Kapitola 3

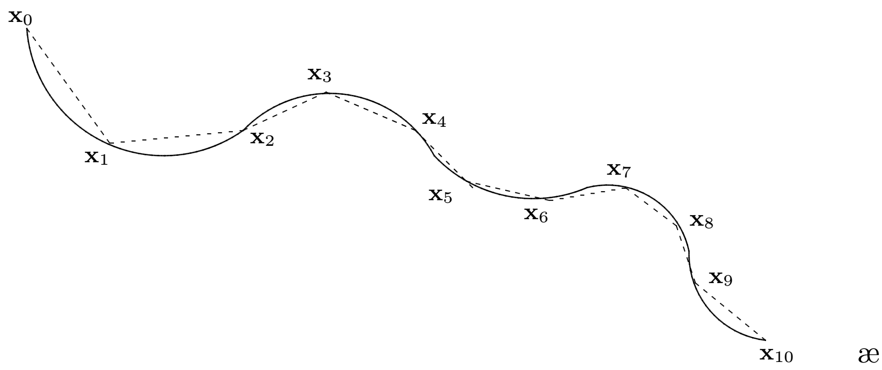
Křivkové integrály

3.1 Křivkový integrál 1. druhu

Klíčová slova: délka oblouku, délka křivky, křivkový integrál 1. druhu po oblouku, křivkový integrál 1. druhu po křivce, neorientovaný křivkový integrál, element délky oblouku, element hmotnosti oblouku

3.1.1 Délka oblouku

Na začátku první kapitoly jsme zavedli pojmy jako oblouk a jeho parametrizace, tečné vektorové pole oblouku, orientace oblouku, křivka apod. Nyní budeme tyto pojmy používat. Doporučujeme čtenáři, aby si dříve, než začne číst následující text, připomněl obsah článku 1.1 kapitoly 1: Křivky v $\mathbf{R}^n$ a jejich parametrizace.
Nechť $\mathcal{O}$ je oblouk v prostoru $\mathbf{R}^n$, nechť $\mathbf{g}(t) = (g_1(t)\,, g_2(t)\,, \dots\, g_n(t))\,,\ t \in \langle a, b\rangle$, je jeho parametrizace a nechť $\dot{\mathbf{g}}(t) = (\dot{g}_1(t)\,, \dot{g}_2(t)\,, \dots\, \dot{g}_n(t))\,,\ t \in \langle a, b\rangle$, je jeho tečné vektorové pole. Připomeňme, že zde $\dot{g}_i(t)$ značí derivaci funkce $g_i(t)$ podle proměnné t. Zvolme na oblouku $\mathcal{O}$ body $\mathbf{x}_0 = \mathbf{g}(a)\,, \mathbf{x}_1\,, \mathbf{x}_2\,, \cdots, \mathbf{x}_m = \mathbf{g}(b)$ tak, aby následovaly na oblouku za sebou. Sestrojme lomenou čáru L, jejíž vrcholy jsou body $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_m$. Příklad takové



Obrázek 3.1: K definici délky oblouku

lomené čáry je načrtnut na obr. 3.1. Délka $s(L)$ této lomené čáry je číslo

$$s(L) = \sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}\|. \tag{3.1}$$

Délkou oblouku $s(\mathcal{O})$ nazveme číslo, které je suprémem délek $s(L)$ všech lomených čar popsané vlastnosti. Je-li $\mathcal{O}$ oblouk a $\mathbf{g}(t),\ t \in \langle a, b\rangle$, jeho parametrizace, pak se dá ukázat, že $s(\mathcal{O})$ je konečné číslo a že pro něj platí rovnost

$$s(\mathcal{O}) = \int_a^b \|\dot{\mathbf{g}}(t)\| dt. \tag{3.2}$$

Hodnota $s(\mathcal{O})$ nezávisí na volbě parametrizace oblouku.
Rozepíšeme-li vztah (3.2) pro parametrizaci $\mathbf{g}\colon \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}^2$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$, dostaneme

$$s(\mathcal{O}) = \int_a^b \sqrt{(\dot{g}_1(t))^2 + (\dot{g}_2(t))^2}\,\mathrm{d}t, \quad \dot{g}_1 = \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}t},\ \dot{g}_2 = \frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}t}. \tag{3.3}$$

Je-li speciálně oblouk $\mathcal{O}$ část grafu nějaké funkce $y = f(x)$, tj.

$$\mathcal{O} = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in \langle a, b\rangle\},$$

pak je

$$s(\mathcal{O}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

Pro oblouk $\mathcal{O}$ v prostoru $\mathbf{R}^3$ s parametrizací $\mathbf{g}\colon \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}^3$ je pak jeho délka $s(\mathcal{O})$ rovna číslu

$$s(\mathcal{O}) = \int_a^b \|\dot{\mathbf{g}}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(\dot{g}_1(t))^2 + (\dot{g}_2(t))^2 + (\dot{g}_3(t))^2} dt, \tag{3.5}$$

kde

$$\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3); \quad \dot{g}_1 = \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}t},\ \dot{g}_2 = \frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}t},\ \dot{g}_3 = \frac{\mathrm{d}g_3}{\mathrm{d}t}. \tag{3.6}$$

Úvahy, týkající se délky oblouku, nás vedou k následující definici.

3.1.2 Křivkový integrál 1. druhu po oblouku

Nechť $\mathcal{O}$ je oblouk v $\mathbf{R}^n$ a nechť $\mathbf{g}\colon \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}$ je jeho parametrizace. Nechť $f\colon \mathcal{O} \to \mathbf{R}^n$ je funkce. Existuje-li Riemannův integrál

$$\int_a^b f(\mathbf{g}(t))\|\dot{\mathbf{g}}(t)\|\,\mathrm{d}t, \tag{3.7}$$

pak toto číslo značíme

$$\int_{\mathcal{O}} f\,\mathrm{d}s \equiv \int_a^b f(\mathbf{g}(t))\|\dot{\mathbf{g}}(t)\|\,\mathrm{d}t \tag{3.8}$$

a nazýváme je *křivkovým integrálem 1. druhu funkce f po oblouku $\mathcal{O}$* (také *neorientovaným křivkovým integrálem*).

Vlastnosti křivkového integrálu 1. druhu po oblouku
Křivkový integrál funkce f po oblouku $\mathcal{O}$ byl definován pomocí jednorozměrného Riemannova integrálu, a má tedy vlastnosti podobné těm, které má Riemannův integrál funkce f na intervalu. Připomeňme alespoň některé.

1. **Linearita křivkového integrálu**

   Jsou-li α, β reálná čísla, f, g funkce, pak rovnost
   $$\int_{\mathcal{O}} (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}s = \alpha \int_{\mathcal{O}} f\,\mathrm{d}s + \beta \int_{\mathcal{O}} g\,\mathrm{d}s \tag{3.9}$$
   platí, jakmile má pravá strana smysl.

2. **Aditivita vzhledem k oblouku**

   Jsou-li $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ oblouky takové, že jejich sjednocení $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ je rovněž oblouk a jejich průnik $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ obsahuje nejvýše krajní body oblouků, pak rovnost
   $$\int_{\mathcal{O}} f\,\mathrm{d}s = \int_{\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2} f\,\mathrm{d}s = \int_{\mathcal{O}_1} f\,\mathrm{d}s + \int_{\mathcal{O}_2} f\,\mathrm{d}s \tag{3.10}$$
   platí, jakmile má pravá strana smysl.

3. **Element délky oblouku**

   Srovnání vztahu (3.2) s definičním vztahem (3.8) ukazuje, že vzorec pro výpočet délky oblouku můžeme psát ve tvaru
   $$s(\mathcal{O}) = \int_a^b \|\dot{\mathbf{g}}(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_{\mathcal{O}} \mathrm{d}s. \tag{3.11}$$
   Je tedy přirozené mluvit o
   $$\mathrm{d}s = \|\dot{\mathbf{g}}(t)\|\,\mathrm{d}t \tag{3.12}$$
   jako o *elementu délky oblouku*. Udává-li skalární funkce $f(\mathbf{x})$ hustotu v bodě $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$ a je-li $\mathbf{x} = \mathbf{g}(t)$ pro $t \in \langle a, b\rangle$, pak je přirozené mluvit o
   $$f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s \equiv f(\mathbf{g}(t))\|\dot{\mathbf{g}}(t)\|\,\mathrm{d}t \tag{3.13}$$
   jako o *elementu hmotnosti oblouku.*

Příklady

1. Máme najít hodnotu integrálu
   $$\int_{\mathcal{O}} x^2 ds, \quad \text{kde} \quad \mathcal{O} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \ln x, x \in \langle 1, 2\rangle\}.$$

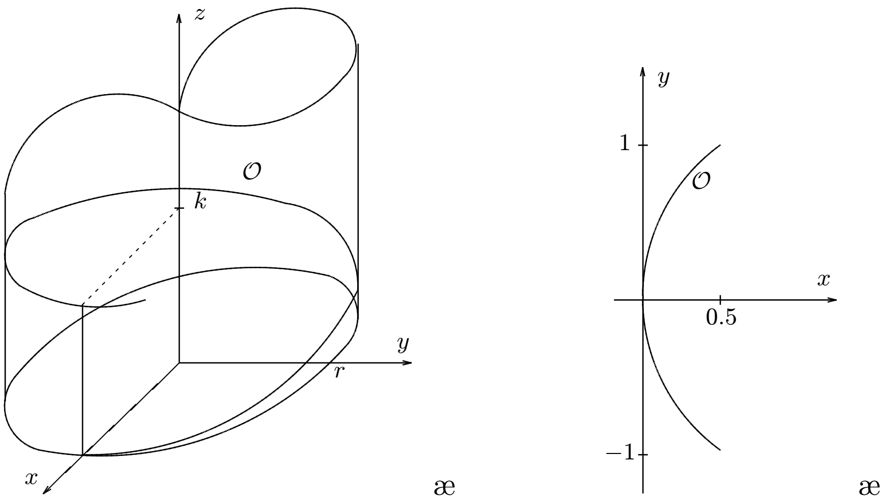
   Řešení

   Zvolme parametrizací $x = g_1(t) = t, y = g_2(t) = \ln t$. Pak $\dot{\mathbf{g}}(t) = \left(1, \frac{1}{t}\right) \neq \mathbf{o}$.
   $$\int_{\mathcal{O}} x^2\,\mathrm{d}s = \int_1^2 t^2 \left\|\left(1, \frac{1}{t}\right)\right\|\,\mathrm{d}t = \int_1^2 t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 t\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t =$$
   $$= \left| \begin{array}{lclclcl} t^2+1 & = & u, & & 2t\,\mathrm{d}t & = & \mathrm{d}u \\ t & = & 1 & \Rightarrow & u & = & 2 \\ t & = & 2 & \Rightarrow & u & = & 5 \end{array} \right| =$$
   $$= \frac{1}{2}\int_2^5 u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}[u^{3/2}]_2^5 = \frac{1}{3}(5^{3/2} - 2^{3/2}).$$

2. Máme najít hodnotu integrálu
$$\int_{\mathcal{O}} (x+y)ds,$$
kde $\mathcal{O}$ je úsečka s krajními body $A = (0,0), B = (1,2)$.

