(x-b)} = (x-b)\sqrt{\frac{x-a}{x-b}} \quad \text{a} \quad \frac{x-a}{x-b} = y^2\,.$$

Tuto substituci jsme použili v jednom z předcházejících příkladů.

Je-li $a > 0$, položíme $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x - y$. Po umocnění dostaneme

$$ax^2+bx+c = ax^2 - 2\sqrt{a}\,xy + y^2 \implies x = \frac{y^2-c}{2\sqrt{a}\,y+b}\,.$$

Odmocninu pak dostaneme ze vztahu

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x - y = \frac{\sqrt{a}\,(y^2-c)}{2\sqrt{a}\,y+b} - y\,.$$

Je-li $c > 0$, můžeme položit $\sqrt{ax^2+bx+c} = xy - \sqrt{c}$. Po umocnění získáme

$$ax^2+bx+c = x^2y^2 - 2\sqrt{c}\,xy + c \implies x = \frac{2\sqrt{c}\,y+b}{y^2-a}$$

a stejně jako dříve, dostaneme pro odmocninu

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{2\sqrt{c}\,y+b}{y^2-a}\,y - \sqrt{c}\,.$$

Eulerovy substituce vedou sice k integrálům z racionálních funkcí, ale vzniklé racionální funkce jsou většinou poměrně složité. Proto se odmocnin z kvadratických výrazu při integraci pokoušíme zbavit jiným způsobem.

Protože platí

$$x^2+bx+c = \left(x+\tfrac{1}{2}b\right)^2 + c - \tfrac{1}{4}\,b^2\,,$$

lze lineární transformací převést odmocninu z kvadratického polynomu na jeden z výrazů $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{x^2-1}$ nebo $\sqrt{1+x^2}$.

V integrálu $\int R\big(x, \sqrt{1-x^2}\big)\,\mathrm{d}x$ se lze odmocniny zbavit substitucí $x = \sin t$. Pak je

$$x = \sin t\,, \qquad \sqrt{1-x^2} = \cos t$$

a integrál vede na integraci racionální funkce v proměnných $\sin t$ a $\cos t$, který jsme vyšetřovali dříve.

V integrálu $\int R\big(x, \sqrt{x^2-1}\big)\,\mathrm{d}x$ lze k odstranění odmocniny použít vztah $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, tj. $\cosh^2 - 1 = \sinh^2 t$. Po substituci $x = \cosh t$ pak dostaneme $\sqrt{x^2-1} = \sinh t$. Protože podle definice je

$$\cosh t = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\,, \qquad \sinh t = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\,,$$

dostaneme integrál racionální funkce v proměnné e^t. Od proměnné t k proměnné x se vrátíme pomocí vztahu $\mathrm{e}^t = x + \sqrt{x^2-1}$.

V integrálu $\int R\big(x, \sqrt{1+x^2}\big)\,\mathrm{d}x$ se lze odmocniny zbavit podobně jako v předcházejícím případě substitucí $x = \sinh t$. Pak je $\sqrt{1+x^2} = \cosh t$ a pro inverzní transformaci dostaneme $\mathrm{e}^t = x + \sqrt{x^2+1}$.

Jiná možnost je položit $x = \operatorname{tg} t$. Pak dostaneme

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{1}{\cos t}$$

a integrál převedeme na integrál z racionální funkce proměnných $\cos t$ a $\sin t$, který jsme vyšetřovali dříve.