MATEMATICKÁ ANALÝZA 2

PŘEHLED LÁTKY

1 METRICKÉ A NORMOVANÉ PROSTORY

1.1. Prostor $\mathbb{R}^n$ a jeho podmnožiny

Připomeňme, že prostorem $\mathbb{R}^n$ rozumíme množinu uspořádaných n–tic reálných čísel, tj.

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ krát}} .$$

Prvky $\mathbb{R}^n$ budeme značit $\boldsymbol{x}$, tj. $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
V prostoru $\mathbb{R}^n$ se definují operace násobení reálným číslem a a sčítání vztahy

$$a\boldsymbol{x} = a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n) ,$$

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)+(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) .$$

Jak víme z lineární algebry, množina $\mathbb{R}^n$ s uvedenými operacemi tvoří vektorový prostor nad tělesem reálných čísel.

Aby bylo možné vyšetřovat limity v prostoru $\mathbb{R}^n$, je třeba zavést pojem **okolí bodu**. To lze definovat pomocí **vzdálenosti dvou bodů**.

1.2. Metrický prostor

Definice 1. Nechť je M množina. Funkci $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ nazveme **metrikou**, jestliže splňuje následující podmínky:

(1) pro každé $x \in M$ je $\rho(x, x) = 0$;

(2) pro každé $x, y \in M$, $x \neq y$, je $\rho(x, y) = \rho(y, x) > 0$;

(3) pro každé $x, y, z \in M$ platí $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Množinu M, na které je definována metrika, nazýváme **metrický prostor**. Pokud budeme chtít zdůraznit, že M je metrický prostor s metrikou ρ, budeme psát (M, ρ).

Pomocí metriky definujeme v metrickém prostoru okolí bodů.

Definice 2. Nechť je (M, ρ) metrický prostor a $x_0 \in M$. Pro každé $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu všech $x \in M$, pro která je $\rho\big(x, x_0\big) < \varepsilon$ **okolím bodu x_0** (přesněji **otevřeným ε–ovým okolím** bodu x_0. ε–ové okolí bodu x_0 budeme značit $U_\varepsilon\big(x_0\big)$.

Množinu všech bodů $x \in M$, pro která je $0 < \rho\big(x, x_0\big) < \varepsilon$ nazýváme **prstencové okolí bodu x_0** a budeme jej značit $P_\varepsilon\big(x_0\big)$.

Poznámka. Zřejmě platí:

$$P_\varepsilon\big(x_0\big) = U_\varepsilon\big(x_0\big) \setminus \big\{x_0\big\}\,.$$

✎ ***Příklad 1.*** Nechť M je libovolná neprázdná množina. Definujme funkci $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = y \\ 1 & \text{pro } x \neq y. \end{cases}$$

Snadno se ukáže, že ρ je metrika na M. Pro $\varepsilon > 1$ a $x_0 \in M$ je $U_\varepsilon\big(x_0\big) = M$ a $P_\varepsilon(x_0) = M \setminus \{x_0\}$. Pro $\varepsilon \leq 1$ a každé $x_0 \in M$ je $U_\varepsilon\big(x_0\big) = \big\{x_0\big\}$, tedy jednobodová množina obsahující pouze bod x_0 a $P_\varepsilon(x_0) = \emptyset$. Takto definovaná metrika se nazývá **diskrétní**.

Definice 3. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $X \subset M$. Bod $x \in X$ nazveme **vnitřní bod** množiny X právě tehdy, když existuje okolí $U_\varepsilon(x)$ takové, že $U_\varepsilon(x) \subset X$. Množinu všech vnitřních bodů množiny $X \subset M$ nazýváme **vnitřkem množiny** M a značíme X°.

Definice 4. Nechť (M, ρ) je metrický prostor. Množina $X \subset M$ se nazývá **otevřená** právě tehdy, je-li každý bod $x \in X$ vnitřním bodem množiny X, tj. právě tehdy, když $X = X^\circ$.

Definice 5. Nechť (M, ρ) a (M, σ) jsou metrické prostory. Jestliže existují reálná čísla a a b, $0 < a \le b$ taková, že pro každé x, $y \in M$ platí $a\rho(x, y) \le \sigma(x, y) \le b\rho(x, y)$ nazveme metriky ρ a σ **ekvivalentní**.