Řešení
Zvolme parametrizaci $x = t, y = 2t,\ t \in \langle 0,1\rangle$. Pro takto zvolenou parametrizaci dostáváme tečné pole oblouku $\dot{\mathbf{g}}(t) = (1,2)$ a pro jeho velikost $\|\dot{g}(t)\| = \sqrt{5}$. Nyní můžeme dosadit
$$\int_{\mathcal{O}} (x+y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 (t+2t)\sqrt{5}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\sqrt{5}.$$

3. Máme najít hodnotu integrálu
$$\int_{\mathcal{O}} \frac{z^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s,$$
kde $\mathcal{O}$ je jeden závit šroubovice $x = r\cos t, y = r\sin t, z = rt,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Oblouk $\mathcal{O}$ je načrtnut na obr. 3.2 a).



a) b)

Obrázek 3.2: Ilustrace ke 3. a 4. příkladu

Řešení
Pro zvolenou parametrizaci dostáváme tečné pole oblouku
$$\dot{\mathbf{g}}(t) = (-r\sin t, r\cos t, r)$$
a jeho velikost $\|\dot{\mathbf{g}}(t)\| = r\sqrt{2}$. Pak
$$\int_{\mathcal{O}} \frac{z^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \frac{r^2t^2}{r^2} r\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \frac{8r\pi^3\sqrt{2}}{3}.$$

4. Máme určit celkovou hmotnost oblouku paraboly $y^2 = 2x,\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, s hustotou $f(x, y) = |y|$. Oblouk $\mathcal{O}$ je načrtnut na obr. 3.2 b).

   Řešení
   Máme integrovat přes oblouk $\mathcal{O}$ tvořený částí paraboly, která je grafem funkce, v níž x je závisle proměnná a y nezávisle proměnná. Budeme jej tedy parametrizovat jako graf funkce
   $$x = \frac{y^2}{2},$$
   kde za parametr volíme proměnnou y. Odtud a z podmínky $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ plyne podmínka $0 \leq y^2 \leq 1$, ekvivalentní s podmínkou $-1 \leq y \leq 1$. Dostali jsme tak parametrizaci našeho oblouku
   $$x = g_1(t) = \frac{t^2}{2}, \quad y = g_2(t) = t, \quad -1 \leq t \leq 1.$$
   Odtud dostáváme
   $$\dot{g}_1(t) = t\,,\ \dot{g}_2(t) = 1\,, \quad \|\dot{\mathbf{g}}(t)\| = \sqrt{t^2 + 1},$$
   takže
   $$m(\mathcal{O}) = \int\limits_{\mathcal{O}} |y|\,\mathrm{d}s = \int\limits_{-1}^{1} |t|\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_{0}^{1} t\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

5. Máme najít hodnotu integrálu
   $$\int\limits_{\mathcal{O}} \frac{1}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}s,$$
   kde oblouk $\mathcal{O}$ má parametrizaci $\mathbf{g}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t),\ t \in \langle 0, \ln 2\rangle$.

   Řešení
   Pro zvolenou parametrizaci dostáváme tečné pole oblouku
   $$\dot{\mathbf{g}}(t) = e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1)$$
   a jeho velikost
   $$\|\dot{\mathbf{g}}(t)\| = e^t\sqrt{3}.$$
   Pak
   $$\int\limits_{\mathcal{O}} \frac{1}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}s = \int\limits_{0}^{\ln 2} \frac{1}{e^{2t}} \cdot e^t\sqrt{3}\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\int\limits_{0}^{\ln 2} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6. Máme najít hodnotu integrálu
   $$\int\limits_{\mathcal{O}} y\,\mathrm{d}s,$$
   kde oblouk $\mathcal{O}$ leží v prvním kvadrantu $(x > 0, y > 0)$ a je popsán rovnicí $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$.

Řešení
K parametrizaci oblouku využijeme polárních souřadnic. Je přímo vidět, že daný oblouk je v polárních souřadnicích popsán rovnicí $\rho^4 = \rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$, a tedy platí $\rho^2 = \cos 2\varphi$. Jelikož musí být $\rho > 0$ a $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, lze tuto rovnici psát v ekvivalentním tvaru $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$. Protože funkce $\cos 2\varphi$ je kladná pro $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$, je parametrickým vyjádřením $\mathbf{g}(\varphi)$ zadaného oblouku zobrazení

$$x = g_1(\varphi) = \cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}, \quad y = g_2(\varphi) = \sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}.$$

Pro tečné vektorové pole $\dot{\mathbf{g}}(\varphi)$ platí

$$\dot{\mathbf{g}}(\varphi) = \left(-\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi} - \frac{\cos\varphi\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},\ \cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi} - \frac{\sin\varphi\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right).$$

Po zřejmých úpravách odtud dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{g}}(\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}(-\sin\varphi\cos 2\varphi - \cos\varphi\sin 2\varphi,\ \cos\varphi\cos 2\varphi - \sin\varphi\sin 2\varphi) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}(-\sin 3\varphi\,, \cos 3\varphi)\end{aligned}$$

a

$$\|\dot{\mathbf{g}}(\varphi)\| = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\sqrt{\sin^2 3\varphi + \cos^2 3\varphi} = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Nyní dosadíme do integrandu a dostaneme

$$\int_{\mathcal{O}} y\,\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

7. Máme vypočítat hmotnost jednoho závitu šroubovice, je-li hustota v daném bodě přímo úměrná druhé mocnině jeho vzdálenosti od počátku.

Řešení
Parametrický popis oblouku $\mathcal{O}$, kterým je zde jeden závit šroubovice, je

$$x = r\cos t, y = r\sin t, z = \frac{k}{2\pi}t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$

kde $r > 0$ je poloměr šroubovice, $k > 0$ je stoupání na jednom závitu. Oblouk $\mathcal{O}$ je podoben tomu, který je načrtnut na obr. 3.2 a). Rozložení hmotnosti je podle zadání úlohy dáno vztahem $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Tečné vektorové pole $\dot{\mathbf{g}}(t)$ je pak dáno předpisem

$$\dot{\mathbf{g}}(t) = \left(-r\sin t, r\cos t, \frac{k}{2\pi}\right),\ t \in (0, 2\pi),$$

a pro jeho velikost platí

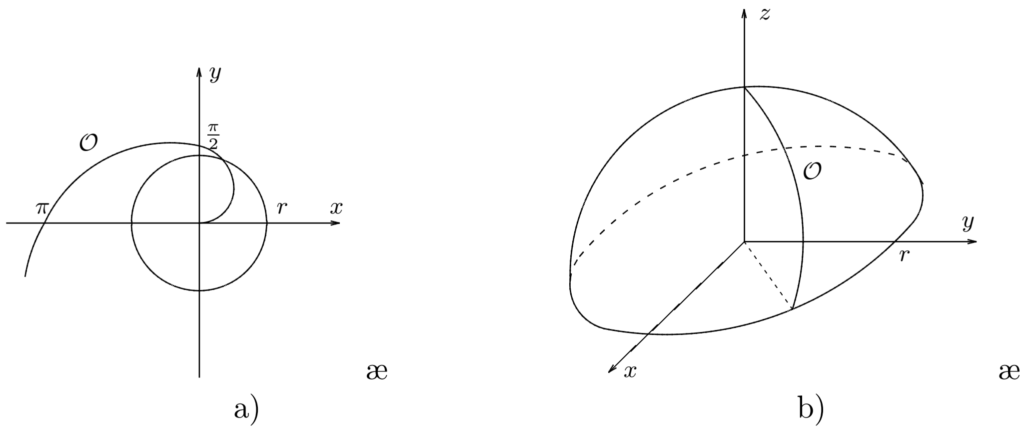
$$\|\dot{\mathbf{g}}(t)\| = \sqrt{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t + \frac{k^2}{4\pi^2}} = \sqrt{r^2 + \frac{k^2}{4\pi^2}}.$$

Odtud plyne, že

$$m(\mathcal{O}) = \int_{\mathcal{O}} (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s \;= \int_0^{2\pi} \left(r^2 + \frac{k^2}{4\pi^2}t^2\right)\sqrt{r^2+\frac{k^2}{4\pi^2}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{r^2+\frac{k^2}{4\pi^2}}\left(2\pi r^2 + \frac{k^2}{4\pi^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi}\right) = \sqrt{4\pi^2r^2+k^2}\left(r^2+\frac{k^2}{3}\right).$$

8. Máme najít hodnotu integrálu
$$\int_{\mathcal{O}} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}s,$$
kde $\mathcal{O}$ je část Archimedovy spirály načrtnuté na obr. 3.3 a), která má v polárních souřadnicích rovnici $\varrho = \varphi$ a leží uvnitř kruhu o poloměru $r < \pi/2$.



Obrázek 3.3: Oblouky z 8. a 9. příkladu

Řešení
Oblouk $\mathcal{O}$ parametrizujeme pomocí polárních souřadnic

$$x = \varrho\cos\varphi\,,\; y = \varrho\sin\varphi\,,\; \varphi \in \langle 0, r\rangle.$$

Dosadíme-li do těchto polárních souřadnic z rovnice oblouku $\varrho = \varphi$, dostaneme parametrizaci $\mathbf{g}(\varphi)$ oblouku $\mathcal{O}$ ve tvaru

$$x = g_1(\varphi) = \varphi\cos\varphi\,,\;\; y = g_2(\varphi) = \varphi\sin\varphi\,,\; 0 < \varphi < r.$$

Pro tečné vektorové pole $\dot{\mathbf{g}}(\varphi)$ pak dostáváme $\dot{\mathbf{g}}(\varphi) = (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi\,, \sin\varphi + \varphi\cos\varphi)$ a $\|\dot{\mathbf{g}}(\varphi)\|^2 = \cos^2\varphi - 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \varphi^2\sin^2\varphi + \sin^2\varphi + 2\varphi\sin\varphi\cos\varphi + \varphi^2\cos^2\varphi = 1+\varphi^2$, takže $\|\boldsymbol{\tau}(\varphi)\| = \sqrt{1+\varphi^2}$. Odtud plyne

$$\int_{\mathcal{O}} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}s = \int_0^r \operatorname{arctg}\frac{\varphi\sin\varphi}{\varphi\cos\varphi}\sqrt{1+\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^r \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi)\sqrt{1+\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^r \varphi\sqrt{1+\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}[(1+\varphi^2)^{3/2}]_0^r = \frac{1}{3}[(1+r^2)^{3/2} - 1].$$

9. Určete celkovou hmotnost oblouku

$$\mathcal{O} = \{(x,y,z) \mid (x=y) \wedge (x^2+y^2+z^2=r^2) \wedge (x>0) \wedge (y>0) \wedge (z>0)\},$$

jestliže je hustota dána předpisem $f(x,y,z) = x+y$.
Řešení
Oblouk $\mathcal{O}$ je část řezu kulové plochy se středem v počátku a poloměrem r s rovinou $y=x$ a je načrtnut na obr. 3.3 b). Zvolíme parametrizaci pomocí sférických souřadnic $x = \varrho\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = \varrho\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = \varrho\cos\vartheta$. Dosazením do rovnic, které popisují oblouk $\mathcal{O}$ v kartézských souřadnicích, dostaneme rovnosti

$$\varrho\cos\varphi\sin\vartheta = \varrho\sin\varphi\sin\vartheta, \quad \varrho^2 = r^2,$$

a tedy

$$\cos\varphi = \sin\varphi,\ \varrho = r.$$

Vzhledem k předpokladu $x>0$ a $y>0$ z první rovnosti plyne $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Nyní dosadíme do rovnic pro sférické souřadnice r za ϱ a $\sqrt{2}/2$ za $\cos\varphi$. Dostaneme parametrizaci $\mathbf{g}(\vartheta)$ oblouku $\mathcal{O}$ ve tvaru

$$x = g_1(\vartheta) = r\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta,\ y = g_2(\vartheta) = r\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta,\ z = g_3(\vartheta) = r\cos\vartheta, \quad 0<\vartheta<\frac{\pi}{2},$$

neboť $z>0$.
Pro tečné vektorové pole $\dot{\mathbf{g}}(\vartheta)$ platí

$$\dot{\mathbf{g}}(\vartheta) = (r\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta,\ r\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta,\ -r\sin\vartheta), \quad 0<\vartheta<\frac{\pi}{2},$$

a tedy

$$\|\dot{\mathbf{g}}(\vartheta)\| = r\sqrt{\frac{1}{2}\cos^2\vartheta + \frac{1}{2}\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta} = r.$$

Máme tak vše připraveno k výpočtu integrálu, udávajícího celkovou hmotnost $m(\mathcal{O})$ zadaného oblouku. Je

$$m(\mathcal{O}) = \int_{\mathcal{K}} (x+y)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{2}\sin\vartheta r\,\mathrm{d}\vartheta = r^2\sqrt{2}[-\cos\vartheta]_0^{\frac{\pi}{2}} = r^2\sqrt{2}.$$

Úlohy

Vypočtěte daný křivkový integrál

1. $\displaystyle\int_{\mathcal{O}} \frac{1}{x-y}\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{O}$ je úsečka s krajními body $\mathbf{a} = (0,-2)$, $\mathbf{b} = (4,0)$. [$\sqrt{5}\ln 2$.]

2. $\displaystyle\int_{\mathcal{O}} x\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{O}$ je graf funkce $f(x) = x^2$, $x \in \langle 1,2\rangle$. [$(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})/12$.]

3. $\displaystyle\int_{\mathcal{O}} x^2y\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{O}$ je oblouk kružnice $x^2+y^2=r^2$ s krajními body $\mathbf{a} = (r,0)$, $\mathbf{b} = (0,r)$.

[$r^4/3$.]

4. $\int\limits_{\mathcal{O}} z\,\mathrm{d}s$, kde oblouk $\mathcal{O}$ je zadán parametrizací $\mathbf{g}(t) = (t\cos t\,, t\sin t\,, t)\,,\ t \in \langle 0, \sqrt{2}\rangle$.

[$(8 - 2\sqrt{2})/3$.]

5. $\int\limits_{\mathcal{O}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}s$, kde oblouk $\mathcal{O}$ je zadán parametrizací $\mathbf{g}(t) = a(\cos t + t\sin t\,, \sin t - t\cos t)\,,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. [$2\pi^2 a^3(1 + 2\pi^2$.]

6. $\int\limits_{\mathcal{O}} \sqrt{2y}\,\mathrm{d}s$, kde oblouk $\mathcal{O}$ je zadán parametrizací $g_1(t) = a(t - \sin t)\,,\ g_2(t) = a(1 - \cos t)\,,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. [$4\pi a^{3/2}$.]

7. $\int\limits_{\mathcal{O}} \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}s$, kde oblouk $\mathcal{O}$ je kružnice $x^2 + y^2 = ax\,, a > 0\,.$ [$2a^2$.]

8. $\int\limits_{\mathcal{O}} y^2\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{O}$ je oblouk cykloidy zadán parametricky rovnicemi

$$x = a(t - \sin t)\,,\ y = a(1 - \cos t)\,, \quad 0 \le t \le 2\pi\,, \quad a > 0.$$

$\left[\frac{256}{15}a^3.\right]$

3.1.3 Některé aplikace křivkového integrálu

Uvedeme některé geometrické a fyzikální aplikace křivkového integrálu. Příslušné vzorce uvedeme nejdříve pro oblouk v rovině a pak pro oblouk v třírozměrném prostoru.

Oblouk v rovině

Vzorce pro oblouky v rovině uvedeme pro tři různé způsoby jejich zadání.
a) Oblouk $\mathcal{O}$ je zadán jako graf funkce $y = f(x)\,, x \in \langle x_0, x_1\rangle$;
b) Oblouk $\mathcal{O}$ je zadán parametricky $x = g_1(t)\,,\ y = g_2(t)\,,\ t \in \langle t_0, t_1\rangle$;
c) Oblouk $\mathcal{O}$ je zadán pomocí polárních souřadnic $\varrho = \varrho(\varphi)\,,\ \varphi \in \langle \varphi_0, \varphi_1\rangle\,,\ \varrho > 0$.

1. *Délka $s(\mathcal{O})$ oblouku $\mathcal{O}$.*

$$\text{a)}\quad s(\mathcal{O}) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

$$\text{b)}\quad s(\mathcal{O}) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\dot{g}_1(t))^2 + (\dot{g}_2(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t.$$

$$\text{c)}\quad s(\mathcal{O}) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{(\varrho(\varphi))^2 + (\dot{\varrho}(\varphi))^2}\mathrm{d}\varphi\,.$$

2. *Hmotnost $m(\mathcal{O})$ oblouku $\mathcal{O}$ s hustotou σ.*

$$\text{a)}\quad m(\mathcal{O}) = \int_{x_0}^{x_1} \sigma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} \sigma\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

$$\text{b)}\quad m(\mathcal{O}) = \int_{t_0}^{t_1} \sigma(t)\sqrt{(\dot{g}_1(t))^2+(\dot{g}_2(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \sigma\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t.$$

$$\text{c)}\quad m(\mathcal{O}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sigma(\varphi)\sqrt{(\varrho(\varphi))^2+(\dot{\varrho}(\varphi))^2}\mathrm{d}\varphi\,.$$

Analogicky se počítá celkový *náboj*. V tomto případě může hustota σ náboje nabývat i záporných hodnot.

3. *Statický moment $S_x(\mathcal{O})$ oblouku $\mathcal{O}$ vzhledem k ose y, resp. $S_y(\mathcal{O})$ vzhledem k ose x.*

$$\text{a)}\qquad S_x(\mathcal{O}) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\sigma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} y\sigma\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

$$S_y(\mathcal{O}) = \int_{x_0}^{x_1} x\sigma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} x\sigma\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

$$\text{b)}\qquad S_x(\mathcal{O}) = \int_{t_0}^{t_1} g_2(t)\sigma(t)\sqrt{(\dot{g}_1(t))^2+(\dot{g}_2(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} y\sigma\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t.$$

$$S_y(\mathcal{O}) = \int_{t_0}^{t_1} g_1(t)\sigma(t)\sqrt{(\dot{g}_1(t))^2+(\dot{g}_2(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} x\sigma\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t.$$

$$\text{c)}\qquad S_x(\mathcal{O}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \varrho(\varphi)\sigma(\varphi)\sin\varphi\sqrt{(\varrho(\varphi))^2+(\dot{\varrho}(\varphi))^2}\mathrm{d}\varphi\,.$$

$$S_y(\mathcal{O}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \varrho(\varphi)\sigma(\varphi)\cos\varphi\sqrt{(\varrho(\varphi))^2+(\dot{\varrho}(\varphi))^2}\mathrm{d}\varphi\,.$$

4. *Souřadnice $x_t(\mathcal{O})\,, y_t(\mathcal{O})$ těžiště oblouku $\mathcal{O}$.*

$$x_t(\mathcal{O}) = \frac{S_y(\mathcal{O})}{m(\mathcal{O})}\,,\quad y_t(\mathcal{O}) = \frac{S_x(\mathcal{O})}{m(\mathcal{O})}\,.$$

5. *Momenty setrvačnosti $I_x(\mathcal{O})$ oblouku $\mathcal{O}$ vzhledem k ose x, resp. $I_y(\mathcal{O})$ vzhledem k ose y.*

a) $$I_x(\mathcal{O}) = \int_{x_0}^{x_1} (f(x))^2\sigma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} y^2\sigma\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

$$I_y(\mathcal{O}) = \int_{x_0}^{x_1} x^2\sigma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} x^2\sigma\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

b) $$I_x(\mathcal{O}) = \int_{t_0}^{t_1} (g_2(t))^2\sigma(t)\sqrt{(\dot g_1(t))^2+(\dot g_2(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} y^2\sigma\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\,\mathrm{d}t.$$

$$I_y(\mathcal{O}) = \int_{t_0}^{t_1} (g_1(t))^2\sigma(t)\sqrt{(\dot g_1(t))^2+(\dot g_2(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} x^2\sigma\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\,\mathrm{d}t.$$

c) $$I_x(\mathcal{O}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\varrho(\varphi))^2\sigma(\varphi)\sin^2\varphi\sqrt{(\varrho(\varphi))^2+(\dot\varrho(\varphi))^2}\mathrm{d}\varphi\,.$$

$$I_y(\mathcal{O}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\varrho(\varphi))^2\sigma(\varphi)\cos^2\varphi\sqrt{(\varrho(\varphi))^2+(\dot\varrho(\varphi))^2}\mathrm{d}\varphi\,.$$

Oblouk v prostoru

Vzorce pro oblouky v prostoru $\mathbf{R}^3$ uvedeme pro případ, že jsou zadány parametricky $x = g_1(t)\,,\ y = g_2(t)\,,\ z = g_3(t)\,,\ t \in \langle t_0, t_1\rangle$.