Věta 1. *Nechť jsou (M, ρ) a (M, σ) metrické prostory s ekvivalentními metrikami ρ a σ. Množina $X \subset M$ je otevřená v metrice ρ právě tehdy, když je otevřená v metrice σ.*

Důkaz. Nechť je $X \subset M$ otevřená množina v metrice ρ a $x \in X$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že každé $y \in M$, pro které platí $\rho(x, y) < \varepsilon$, je prvkem X. Z nerovnosti $\sigma(x, y) \leq b\rho(x, y)$ plyne, že každý bod $y \in M$, pro který je $\sigma(x, y) < b\varepsilon$ patří do množiny X. Tedy x je vnitřní bod množiny X v metrice σ. Podobně je-li v metrice σ okolí bodu $x \in X$ s poloměrem ε podmnožinou X, stačí zvolit v metrice ρ okolí s poloměrem ε/a. $\square$

Věta 2. *Nechť je (M, ρ) metrický prostor. Pak jsou $\emptyset$ a M otevřené množiny.*

Jestliže jsou $X_\alpha \subset M$, $a \in A$, kde A je množina, otevřené množiny, je množina $\bigcup_{a \in A} X_a$ otevřená množina.

Jestliže jsou $X_i \subset M$, kde $i = 1, 2, \ldots, N$, otevřené množiny, je množina $\bigcap_{i=1}^{N} X_i$ otevřená.

Důkaz. Protože $\emptyset$ neobsahuje žádný bod, je každý její bod jejím vnitřním bodem (ukažte, že neplatí opačné tvrzení), a tedy prázdná množina je otevřená. Protože pro každé $x \in M$ a libovolné $\varepsilon > 0$ je $U_\varepsilon(x) \subset M$, je množina M otevřená.

Nechť je $x \in \bigcup_{a \in A} X_a$. Pak existuje index $a \in A$ takový, že $x \in X_a$. Protože je množina X_a otevřená, existuje pro každé $x \in X_a$ okolí $U_\varepsilon(x) \subset X_a$. Tedy $U_\varepsilon(x) \subset \bigcup\limits_{a \in A} X_a$.

Nechť $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} X_i$. Pak je pro každé $i = 1, \dots, N$ bod $x \in X_i$. Protože jsou množiny X_i otevřené, existují okolí $U_{\varepsilon_i}(x) \subset X_i$. Jestliže zvolíme $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_N) > 0$ pro každé $i = 1, \dots, N$ okolí $U_\varepsilon(x) \subset U_{\varepsilon_i}(x) \subset X_i$, a tedy také $U_\varepsilon(x) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{N} X_i$. $\square$

Věta 3. *Vnitřek množiny $X \subset M$ je největší otevřená podmnožina X, tj. jestliže je $Y \subset X$ otevřená množina, pak $Y \subset X^\circ$.*
X° je sjednocení všech otevřených podmnožin Y množiny X.

Důkaz. Nechť je $Y \subset X$ otevřená množina. Pak je každý bod $x \in Y$ vnitřní bod množiny X, a tedy $x \in X^\circ$.
Druhé tvrzení plyne z toho, že sjednocení libovolné množiny otevřených množin je otevřená množina. $\square$

Definice 6. Nechť je (M, ρ) metrický prostor a $X \subset M$. Bod $x \in M$ nazýváme **hromadný bod množiny X** právě tehdy, když každé prstencové okolí $P_\varepsilon(x)$ obsahuje alespoň jeden bod množiny X. Množinu všech hromadných bodů množiny X budeme značit der X.

Poznámka. Je-li x hromadný bod množiny X, pak každé okolí bodu x obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny X.

Definice 7. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $X \subset M$. Pak množinu $\overline{X} = X \cup \operatorname{der} X$ nazýváme **uzávěr množiny X**.

Definice 8. Podmnožina X metrického prostoru (M, ρ) se nazývá **uzavřená** právě tehdy, když obsahuje všechny své hromadné body, tj. právě když $X = \overline{X}$.

Věta 4. *Nechť (M, ρ) je metrický prostor.*

- *Množina $X \subset M$ je uzavřená právě tehdy, když je $M \setminus X$ otevřená.*
- *Množina $X \subset M$ je otevřená právě tehdy, když je množina $M \setminus X$ uzavřená.*