1. *Délka $s(\mathcal{O})$ oblouku $\mathcal{O}$.*

$$s(\mathcal{O}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\dot g_1(t))^2+(\dot g_2(t))^2+(\dot g_3(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. *Hmotnost $m(\mathcal{O})$ oblouku $\mathcal{O}$ s hustotou σ.*

$$m(\mathcal{O}) = \int_{t_0}^{t_1} \sigma(t)\sqrt{(\dot g_1(t))^2+(\dot g_2(t))^2+(\dot g_3(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \sigma\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}\,\mathrm{d}t.$$

Analogicky se počítá celkový *náboj*. V tomto případě může hustota σ náboje nabývat i záporných hodnot.

3. *Statický moment $S_{xy}(\mathcal{O})$ oblouku $\mathcal{O}$ vzhledem k rovině xy, resp. $S_{xz}(\mathcal{O})$ vzhledem k rovině xz, resp. $S_{yz}(\mathcal{O})$ vzhledem k rovině yz.*

$$S_{xy}(\mathcal{O}) = \int_{t_0}^{t_1} g_3(t)\sigma(t)\sqrt{(\dot{g}_1(t))^2 + (\dot{g}_2(t))^2 + (\dot{g}_3(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} z\sigma\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (\dot{z})^2}\,\mathrm{d}t.$$

$$S_{xz}(\mathcal{O}) = \int_{t_0}^{t_1} g_2(t)\sigma(t)\sqrt{(\dot{g}_1(t))^2 + (\dot{g}_2(t))^2 + (\dot{g}_3(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} y\sigma\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (\dot{z})^2}\,\mathrm{d}t.$$

$$S_{yz}(\mathcal{O}) = \int_{t_0}^{t_1} g_1(t)\sigma(t)\sqrt{(\dot{g}_1(t))^2 + (\dot{g}_2(t))^2 + (\dot{g}_3(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} x\sigma\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (\dot{z})^2}\,\mathrm{d}t.$$

4. *Souřadnice $x_t(\mathcal{O})\,, y_t(\mathcal{O})$ těžiště oblouku $\mathcal{O}$.*

$$x_t(\mathcal{O}) = \frac{S_{yz}(\mathcal{O})}{m(\mathcal{O})}\,, \quad y_t(\mathcal{O}) = \frac{S_{xz}(\mathcal{O})}{m(\mathcal{O})}\,, \quad z_t(\mathcal{O}) = \frac{S_{xy}(\mathcal{O})}{m(\mathcal{O})}\,.$$

5. *Momenty setrvačnosti $I_x(\mathcal{O})$ oblouku $\mathcal{O}$ vzhledem k ose x, resp. $I_y(\mathcal{O})$ vzhledem k ose y.*

$$\begin{aligned} I_x(\mathcal{O}) &= \int_{t_0}^{t_1} ((g_2(t))^2 + (g_3(t))^2)\sigma(t)\sqrt{(\dot{g}_1(t))^2 + (\dot{g}_2(t))^2 + (\dot{g}_3(t))^2}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (y^2 + z^2)\sigma\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y(\mathcal{O}) &= \int_{t_0}^{t_1} ((g_1(t))^2 + (g_3(t))^2)\sigma(t)\sqrt{(\dot{g}_1(t))^2 + (\dot{g}_2(t))^2 + (\dot{g}_3(t))^2}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + z^2)\sigma\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_z(\mathcal{O}) &= \int_{t_0}^{t_1} ((g_1(t))^2 + (g_2(t))^2)\sigma(t)\sqrt{(\dot{g}_1(t))^2 + (\dot{g}_2(t))^2 + (\dot{g}_3(t))^2}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + y^2)\sigma\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

3.1.4 Křivkový integrál 1. druhu po křivce

Nechť $\mathcal{K} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{O}_r$ je křivka v prostoru $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{g}$ její parametrizace taková, že $g_k\colon \langle a_k, b_k\rangle \to \mathbf{R}^n$ je parametrizace oblouku $\mathcal{O}_k, k = 1, 2, \ldots, r$. Nechť $f\colon \mathcal{K} \to \mathbf{R}^n$ je daná funkce. Existují-li integrály $\int_{\mathcal{O}_k} f ds, k = 1, 2, \ldots, r$, pak číslo

$$\int_{\mathcal{K}} f ds = \sum_{k=1}^{r} \int_{\mathcal{O}_k} f ds \tag{3.14}$$

nazýváme *křivkovým integrálem 1. druhu funkce f po křivce $\mathcal{K}$* (také *neorientovaným křivkovým integrálem*). Vzhledem k tomu, že křivkový integrál po křivce je definován pomocí křivkového integrálu po oblouku, dají se zcela přirozeně na něj přenést tvrzení o vlastnostech křivkového integrálu po oblouku.

Příklady

1. Máme najít hodnotu integrálu
$$\int_{\mathcal{K}} (x+y)\,\mathrm{d}s,$$
kde $\mathcal{K}$ je obvod trojúhelníka s vrcholy $A_1 = (0,0), A_2 = (0,2), A_3 = (1,0)$.

Řešení
Křivka $\mathcal{K}$ je tvořena třemi oblouky $\mathcal{K} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3$, kde $\mathcal{O}_1$ je úsečka $\overline{A_1A_2}$, $\mathcal{O}_2$ je úsečka $\overline{A_2A_3}$, $\mathcal{O}_3$ je úsečka $\overline{A_3A_1}$. Úsečka $\overline{AB}$ s krajními body A, B má parametrizaci
$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(t) = A \ + t(B-A), \ t \in \langle 0,1\rangle. \tag{3.15}$$
Podle toho mají naše úsečky tyto parametrizace:
$$\begin{array}{llll} \mathbf{g}_1(t)\colon & x = \ 0, & y = \ 2t, & t \in \langle 0,1\rangle, \\ \mathbf{g}_2(t)\colon & x = \ t, & y = \ 2-2t, & t \in \langle 0,1\rangle, \\ \mathbf{g}_3(t)\colon & x = \ 1-t, & y = \ 0; & t \in \langle 0,1\rangle. \end{array}$$
Odtud dostaneme
$$\int_{\mathcal{K}} (x+y)\,\mathrm{d}s = \int_{\mathcal{O}_1} (x+y)ds + \int_{\mathcal{O}_2} (x+y)ds + \int_{\mathcal{O}_3} (x+y)ds =$$
$$= \int_0^1 (2t\sqrt{4}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (t+2-2t)\sqrt{1+4}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1-t)\sqrt{1})\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^1 (4t + (2-t)\sqrt{5} + 1 - t)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}.$$

2. Máme najít hodnotu integrálu
$$\int_{\mathcal{K}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s,$$
kde $\mathcal{K}$ je kružnice se středem v bodě $(0,0)$ a poloměrem $r > 0$.

Řešení
Kružnici se středem v počátku a poloměrem $r > 0$ můžeme chápat jako sjednocení dvou oblouků $\mathcal{O}_1$ a $\mathcal{O}_2$, kde $\mathcal{O}_1$, resp. $\mathcal{O}_2$ je horní, resp. dolní půlkružnice, popsaná jako obraz intervalu $\langle 0,\pi\rangle$ v zobrazení $\mathbf{g}_1$, resp. $\mathbf{g}_2$, kde
$$\begin{array}{ll} \mathbf{g}_1 = (g_{11}, g_{12})\colon \langle 0,\pi\rangle \to \mathbf{R}^2, & \mathbf{g}_1(t) = (r\cos t, r\sin t), \\ \mathbf{g}_2 = (g_{21}, g_{22})\colon \langle 0,\pi\rangle \to \mathbf{R}^2, & \mathbf{g}_2(t) = (-r\cos t, -r\sin t). \end{array}$$

Pro tuto parametrizaci dostáváme na horní půlkružnici tečné pole oblouku $\dot{\mathbf{g}}(t) = (-r\sin t, r\cos t),\ t \in \langle 0, \pi\rangle$ a jeho velikost $\|\dot{\mathbf{g}}(t)\| = r$. Vzhledem k symetrii integrandu můžeme psát

$$\int_{\mathcal{K}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}s = 2\int_0^{\pi} r^2 \cdot r\,\mathrm{d}t = 2\pi r^3.$$

3. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{K}} \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}s,$$

kde $\mathcal{K} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = x\}$.

Řešení

Křivkou $\mathcal{K}$ je kružnice se středem v bodě $(\frac{1}{2}, 0)$ a poloměrem $\frac{1}{2}$. Použijeme parametrizaci pomocí polárních souřadnic $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$. Po dosazení do zadané rovnice kružnice v kartézských souřadnicích zjistíme, že v polárních souřadnicích je křivka $\mathcal{K}$ popsána rovnicí $\rho^2 = \rho\cos\varphi$. Protože hodnota ρ musí být kladná, můžeme rovnici zkrátit ρ a dostaneme hledanou rovnici kružnice $\rho = \cos\varphi,\ \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, v polárních souřadnicích. Odtud již snadno dostaneme parametrizaci

$$x = \cos^2\varphi, \quad y = \cos\varphi\sin\varphi,\ \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Parametrizace je spojitě diferencovatelná a pro tečné vektorové pole dostáváme předpis $(-2\cos\varphi\sin\varphi, -\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = (-\sin 2\varphi, -\cos 2\varphi),\ \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Toto vektorové pole je spojité a nenulové. Pro jeho velikost platí $\sqrt{\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi} = 1$. Můžeme tedy dosadit do definičního vztahu a počítat

$$\int_{\mathcal{K}} \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4\varphi + \cos^2\varphi\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi = [\sin\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

V posledním kroku jsme vyžili toho, že je $|\cos\varphi| = \cos\varphi$ pro $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Úlohy

1. Vypočtěte hodnoty následujících integrálů:

   (a) $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} xy\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{K}$ je obvod obdélníka $ABCD$ s vrcholy $A = (0, 0)$, $B = (0, 2)$, $C = (4, 2)$, $D = (4, 0)$. [24.]

   (b) $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{K}$ je kružnice $x^2 + y^2 - 2ax = 0\,,\ a > 0$. [$8a^2$.]

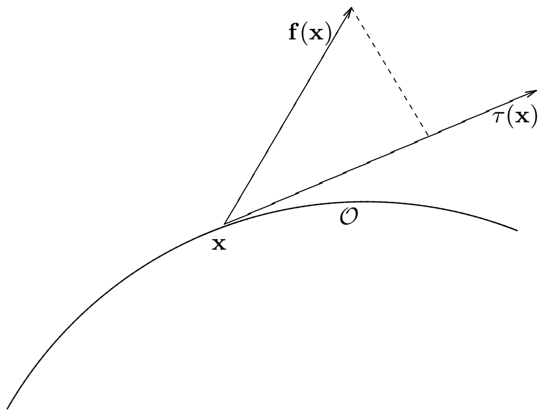
2. Vypočtěte hmotnost křivočarého trojúhelníka, jehož strany jsou průniky sféry $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ se souřadnicovými rovinami v prvním oktantu, tj. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, je-li hustota rozložení hmotnosti rovna jedné. [$\frac{3\pi}{2}R$.]

3.2 Křivkový integrál 2. druhu

Klíčová slova: křivkový integrál 2. druhu po oblouku, elementem práce silového pole **f**, orientovaný křivkový integrál, křivkový integrál 2. druhu po křivce

3.2.1 Křivkový integrál 2. druhu po oblouku

Element práce Při definici křivkového integrálu 1. druhu jsme vycházeli z geometrické interpretace a zavedli jsme pojem elementu délky oblouku. I nyní budeme postupovat analogicky. Místo geometrické interpretace použijeme fyzikální interpretaci a budeme se zabývat prací, kterou vykoná silové pole **f**, když přemísťuje hmotný bod po oblouku $\mathcal{O}$.



æ

Obrázek 3.4: K výkladu práce konané silovým polem

Je-li $\mathbf{g}(t)$ parametrizace oblouku $\mathcal{O}$, pak

$$\mathbf{t}(\mathbf{g}(t)) = \frac{\dot{\mathbf{g}}(t)}{\|\dot{\mathbf{g}}(t)\|}$$

je jednotkové tečné pole oblouku a skalární součin $\mathbf{f}(\mathbf{g}(t)) \bullet \mathbf{t}(\mathbf{g}(t))$ představuje práci, kterou vykoná tečná složka silového pole **f** po dráze dané jednotkovým tečným vektorem oblouku $\mathcal{O}$ v bodě $\mathbf{x} = \mathbf{g}(t)$. Je tedy přirozené nazývat skalární součin

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{t}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s \tag{3.16}$$

elementem práce silového pole **f**. Tato úvaha nás vede k následující definici orientovaného křivkového integrálu.

Definice orientovaného křivkového integrálu
Nechť $\mathcal{O}$ je oblouk v $\mathbf{R}^n$ orientovaný orientací $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$, nechť $\mathbf{g}\colon \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}^n$ je jeho parametrizace taková, že na něm indukuje orientaci souhlasnou se zadanou orientací $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$, tj. platí rovnost

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{g}(t)) = \mathbf{t}(\mathbf{g}(t)) = \frac{\dot{\mathbf{g}}(t)}{\|\dot{\mathbf{g}}(t)\|}, \quad t \in \langle a, b\rangle, \tag{3.17}$$

a nechť $\mathbf{f}\colon \mathcal{O} \to \mathbf{R}^n$ je daná vektorová funkce. Existuje-li neorientovaný křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{O}} (\mathbf{f} \bullet \boldsymbol{\tau})\,\mathrm{d}s, \tag{3.18}$$

kde integrand je skalární součin zadané vektorové funkce $\mathbf{f}$ a jednotkového tečného vektorového pole $\boldsymbol{\tau}$, pak pro toto číslo používáme označení

$$\int_{\mathcal{O}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} \equiv \int_{\mathcal{O}} (\mathbf{f} \bullet \boldsymbol{\tau})\,\mathrm{d}s \tag{3.19}$$

a nazýváme je *křivkovým integrálem 2. druhu vektorové funkce* $\mathbf{f}$ *po oblouku* $\mathcal{O}$ (také *orientovaným křivkovým integrálem*).

Používaná symbolika

Pomocí elementu délky oblouku můžeme nyní vyjádřit křivkový integrál 2. druhu vektorové funkce $\mathbf{f}$ po oblouku $\mathcal{O}$ ve tvaru

$$\int_{\mathcal{O}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{O}} (\mathbf{f} \bullet \boldsymbol{\tau})\,\mathrm{d}s = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{g}(t)) \bullet \boldsymbol{\tau}(\mathbf{g}(t)) \|\dot{\mathbf{g}}(t)\|\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{g}(t)) \bullet \frac{\dot{\mathbf{g}}(t)}{\|\dot{\mathbf{g}}(t)\|} \|\dot{\mathbf{g}}(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{g}(t)) \bullet \dot{\mathbf{g}}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Právě rovnost

$$\int_{\mathcal{O}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{g}(t)) \bullet \dot{\mathbf{g}}(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.20}$$

slouží často jako definice křivkového integrálu 2. druhu vektorové funkce $\mathbf{f}$ po oblouku $\mathcal{O}$. Pro tečné jednotkové vektorové pole orientovaného oblouku $\mathcal{O}$ s parametrizací $\mathbf{g}(t)$ se často používá označení

$$\vec{\tau} = \frac{\dot{\mathbf{g}}(t)}{\|\dot{\mathbf{g}}(t)\|}. \tag{3.21}$$

Víme, že toto vektorové pole jednotkových tečných vektorů zadává na oblouku $\mathcal{O}$ orientaci indukovanou parametrizací. Označíme-li ještě $\vec{\mathrm{f}}$ zadané vektorové pole definované na oblouku $\mathcal{O}$, pak lze křivkový integrál 2. druhu vektorového pole $\vec{\mathrm{f}}$ po oblouku $\mathcal{O}$ zapisovat v často používaném tvaru

$$\int_{\mathcal{O}} \vec{\mathrm{f}}\vec{\mathrm{ds}} = \int_{\mathcal{O}} (\vec{\mathrm{f}} \bullet \vec{\tau})\,\mathrm{d}s. \tag{3.22}$$

Je-li $\mathcal{O}$ oblouk v $\mathbf{R}^n$ s parametrizací $\mathbf{g}(t),\ t \in \langle a, b\rangle$, a $\vec{\mathrm{f}}$ je vektorové pole definované na oblouku $\mathcal{O}$, pak

$$\int_{\mathcal{O}} \vec{\mathrm{f}}\,\vec{\mathrm{d}s} = \int_a^b \vec{\mathrm{f}}(\mathbf{g}(t)) \bullet \dot{\mathbf{g}}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.23}$$

Označíme-li $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $\mathbf{x} = \mathbf{g}(t)$, pak smíme používat následující velice názorný a pro praktický výpočet nejvhodnější zápis

$$\int_{\mathcal{O}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{O}} f_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + f_2(\mathbf{x})\mathrm{d}x_2 + \ldots + f_n(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_n. \tag{3.24}$$

Je-li totiž

$$x_k = g_k(t),\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.25}$$

parametrizace oblouku $\mathcal{O}$, pak

$$dx_k = \dot{g}_k(t)dt,\ k = 1, 2, \dots, n, \tag{3.26}$$

a tedy

$$\int_{\mathcal{O}} \sum_{k=1}^{n} f_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k = \int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(\mathbf{g}(t))\dot{g}_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathcal{O}} \mathbf{f}(\mathbf{g}(t)) \bullet \dot{\mathbf{g}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathcal{O}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s}. \tag{3.27}$$

Uvědomme si ještě, že v případě, kdy vektorová funkce $\mathbf{f}$ má jedinou nenulovou složku, např. f_k, pak z rovnosti (3.27) plyne

$$\int_{\mathcal{O}} f_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k = \int_a^b f_k(\mathbf{g}(t))\dot{g}_k(t)\,\mathrm{d}t\,, k = 1, 2, \dots, n. \tag{3.28}$$

Podívejme se ještě na některé speciální případy.

Je-li $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^2$ a $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, pak

$$\int_{\mathcal{O}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{O}} f_1(x, y)\,\mathrm{d}x + f_2(x, y)\,\mathrm{d}y \tag{3.29}$$

a pomocí parametrizace $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ oblouku $\mathcal{O}$, tj. $x = g_1(t), y = g_2(t)\,,\ t \in \langle a, b\rangle$, dostáváme

$$\int_{\mathcal{O}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_a^b (f_1(g_1(t), g_2(t))\dot{g}_1(t) + f_2(g_1(t), g_2(t))\dot{g}_2(t))\,\mathrm{d}t. \tag{3.30}$$

Rovnost (3.28) má v tomto případě pro $k = 1$ tvar

$$\int_{\mathcal{O}} f_1(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(g_1(t), g_2(t))\dot{g}_1(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.31}$$

Je-li navíc oblouk $\mathcal{O}$ grafem funkce $y = h(x)\,, x \in \langle a, b\rangle$, pak pro parametrizaci $\mathbf{g}(x) = (x, h(x))$ platí $\dot{\mathbf{g}}(x) = (1, h'(x))$, takže rovnost (3.31) má nyní tvar

$$\int_{\mathcal{O}} f_1(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x, h(x))\,\mathrm{d}x. \tag{3.32}$$

Je-li $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^3$ a $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$, pak

$$\int_{\mathcal{O}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{O}} f_1(x, y, z)\,\mathrm{d}x + f_2(x, y, z)\,\mathrm{d}y + f_3(x, y, z)\,\mathrm{d}z. \tag{3.33}$$

Je-li (g_1, g_2, g_3) parametrizace oblouku $\mathcal{O}$, tj.

$$x = g_1(t)\,,\ y = g_2(t)\,,\ z = g_3(t)\,; \quad t \in \langle a, b\rangle, \tag{3.34}$$

pak

$$\int_{\mathcal{O}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{3} (f_k(g_1(t), g_2(t), g_3(t))\dot{g}_k(t)\right]\,\mathrm{d}t \tag{3.35}$$

Připomeňme si znovu fyzikální interpretaci křivkového integrálu 2. druhu. Představuje-li $\mathbf{f}$ silové vektorové pole působící na orientovaném oblouku $\mathcal{O}$, pak integrál $\int_{\mathcal{O}} \mathbf{f}\, \mathrm{d}\mathbf{s}$ udává práci, kterou vykoná silové pole $\mathbf{f}$, když pohybuje hmotným bodem po oblouku $\mathcal{O}$ ve smyslu určeném zadanou orientací od jeho počátečního bodu do bodu koncového. Z toho je také vidět, proč při změně orientace oblouku změní hodnota integrálu své znaménko na opačné.

Vlastnosti křivkového integrálu 2. druhu po oblouku
Nechť $\mathcal{O}$ je orientovaný oblouk s parametrizací $\mathbf{g}(t)$, nechť $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ jsou vektorové funkce definované na oblouku $\mathcal{O}$ a nechť α, β jsou reálná čísla.

1. **Závislost na orientaci**

   Je-li $-\mathcal{O}$ oblouk, který dostaneme z oblouku $\mathcal{O}$ změnou jeho orientace na opačnou, pak platí
   $$\int\limits_{\mathcal{O}} \mathbf{f}\, \mathrm{d}\mathbf{s} = -\int\limits_{-\mathcal{O}} \mathbf{f}\, \mathrm{d}\mathbf{s}, \tag{3.36}$$
   jestliže jeden z integrálů existuje.