Důkaz. Nechť je množina X uzavřená. Je-li $x \in M \setminus X$, pak není prvkem der X. Tedy existuje prstencové okolí $P_\varepsilon(x)$ bodu x takové, že $P_\varepsilon(x) \cap X = \emptyset$. Tedy pro toto ε platí $U_\varepsilon(x) \subset M \setminus X$ a tedy x je vnitřním bodem množiny $M \setminus X$. Nechť je množina $M \setminus X$ otevřená a $x \in$ der X. Pak pro každé prstencové okolí $P_\varepsilon(x)$ je $P_\varepsilon(x) \cap X \neq \emptyset$. Tedy protože je $M \setminus X$ otevřená množina, platí $x \notin M \setminus X$, tj. $x \in X$. Tedy množina X obsahuje všechny své hromadné body. Tvrzení části (2) lze dokázat pomocí rovnosti $X = M \setminus (M \setminus X)$. □

Věta 5. *Nechť je (M, ρ) metrický prostor. Pak jsou množiny $\emptyset$ a M uzavřené.*
Jestliže jsou X_a, $a \in A$, kde A je libovolná množina, uzavřené množiny. Pak je množina $X = \bigcap_{a \in A} X_a$ uzavřená.
Jestliže jsou X_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, uzavřené množiny, je množina $X = \bigcup_{i=1}^{N} X_i$ uzavřená.

Důkaz. Stačí použít větu 2 a de Morganovy vzorce

$$\bigcup_{a\in A}(M\setminus X_a)=M\setminus\bigcap_{a\in A}X_a\,,\quad \bigcap_{a\in A}(M\setminus X_a)=M\setminus\bigcup_{a\in A}X_a\,.\quad\square$$

Věta 6. *Nechť (M,ρ) je metrický prostor a $X\subset M$. Pak platí:*

- *$\overline{X}$ je nejmenší uzavřená množina, pro kterou je $X\subset\overline{X}$, tj. je-li $X\subset Y$ a Y je uzavřená, pak $\overline{X}\subset Y$.*
- *$\overline{X}$ je průnik všech uzavřených množin Y takových, že $X\subset Y$.*

Důkaz. Tuto větu lze dokázat stejně jako její analogii pro otevřené množiny (Věta 3) nebo pomocí de Morganových vzorců. $\square$

Definice 9. Nechť je (M,ρ) metrický prostor a $X\subset M$. **Hranicí množiny** X nazýváme množinu $\partial X=\overline{X}\cap\overline{M\setminus X}$. Bod $x\in\partial X$ se nazývá **hraniční bod** množiny X.

Definice 10. Nechť je (M,ρ) metrický prostor a $X \subset M$ je neprázdná. **Průměrem množiny** X nazýváme číslo

$$\operatorname{diam}(X) = \sup_{x,\, y\in X} \rho(x,y)\,.$$

Je-li $X = \emptyset$, klademe $\operatorname{diam}(X) = 0$.

Množina $X \subset M$ se nazývá **omezená**, je-li $\operatorname{diam}(X) < \infty$.

Věta 7. *Podmnožina X metrického prostoru (M,ρ) je omezená právě tehdy, když existuje $y \in M$ a $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in X$ je $\rho(y,x) \le K$.*

Důkaz. Nechť $y \in M$. Pro každé $x_1,\ x_2 \in X$ plyne z trojúhelníkové nerovnosti $\rho\big(x_1,x_2\big) \le \rho\big(x_1,y\big) + \rho\big(y,x_2\big)$. Jestliže pro každé $x \in X$ platí nerovnost $\rho(x,y) \le K$, pak pro každé $x_1,\ x_2 \in X$ platí nerovnost $\rho\big(x_1,x_2\big) \le 2K$. Z toho ale plyne, že $\operatorname{diam}(X) = \sup\limits_{x_1,\, x_2\in X} \rho\big(x_1,x_2\big) \le 2K$.

Nechť je množina X omezená a $y \in M$. Nechť je $x_0 \in M$ pevné. Pro každé $x \in X$ plyne z trojúhelníkové nerovnosti vztah $\rho(y,x) \le \rho\big(y,x_0\big) + \rho\big(x_0,x\big) \le K$, kde $K = \rho\big(y,x_0\big) + \operatorname{diam}(X)$. $\square$

Definice 11. Nechť je (M, ρ) metrický prostor. Množina $X \subset M$ se nazývá **nesouvislá** právě tehdy, když existují podmnožiny $A, B \subset X$ takové, že $X = A \cup B$ a $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. Množina $X \subset M$ se nazývá **souvislá** pravě tehdy, když není nesouvislá.

Definice 12. **Vzdáleností** dvou neprázdných podmnožin X a Y metrického prostoru (M, ρ) nazýváme číslo

$$\operatorname{dist}(X, Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \rho(x, y) .$$

1.2.1. Normovaný prostor

Definice 13. Nechť je V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Zobrazení $\nu : V \to \mathbb{R}$, pro které platí:

- $\nu(x) \geq 0$
- $\nu(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$
- $\nu(ax) = |a|\nu(x)$
- $\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y)$

se nazývá **norma**. Vektorový prostor V, na kterém je definována norma se nazývá **normovaný prostor**. Jestliže chceme zdůraznit, že V je normovaný prostor s normou ν, budeme psát (V, ν).

Věta 8. *Je-li (V, ν) normovaný prostor, je (V, ρ), kde $\rho(x, y) = \nu(x - y)$, metrický prostor.*

Důkaz. Protože $\nu(0) = 0$, je $\rho(x, x) = \nu(x - x) = \nu(0) = 0$.
Jestliže $x \neq y$ jsou libovolné dva prvky V, pak $\rho(x, y) = \nu(x - y) = \nu(y - x) =$

$\rho(y,x) \neq 0$. Pro každé tři prvky x, y, $z \in V$ platí

$$\rho(x,z) = \nu(x-z) = \nu\big((x-y)+(y-z)\big) \leq \nu(x-y)+\nu(y-z) = \rho(x,y)+\rho(y,z)\,.$$

Tedy ρ je metrika. $\square$

Definice 14. Dvě normy ν_1 a ν_2 vektorového prostoru V se nazývají **ekvivalentní**, jestliže existují a, $b \in \mathbb{R}$, $0 < a \leq b$, takové, že $a\nu_1(x) \leq \nu_2(x) \leq b\nu_1(x)$.

Poznámka. Je zřejmé, že metriky ρ_1 a ρ_2 generované ekvivalentními normami ν_1 a ν_2 jsou ekvivalentní.

Poznámka. Lze ukázat, že pro každé $p \geq 1$ je

$$\nu_p(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

norma v prostoru $\mathbb{R}^n$ a že tyto normy jsou ekvivalentní.

Pro nás budou důležité normy ν_1, ν_2 a $\nu_{\max} = \lim\limits_{p\to\infty} \nu_p$. Pro tyto normy platí

$$\begin{aligned}
\nu_1(\boldsymbol{x}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|\,,\\
\nu_2(\boldsymbol{x}) &= \left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right)^{1/2},\\
\nu_{\max}(\boldsymbol{x}) &= \max\big(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\big)\,.
\end{aligned}$$

Ukážeme, že všechny tyto normy jsou navzájem ekvivalentní.
Z nerovností

$$\nu_{\max}(\boldsymbol{x}) = \max\bigl(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\bigr) \le \sum_{k=1}^{n} |x_i| = \nu_1(\boldsymbol{x}) \le$$
$$\le n \max\bigl(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\bigr) = n\nu_{\max}(\boldsymbol{x})$$

plyne, že normy ν_1 a $\nu_{\max}$ jsou ekvivalentní.
Ekvivalence norem $\nu_{\max}$ a ν_2 plyne z nerovností

$$\nu_{\max}(\boldsymbol{x}) = \max\bigl(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\bigr) \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} =$$
$$= \nu_2(\boldsymbol{x}) \le \sqrt{n} \max\bigl(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\bigr) = \sqrt{n}\nu_{\max}(\boldsymbol{x})\,.$$

Z nerovností $a^2 + b^2 \le (a+b)^2$ a $2ab \le a^2 + b^2$, které platí pro a, $b > 0$ plyne, že

$$\nu_2^2(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_i^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_i|\right)^2 = \nu_1^2(\boldsymbol{x}) \le n \sum_{k=1}^{n} x_i^2 = n\nu_2(\boldsymbol{x})\,.$$

Tedy platí nerovnost $\nu_2(\boldsymbol{x}) \le \nu_1(\boldsymbol{x}) \le \sqrt{n}\nu_2(\boldsymbol{x})$.
Obecně lze ukázat, že v $\mathbb{R}^n$ jsou vzájemně ekvivalentní všechny normy $\nu_p(\boldsymbol{x})$, kde $p \ge 1$.

Dále budeme prostor $\mathbb{R}^n$ považovat za metrický prostor s metrikou generovanou jednou z ekvivalentních norem ν_1, ν_2 nebo $\nu_{\max}$.

☛ ***Příklad 2.*** Nechť je $M \subset \mathbb{R}$ a $B(M)$ je vektorový prostor všech funkcí omezených na M. Ve vektorovém prostoru $B(M)$ lze zavést normu ν vztahem $\nu(f) = \sup_{x\in M}\big(\big|f(x)\big|\big)$.