   Poznámka Z této vlastnosti plyne, že když zaměníme danou parametrizaci za parametrizaci indukující opačnou orientaci, integrál změní znaménko.

2. **Linearita křivkového integrálu**
   $$\int\limits_{\mathcal{O}} (\alpha\mathbf{f}_1 + \beta\mathbf{f}_2)\, \mathrm{d}\mathbf{s} = \alpha \int\limits_{\mathcal{O}} \mathbf{f}_1\, \mathrm{d}\mathbf{s} + \beta \int\limits_{\mathcal{O}} \mathbf{f}_2\, \mathrm{d}\mathbf{s}, \tag{3.37}$$
   má-li pravá strana rovnosti smysl.

3. **Aditivita vzhledem k integračnímu oboru**

   Je-li $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ a oblouky $\mathcal{O}_1$ a $\mathcal{O}_2$ jsou orientovány tak, že koncový bod oblouku $\mathcal{O}_1$ je počátečním bodem oblouku $\mathcal{O}_2$, pak platí rovnost
   $$\int\limits_{\mathcal{O}} \mathbf{f}\, \mathrm{d}\mathbf{s} = \int\limits_{\mathcal{O}_1} \mathbf{f}\, \mathrm{d}\mathbf{s} + \int\limits_{\mathcal{O}_2} \mathbf{f}\, \mathrm{d}\mathbf{s}, \tag{3.38}$$
   má-li jedna strana rovnosti smysl.

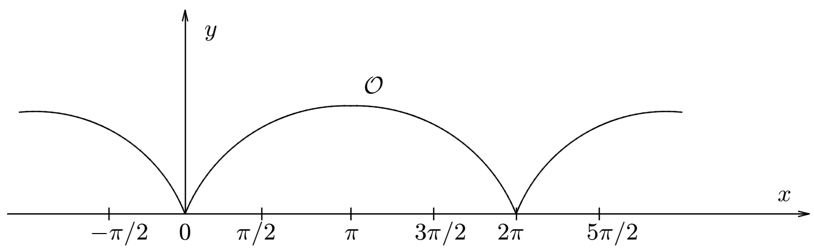
Příklady

1. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int\limits_{\mathcal{O}} (2-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$$

po jednom oblouku $\mathcal{O}$ cykloidy (viz obr. 3.5) zadaném parametrizací

$$\mathbf{g}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t),\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$



æ

Obrázek 3.5: Cykloida z 1. příkladu

Řešení
Pro danou parametrizaci $\mathbf{g}(t)$ je $\dot{\mathbf{g}}(t) = (1 - \cos t, \sin t),\ t \in (0, 2\pi)$, a tedy

$$\int\limits_{\mathcal{O}} (2-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{0}^{2\pi} [(2 - 1 + \cos t)(1 - \cos t) + (t - \sin t)(\sin t)]\,\mathrm{d}t = -2\pi.$$

2. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int\limits_{\mathcal{O}} (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y,$$

kde $\mathcal{O}$ je úsečka s počátečním bodem $\mathbf{a} = (2,3)$ a koncovým bodem $\mathbf{b} = (3,5)$.
Řešení
Za parametrizaci úsečky $\mathcal{O} = \overline{\mathbf{ab}}$ volíme vektorovou funkci

$$\mathbf{g}(t) = (t, 2t-1),\ t \in \langle 2, 3\rangle.$$

Pak $\dot{\mathbf{g}}(t) = (1,2)$, a tedy

$$\int\limits_{\mathcal{O}} (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y = \int_2^3 [(t - 2t + 1) + (t + 2t - 1)2]\,\mathrm{d}t = \frac{23}{2}.$$

3. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int\limits_{\mathcal{O}} (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$$

po oblouku $\mathcal{O}$, kterým je část grafu funkce $f(x) = x^2$ pro $x \in \langle 0, 2\rangle$. Oblouk je orientován tak, že počátečním bodem je bod $\mathbf{a} = (0, 0)$.

Řešení
Oblouk $\mathcal{O}$ budeme parametrizovat jako graf funkce

$$\mathbf{g}(t) = (t, t^2),\ t \in \langle 0, 2\rangle.$$

Odtud plyne $\dot{\mathbf{g}}(t) = (1, 2t)$, a tedy

$$\int_{\mathcal{O}} (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 [t - t^2 + (t+t^2)2t]\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (t + t^2 + 2t^3)\,\mathrm{d}t = \frac{38}{3}.$$

4. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{O}} (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$$

po oblouku $\mathcal{O}$, kterým je část grafu funkce $f(y) = y^2$ pro $y \in \langle 0, 2\rangle$. Oblouk je orientován tak, že počátečním bodem je bod $\mathbf{a} = (0, 0)$.

Řešení
Oblouk $\mathcal{O}$ budeme parametrizovat podobně jako v předešlém příkladě jako graf funkce, avšak nyní je nezávisle proměnná y a závisle proměnná x. Volíme tedy parametrizaci

$$\mathbf{g}(t) = (t^2, t),\ t \in \langle 0, 2\rangle.$$

Odtud plyne $\dot{\mathbf{g}}(t) = (2t, 1)$. Jelikož je $\mathbf{g}(0) = (0, 0)$, indukuje tato parametrizace na oblouku $\mathcal{O}$ orientaci souhlasnou se zadanou orientací, takže ji smíme použít, aniž musíme upravovat vypočtenou hodnotu integrálu. Po dosazení dostáváme

$$\int_{\mathcal{O}} (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 [(t^2 - t)2t + t^2 + t]\,\mathrm{d}t = \frac{22}{3}.$$

5. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{O}} (y^2 + z)\,\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y + (x + y + yz)\,\mathrm{d}z$$

po jednom závitu šroubovice s poloměrem 3 a stoupáním 2π, orientovaným tak, že počátečním bodem je bod $\mathbf{a} = (3, 0, 2\pi)$ a koncovým bodem je bod $\mathbf{b} = (3, 0, 0)$.

Řešení
Za parametrizaci oblouku $\mathcal{O}$ volíme vektorovou funkci válcových souřadnic

$$\mathbf{g}(t) = (3\cos t, 3\sin t, t),\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

Odtud plyne

$$\dot{\mathbf{g}}(t) = (-3\sin t, 3\cos t, 1),\ t \in (0, 2\pi).$$

Jelikož je $\mathbf{g}(0) = (3, 0, 0)$, indukuje tato parametrizace na oblouku $\mathcal{O}$ orientaci opačnou než je zadaná orientace, takže ji sice smíme použít, avšak musíme změnit znaménko vypočtené hodnoty integrálu. My tu změnu znaménka provedeme ihned v prvním kroku tím, že před integrál, který dostaneme po dosazení hodnot parametrizace a jejich derivací, dáme znaménko mínus.

$$\int_{\mathcal{O}} (y^2 + z)\,\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y + (x + y + yz)\,\mathrm{d}z =$$

$$= -\int_0^{2\pi} [(9\sin^2 t + t)(-3\sin t) - 9\sin t\cos t(3\cos t) + (3\cos t + 3\sin t + 3t\sin t)]\,\mathrm{d}t =$$

$$= -3\int_0^{2\pi} (\cos t - 8\sin t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

6. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{O}} (x + 1)\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$$

po části kružnice se středem v počátku a poloměrem r, která leží v prvním kvadrantu. Za počáteční bod oblouku volíme bod $\mathbf{a} = (0, r)$.

Řešení
Zadanou čtvrtkružnici $\mathcal{O}$ parametrizujeme pomocí polárních souřadnic

$$\mathbf{g}(t) = (r\cos t, r\sin t)\,, \quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle.$$

Pak

$$\dot{\mathbf{g}}(t) = (-r\sin t, r\cos t)\,, \quad t \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Jelikož je $\mathbf{g}(0) = (r, 0)$, indukuje tato parametrizace na oblouku $\mathcal{O}$ orientaci opačnou než je zadaná orientace. Smíme ji sice použít, avšak musíme změnit znaménko vypočtené hodnoty integrálu. Je

$$\int_{\mathcal{O}} (x + 1)\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2\cos^2 t + r\cos t - r^2\sin^2 t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= -r\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos 2t + \cos t)\,\mathrm{d}t = -r.$$

7. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{O}} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + (x + y - 1)\,\mathrm{d}z$$

po úsečce $\overline{\mathbf{ab}}$, kde $\mathbf{a} = (1, 1, 1), \mathbf{b} = (2, 3, 4)$.

Řešení
Zvolíme parametrizaci úsečky

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}),\ t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Pak je

$$\mathbf{g}(t) = (1+t, 1+2t, 1+3t),\ t \in \langle 0,1\rangle,\ \dot{\mathbf{g}}(t) = (1,2,3),\ t \in (0,1).$$

Jelikož je $\mathbf{g}(0) = (1,1,1)$, indukuje tato parametrizace na oblouku $\mathcal{O}$ orientaci souhlasnou se zadanou orientací, takže ji smíme použít aniž měníme znaménko vypočtené hodnoty integrálu. Dosazením dostáváme

$$\int_{\mathcal{O}} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + (x+y-1)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 [1+t+2+4t+(1+t+1+2t-1)3]\,\mathrm{d}t = 13.$$

8. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{O}} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + (xz-y)\,\mathrm{d}z$$

po oblouku $\mathcal{O}$ zadaném parametrizací

$$\mathbf{g}(t) = (t^2, 2t, 4t^3),\ t \in \langle 0, 1\rangle,$$

orientovaném tak, že za počáteční bod volíme bod $\mathbf{a} = (1,2,4)$.

Řešení
Parametrizace je zadaná, takže zbývá jen zjistit, jakou orientaci indukuje. Jelikož bod $\mathbf{a}$ je obrazem koncového bodu oboru parametrů a počátečním bodem pro zadanou orientaci, je indukovaná orientace opačná než orientace zadaná. Je

$$\int_{\mathcal{O}} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + (xz-y)\,\mathrm{d}z = -\int_0^1 [t^2 \cdot 2t + 2t \cdot 2 + (4t^5 - 2t)\cdot 12t^2]\,\mathrm{d}t = -\frac{5}{2}.$$

9. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{O}} (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y,$$

kde oblouk $\mathcal{O}$ je část grafu kvadratické funkce

$$\mathcal{O} = \{(x,y) \mid (y = x^2) \wedge (-1 \le x \le 1)\}.$$

Za počáteční bod volíme bod $\mathbf{a} = (-1, 1)$.