V prostoru $\mathbb{R}^n$ je norma ν_2 z příkladu 2 definována pomocí operace, která se nazývá skalární součin.

Definice 15. Nechť je V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Pak funkci $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$, která má pro každé x, y, $z \in V$ a a, $b \in \mathbb{R}$ vlastnosti:

- $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$,
- $(x, y) = (y, x)$,
- $(x, x) \geq 0$,
- $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

nazýváme **skalární součin**. Často se značí $(x, x) = \|x\|^2$.

☛ ***Příklad 3.*** Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ definujeme skalární součin vztahem $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Věta 9 (Schwarzova nerovnost) *Jestliže je V vektorový prostor se skalárním součinem, pak pro každé x, $y \in V$ platí nerovnost $(x, y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$. Přitom rovnost platí pouze tehdy, když x a y jsou lineárně závislé.*

Důkaz. Je-li $y = 0$, platí znak rovnosti.
Nechť $y \neq 0$. Pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$0 \leq (x - \lambda y, x - \lambda y) = \|x\|^2 - 2\lambda(x, y) + \lambda^2 \|y\|^2.$$

Přitom rovnost platí pouze tehdy, když $x - \lambda y = 0$, tj. když jsou jsou x a y lineárně závislé. Zvolme $\lambda = \dfrac{(x, y)}{\|y\|^2}$. Pak z uvedené nerovnosti dostaneme

$$0 \leq \|x\|^2 - 2\frac{(x, y)^2}{\|y\|^2} + \frac{(x, y)^2}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - \frac{(x, y)^2}{\|y\|^2},$$

z čehož plyne dokazovaná nerovnost. □

Poznámka. Ze Schwarzovy nerovnosti plyne pro $\|x\|, \|y\| \neq 0$, že $-1 \leq \dfrac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$. Proto lze psát $\dfrac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|} = \cos\varphi$, kde φ je úhel mezi vektory x a y. V případě $\mathbb{R}^n$ je tedy úhel mezi dvěma nenulovými vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ dán vztahem

$$\cos\varphi = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{-1/2}.$$

Věta 10. *Jestliže je V vektorový prostor se skalárním součinem, je V normovaný prostor s normou definovanou vztahem $\nu(x) = \sqrt{(x,x)} = \|x\|$.*

Důkaz. Ověření vlastností normy je zřejmé. Snad až na nerovnost $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Ta plyne ze Schwarzovy nerovnosti, neboť

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \leq \\ \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = \left(\|x\| + \|y]|\right)^2.\end{aligned}$$

Definice 16. Nechť je V vektorový prostor a $x,\ y \in V$. Množina všech bodů $z = x + (y - x)t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ se nazývá **úsečka** z bodu x do bodu y. Bod x je **počáteční bod** a y **koncový bod** této úsečky.

Definice 17. Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá **konvexní**, jestliže pro každé dva body $x,\ y \in M$ leží celá úsečka z bodu x do bodu y v množině M, tj. pro každé $t \in \langle 0, 1\rangle$ je $x + (y - x)t \in M$.

Definice 18. Podmnožina $M \subset \mathbb{R}^n$ s metrikou generovanou normou ν_p se nazývá **kompaktní**, jestliže je omezená a uzavřená.

Poznámka. Význam kompaktních množin pro matematickou analýzu bude zřejmý, až zavedeme pojem limity posloupnosti.

2 POSLOUPNOSTI

V METRICKÝCH PROSTORECH

2.1. Posloupnost, vybraná posloupnost

Definice 1. **Posloupností** v metrickém prostoru M nazýváme každé zobrazení $f : \mathbb{N} \to M$. Pro posloupnosti se obvykle používá značení $f(n) = x_n$.

Definice 2. Posloupnost x_n v metrickém prostoru (M, ρ) se nazývá **omezená** právě tehdy, když je omezená množina $\{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$, tj. když existuje $x \in M$ a $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\rho(x, x_n) < K$.

Věta 1. *Jsou-li metriky ρ_1 a ρ_2 ekvivalentní, je posloupnost x_n omezená v metrice ρ_1 právě tehdy, když je omezená v metrice ρ_2.*

Důkaz. Tvrzení je zřejmé z definice ekvivalentních metrik. $\square$

Definice 3. Nechť je x_n posloupnost a $k_1 < k_2 \cdots < k_n \ldots$, $k_i \in \mathbb{N}$. Pak posloupnost $y_n = x_{k_n}$ nazýváme **vybranou posloupností** z posloupnosti x_n.