Řešení
Oblouk $\mathcal{O}$ parametrizujeme jako graf funkce

$$x = t, y = t^2,\ -1 \le t \le 1.$$

Zvolená parametrizace indukuje souhlasnou orientaci, jelikož bod $\mathbf{a} = (-1,1)$ je obrazem počáteční hodnoty $t = -1$. Tečné vektorové pole je $\dot{\mathbf{g}}(t) = (1, 2t)$, a tedy

$$\int_{\mathcal{O}} (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 (t^2 - 2t^3 + (t^4 - 2t^3)2t)\,\mathrm{d}t = -\frac{14}{15}.$$

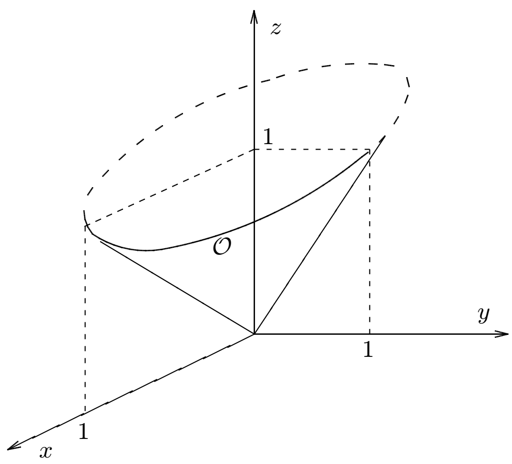
10. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{O}} x^2\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$$

po oblouku (viz obr. 3.6)

$$\mathcal{O} = \{(x, y, z) \mid (x^2 + y^2 = z^2) \wedge (z = 1) \wedge (0 \leq x) \wedge (0 \leq y)\}$$

orientovaném tak, že bod $(1, 0, 1)$ je počátečním bodem.



Obrázek 3.6: Oblouk z 10. příkladu

Řešení
Oblouk $\mathcal{O}$ leží na kružnici, která je průsečnicí kuželové plochy a roviny $z = 1$. Zavedeme válcové souřadnice

$$x = \rho\cos\varphi\,,\ y = \rho\sin\varphi\,,\ z = z.$$

Dosadíme-li do zadané rovnice křivky, dostaneme $\rho^2 = z^2$. Jelikož je $z = 1$, je také $\rho = 1$. Dospěli jsme tak k parametrizaci $\mathbf{g}(\varphi)$ naší čtvrtkružnice $\mathcal{O}$. Je to

$$x = g_1(\varphi) = \cos\varphi,\ y = g_2(\varphi) = \sin\varphi,\ z = 1,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Pro tečné vektorové pole dostáváme

$$\dot{\mathbf{g}}(\varphi)) = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0),\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Počáteční bod $\varphi = 0$ se zobrazuje v parametrizaci na bod $(1, 0, 1)$, takže indukovaná orientace souhlasí se zadanou orientací. Dosadíme a počítáme

$$\int_{\mathcal{O}} x^2\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2\varphi\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{6}.$$

Úlohy

1. Nalezněte hodnoty následujících integrálů:

   (a)
   $$\int_{\mathcal{O}} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$$
   po oblouku
   $$\mathcal{O} = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right) \wedge (x > 0)\right\}$$
   orientovaném proti směru pohybu hodinových ručiček. $[-\pi ab.]$

   (b)
   $$\int_{\mathcal{O}} \sin y\,\mathrm{d}x + \sin x\,\mathrm{d}y,$$
   kde oblouk $\mathcal{O}$ je úsečka s počátečním bodem $(0,\pi)$ a koncovým bodem $(\pi,0)$. $[0.]$

   (c)
   $$\int_{\mathcal{O}} (2a - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y,$$
   kde oblouk $\mathcal{O}$ je v rovině zadán parametrizací $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ t \in (0, 2\pi),\ a > 0.$ $[-2\pi a^2.]$

2. Nalezněte hodnotu integrálu
   $$\int_{\mathcal{O}} 2xy\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y,$$
   kde $\mathcal{O}$ je

   (a) úsečka s počátečním bodem $(0,0)$ a koncovým bodem $(2,1)$. $[4/3.]$

   (b) oblouk paraboly $y = \frac{1}{4}x^2$ s počátečním bodem $(0,0)$ a koncovým bodem $(2,1)$. $[0.]$

   (c) oblouk paraboly $x = 2y^2$ s počátečním bodem $(0,0)$ a koncovým bodem $(2,1)$. $[12/5.]$

3.2.2 Křivkový integrál 2. druhu po křivce

Definice integrálu

Nechť $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_r$ jsou orientované oblouky v prostoru $\mathbf{R}^n$ a nechť $\mathbf{g}_k \colon \langle a_k, b_k\rangle \to \mathbf{R}^n$ je parametrizace oblouku $\mathcal{O}_k, k = 1, 2, \ldots, r$, indukující na oblouku $\mathcal{O}_k$ orientaci souhlasnou se zadanou orientací. Předpokládejme, že koncový bod oblouku $\mathcal{O}_k$ je počátečním bodem oblouku $\mathcal{O}_{k+1}$ pro $k = 1, 2, \ldots, r-1$ a že $\mathcal{K} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{O}_r$ je orientovaná křivka v $\mathbf{R}^n$ s parametrizací $\mathbf{g}$, indukující na křivce $\mathcal{K}$ orientaci souhlasnou se zadanou orientací. Nechť konečně $\mathbf{f}\colon \mathcal{K} \to \mathbf{R}^n$ je daná vektorová funkce. Existují-li integrály $\int\limits_{\mathcal{O}_k} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s}$, $k = 1, 2, \ldots, r$, pak číslo

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \sum_{k=1}^{r} \int\limits_{\mathcal{O}_k} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{s} \tag{3.39}$$

nazýváme *křivkovým integrálem 2. druhu funkce* $\mathbf{f}$ *po křivce* $\mathcal{K}$ (také *orientovaným křivkovým integrálem*).

Vlastnosti orientovaného křivkového integrálu Vzhledem k tomu, že orientovaný křivkový integrál po orientované křivce je definován pomocí orientovaných křivkových integrálů po orientovaných obloucích, dají se zcela přirozeně na něj přenést tvrzení o vlastnostech křivkového integrálu po oblouku.

Příklady

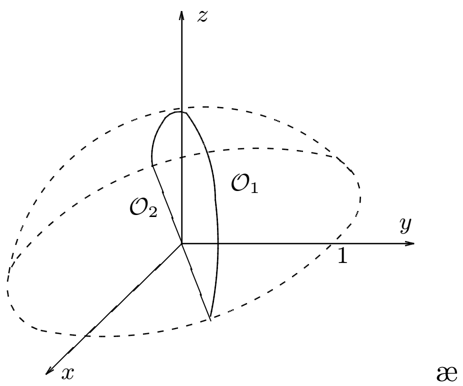
1. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int\limits_{\mathcal{K}} (y^2 + 1)\,\mathrm{d}x + 2z\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z$$

po hranici množiny (viz obr. 3.7)

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 \leq 1) \wedge (y = x) \wedge (0 \leq z)\},$$

orientované tak, že tečný vektor $\boldsymbol{\tau}(0, 0, 1) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.



Obrázek 3.7: Oblouk z 1. příkladu

Řešení

Křivka $\mathcal{K}$ je sjednocením dvou oblouků $\mathcal{K} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$. Oblouk $\mathcal{O}_1$ je půlkružnice, vytvořená jako průnik horní jednotkové polosféry $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, roviny $y = x$ a horního poloprostoru $0 \leq z$. Oblouk $\mathcal{O}_2$ je úsečka s krajními body $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ a $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Abychom nalezli parametrizaci oblouku $\mathcal{O}_1$, zvolíme sférické souřadnice

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta,\ \ y = r\sin\varphi\sin\vartheta,\ \ z = \cos\vartheta.$$

Po dosazení do rovnice sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a do rovnice roviny $y = x$ dostaneme rovnosti $r^2 = 1,\ \cos\varphi = \sin\varphi$. Odtud plyne $r = 1, \varphi = \frac{\pi}{4}$. Pro oblouk $\mathcal{O}_1$ můžeme volit parametrizaci

$$x = g_1(\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta,\ y = g_2(\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta,\ z = g_3(\vartheta) = \cos\vartheta,\ -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$$

Odtud pro tečné vektorové pole $\dot{\mathbf{g}}(\vartheta)$ dostaneme

$$\dot{\mathbf{g}}(\vartheta) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta,\ -\sin\vartheta\right),\ -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}.$$

Můžeme tedy počítat integrál přes oblouk $\mathcal{O}_1$

$$\int\limits_{\mathcal{O}_1} (y^2+1)\,\mathrm{d}x + 2z\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z =$$

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{1}{2}\sin^2\vartheta + 1\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta + \sqrt{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\sin^3\vartheta\right)\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{1}{6}\sin^3\vartheta + \sin\vartheta + \vartheta + \frac{1}{2}\sin 2\vartheta + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta - \frac{\sqrt{2}}{6}\cos^3\vartheta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}(7+3\pi)}{6}.$$

Zbývá najít hodnotu integrálu po úsečce $\mathcal{O}_2$. Pro tu můžeme zvolit parametrizaci $x = t,\ y = t,\ z = 0,\ t \in \langle -1, 1\rangle$. Tečné vektorové pole je pak $\dot{\mathbf{g}}(t) = (1,1,0)$ a snadno si ověříme, že na úsečce indukuje orientaci opačnou k orientaci zadané. Pro výpočet integrálu dostáváme

$$\int\limits_{\mathcal{O}_2} (y^2+1)\,\mathrm{d}x + 2z\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z = -\int\limits_{-1}^{1}(t^2+1)\,\mathrm{d}t = -\frac{8}{3}.$$

Abychom získali hodnotu hledaného křivkového integrálu, musíme obě nalezené hodnoty sečíst. Je tedy

$$\int\limits_{\mathcal{K}} (y^2+1)\,\mathrm{d}x + 2z\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{O}_1} (y^2+1)\,\mathrm{d}x + 2z\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\mathcal{O}_2} (y^2+1)\,\mathrm{d}x + 2z\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{2}}{6}(7+3\pi) - \frac{8}{3}.$$

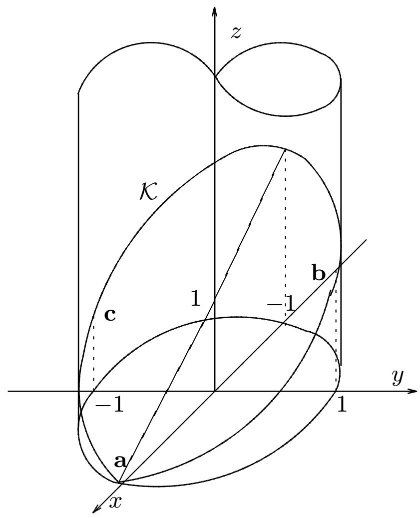
2. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int\limits_{\mathcal{K}} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$$

po křivce (viz obr. 3.8)

$$\mathcal{K} = \{(x,y,z) \mid (x^2+y^2=1) \wedge (x+z=1)\},$$

orientované uspořádanou trojicí bodů $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, kde $\mathbf{a} = (1,0,0),\ \mathbf{b} = (0,1,1),\ \mathbf{c} = (0,-1,1)$.



æ

Obrázek 3.8: Křivka z 2. příkladu

Řešení
Křivka $\mathcal{K}$ je elipsa, která je průnikem válcové plochy a roviny. Dosadíme-li z válcových souřadnic $x = \rho\cos\varphi\,,\ y = \rho\sin\varphi\,,\ z = z$ do rovnic popisujících křivku $\mathcal{K}$, dostaneme rovnosti $\rho^2 = 1,\ \rho\cos\varphi + z = 1$. Odtud plyne $\rho = 1,\ z = 1 - \cos\varphi$. Oblouk $\mathcal{O}$ má tudíž parametrizaci

$$x = g_1(\varphi) = \cos\varphi,\ y = g_2(\varphi) = \sin\varphi,\ z = g_3(\varphi) = 1 - \cos\varphi\,,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Pro tečné vektorové pole $\dot{\mathbf{g}}(\varphi)$ dostáváme

$$\dot{\mathbf{g}}(\varphi) = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi)\,,\ 0 < \varphi < 2\pi.$$

Vyšetříme ještě indukovanou orientaci. Bod $\varphi = 0$ se zobrazuje na bod $(1,0,0) = \mathbf{a}$, bod $\varphi = \frac{\pi}{2}$ se zobrazuje na bod $(0,1,1) = \mathbf{b}$ a bod $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ se zobrazuje na bod $(0,-1,1) = \mathbf{c}$. Vidíme, že indukovaná orientace je souhlasná se zadanou orientací. Můžeme tedy počítat

$$\int_{\mathcal{O}} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} (-\sin^2\varphi + \cos\varphi - \cos^2\varphi + \cos\varphi\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = -2\pi.$$

3. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{K}} (x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y$$

po uzavřené křivce v rovině

$$\mathcal{K} = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

orientované proti směru pohybu hodinových ručiček.

Řešení
Zadaná křivka je elipsa se středem v počátku a osami a, b. K vytvoření její parametrizace použijeme zobecněné polární souřadnice $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$. Dosadíme-li do zadané rovnice křivky, dostaneme $\rho^2 = 1$, a tedy také $\rho = 1$. Dosazením této hodnoty za ρ do polárních souřadnic získáme parametrizaci oblouku

$$x = g_1(\varphi) = a\cos\varphi,\ y = g_2(\varphi) = b\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Pro tečné vektorové pole $\dot{\mathbf{g}}(\varphi)$ platí

$$\dot{\mathbf{g}}(\varphi) = (-a\sin\varphi, b\cos\varphi),\ 0 < \varphi < 2\pi.$$

Abychom nalezli indukovanou orientaci, budeme vyšetřovat směr pohybu po elipse, odpovídající zvolené parametrizaci. K tomu nalezneme tři po sobě jdoucí body na horní polovině elipsy. Hodnotám $t = 0$, resp. $t = \frac{\pi}{2}$, resp. $t = \pi$ odpovídají body $(a, 0)$, resp. $(0, b)$, resp. $(-a, 0)$, což značí pohyb proti směru pohybu hodinových ručiček. Je tedy indukovaná orientace souhlasná se zadanou orientací. Dostáváme tak

$$\int_{\mathcal{K}} (x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^{2\pi} ((a\cos\varphi + b\sin\varphi)(-a\sin\varphi) + (a\cos\varphi - b\sin\varphi)b\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-a^2\cos\varphi\sin\varphi - ab\sin^2\varphi + ab\cos^2\varphi - b^2\sin\varphi\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\frac{1}{2}(a^2+b^2)\sin 2\varphi + ab\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 0.$$

4. Máme najít hodnotu integrálu

$$\int_{\mathcal{K}} y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z$$

po hranici množiny (viz obr. 3.9)

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x^2+y^2+z^2 = 1) \wedge (x^2+y^2 = x) \wedge (0 \le z)\},$$

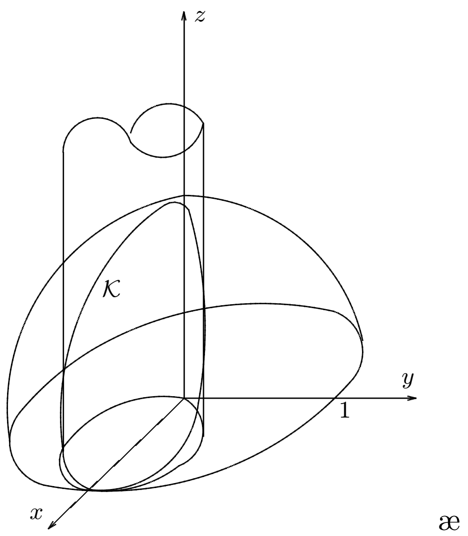
orientované tak, že v bodě $\mathbf{a} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ je tečný vektor $\boldsymbol{\tau} = (-1, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Řešení
Křivka $\mathcal{K}$ je průnikem kulové plochy a válcové plochy s osou rovnoběžnou s osou z. Abychom nalezli její parametrizaci, vyjádříme její rovnice ve válcových souřadnicích

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z.$$

Dosazením do rovnice popisující křivku dostaneme

$$\rho^2 + z^2 = 1,\ \rho^2 = \rho\cos\varphi.$$



Obrázek 3.9: Křivka ze 4. příkladu

Je tedy

$$\rho = \cos\varphi,\ z = \sqrt{1-\rho^2}.$$

Odtud dosazením dostaneme

$$z = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = |\sin\varphi|.$$

Za parametrizaci můžeme tedy volit vektorovou funkci

$$x = \cos^2\varphi,\ y = \cos\varphi\sin\varphi,\ z = |\sin\varphi|,\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Křivka se skládá ze dvou oblouků $\mathcal{O}_1$ a $\mathcal{O}_2$, kde

$$\mathcal{O}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x^2+y^2+z^2=1) \wedge (x^2+y^2=x) \wedge (y \leq 0) \wedge (0 \leq z)\}$$

s parametrizací

$$x = g_1(\varphi) = \cos^2\varphi,\ y = g_2(\varphi) = \cos\varphi\sin\varphi,\ z = g_3(\varphi) = -\sin\varphi,\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0\,,$$

a s tečným vektorovým polem

$$\dot{\mathbf{g}}_1(\varphi) = (-2\cos\varphi\sin\varphi,\ -\sin^2\varphi+\cos^2\varphi,\ -\cos\varphi),\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0\,,$$

a

$$\mathcal{O}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x^2+y^2+z^2=1) \wedge (x^2+y^2=x) \wedge (0 \leq y) \wedge (0 \leq z)\}$$

s parametrizací

$$x = g_1(\varphi) = \cos^2\varphi,\ y = g_2(\varphi) = \cos\varphi\sin\varphi,\ z = g_3(\varphi) = \sin\varphi,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\,,$$

a s tečným vektorovým polem

$$\dot{\mathbf{g}}_2(\varphi) = (-2\cos\varphi\sin\varphi,\ -\sin^2\varphi + \cos^2\varphi,\ \cos\varphi),\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\,.$$

Zvolená parametrizace indukuje na oblouku $\mathcal{O}_2$ orientaci souhlasnou se zadanou orientací, jak snadno ověříme, když do její parametrizace dosadíme $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Integrál po celé křivce $\mathcal{K}$ dostaneme jako součet integrálů po obloucích $\mathcal{O}_1$ a $\mathcal{O}_2$. Je tudíž

$$I = \int\limits_{\mathcal{K}} y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\mathcal{O}_1} y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\mathcal{O}_2} y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2\varphi\sin^2\varphi(-2\cos\varphi\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi +$$

$$+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi - \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^4\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

$$I_2 = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\sin^2\varphi(-2\cos\varphi\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi +$$

$$+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

Odtud

$$I = I_1 + I_2 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\sin^2\varphi(-2\cos\varphi\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi +$$

$$-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^4\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = I_3 + I_4 + I_5 + I_6.$$

Pro jednotlivé integrály platí $I_3 = 0$, neboť funkce $-2\cos^3\varphi\sin^3\varphi$ je lichá. Funkce $\cos^5\varphi$ je sudá, a tedy $I_5 = -I_6$. Zbývá určit integrál I_4. Je

$$I = I_4 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\varphi)((1 + \cos 2\varphi) - (1 - \cos 2\varphi))\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 2\varphi - 1 + 2\cos 2\varphi - \cos^2 2\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos 2\varphi - 1 - \cos 4\varphi)\mathrm{d}\varphi = -\frac{\pi}{4}.$$

Úlohy

Nalezněte hodnoty následujících integrálu:

1. $\int_{\mathcal{K}} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$ kde křivka $\mathcal{K}$ je lomená čára spojující body $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ a $(1,1,1)$. [1.]

2. $\int_{\mathcal{K}} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$ po obvodu trojúhelníka, jehož vrcholy jsou průsečíky roviny $3x + 2y + 6z = 6$ se souřadnicovými osami. [−6.]

3. $\int_{\mathcal{K}} 2xy\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{K}$ je

   (a) lomená čára s vrcholy $(0,0)$, $(2,0)$ a $(2,1)$, přičemž orientace je zadaná daným pořadím bodů. [−4.]

   (b) lomená čára s vrcholy $(0,0)$, $(0,1)$ a $(2,1)$, přičemž orientace je zadaná daným pořadím bodů. [4.]

4. $\int_{\mathcal{K}} (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$ po křivce

$$\mathcal{K} = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x^2+y^2=a^2) \wedge \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1\right) \wedge (a>0) \wedge (h>0)\right\}$$

   orientované zadaným pořadím tří bodů $(a,0,0)$, $(0,a,h)$, $(-a,0,2h)$. $[-2\pi a(a+h).]$

5. $\int_{\mathcal{K}} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$ po křivce $\mathcal{K}$ zadané parametrickými rovnicemi $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in (0, 2\pi)$, $a > 0$. $\left[\frac{-3\pi}{4}a^2.\right]$

6. $\int_{\mathcal{K}} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x - \frac{x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$ po kružnici $x^2+y^2 = r^2$, $r > 0$, orientované zadaným pořadím tří bodů $(r,0)$, $(0,r)$, $(-r,0)$. $[-2\pi.]$

7. $\int_{\mathcal{K}} (x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y$ po elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > 0, b > 0$, orientované zadaným pořadím tří bodů $(a,0)$, $(0,b)$, $(-a,0)$. [0.]

8. $\int_{\mathcal{K}} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$ po křivce

$$\mathcal{K} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x^2+y^2=1) \wedge (z = xy)\}$$

   orientované zadaným pořadím tří bodů $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(-1,0,0)$. $[-\pi.]$

æ