☛ ***Příklad 1.*** Příkladem posloupnosti v $\mathbb{R}^4$ je posloupnost

$$\boldsymbol{x}_n = \left(2, \frac{1}{n+1}, \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{2n-1}, \sin n\right).$$

Tato posloupnost je omezená, protože například pro metriku generovanou normou $\nu_{\max}$ je $\rho(\boldsymbol{x}_n, 0) = \nu_{\max}(0 - \boldsymbol{x}_n) < 100$.

Posloupnost

$$\boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{x}_{2n} = \left(2, \frac{1}{2n+1}, \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{4n-1}, \sin 2n\right)$$

je vybraná posloupnost z posloupnosti $\boldsymbol{x}_n$.

☛ ***Příklad 2.*** Příkladem neomezené posloupnosti v $\mathbb{R}^4$ je například posloupnost

$$\boldsymbol{z}_n = \left(\cos n\pi, 5, (-1)^n n, n^2 + 3n + 1\right).$$

2.2. Limita posloupnosti

Definice 4. Nechť je x_n posloupnost v metrickém prostoru (M, ρ). Prvek $x \in M$ se nazývá **limitou posloupnosti** x_n právě tehdy, když $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0$, tj. když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ je $\rho(x, x_n) < \varepsilon$. Jestliže je x limitou posloupnosti x_n, píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ a říkáme, že posloupnost x_n konverguje k prvku x.

Posloupnosti x_n, které mají limitu se nazývají **konvergentní** a posloupnosti, jejichž limita neexistuje nazýváme **divergentní posloupnosti**.

Věta 2. *Každá posloupnost v metrickém prostoru (M, ρ) má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Nechť má posloupnost x_n v metrickém prostoru M dvě limity $x \neq y$. Pak $\varepsilon = \frac{1}{3}\rho(x, y) > 0$. K tomuto ε existují $n_{0,x}$ a $n_{0,y}$ takové, že pro každé $n > n_{0,x}$ je $\rho(x, x_n) < \varepsilon$ a pro každé $n > n_{0,y}$ je $\rho(y, x_n) < \varepsilon$. Nechť $n_0 = \max(n_{0,x}, n_{0,y})$. Tedy pro každé $n > n_0$ platí nerovnost

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(y, x_n) < \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3}\rho(x, y).$$

To je ale spor s tím, že $\rho(x, y) > 0$. Tedy $\rho(x, y) = 0$ a $x = y$. $\square$

Věta 3. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Důkaz. Nechť je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Pro $\varepsilon = 1$ existuje n_0 takové, že pro každé $n > n_0$ platí nerovnost $\rho(x, x_n) < 1$. Pro $K = \max\bigl(1, \rho(x, x_1), \rho(x, x_2), \dots, \rho(x, x_{n_0})\bigr)$ je splněna nerovnost $\rho(x, x_n) \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Věta 4. *Jestliže je posloupnost y_n vybrána z konvergentní posloupnosti x_n, je konvergentní a $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.*

Důkaz. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ číslo n_0 takové, že pro každé $n > n_0$ je $\rho(x, x_n) < \varepsilon$. Protože je y_n vybraná posloupnost z posloupnosti x_n, je $y_n = x_m$, kde $m \geq n$. Proto stačí k danému $\varepsilon > 0$ zvolit ve vybrané posloupnosti y_n stejné číslo n_0. $\square$

Věta 5. *Nechť jsou ρ_1 a ρ_2 dvě ekvivalentní metriky v metrickém prostoru M. Pak posloupnost x_n konverguje k x v metrice ρ_1 právě tehdy, když konverguje k x v metrice ρ_2.*

Důkaz. Plyne bezprostředně z definice ekvivalentních metrik. $\square$

Věta 6. *Nechť je* $\boldsymbol{x}_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n})$ *posloupnost v prostoru* $\mathbb{R}^k$*. Pak* $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ *právě tehdy, když pro každou složku je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_{i,n} = x_i$*,* $i = 1, 2, \dots, k$*.*

Důkaz. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každé $n > n_0$ je $\sum\limits_{i=1}^{k} \left| x_{k,n} - x_k \right| < \varepsilon$. Ale z toho plyne, že pro $n > n_0$ a každé $i = 1, 2, \dots, k$ je $\left| x_{i,n} - x_i \right| \le \sum\limits_{i=1}^{k} \left| x_{i,n} - x_i \right| < \varepsilon$. Tedy pro každé $i = 1, 2, \dots, k$ je $\lim\limits_{n\to\infty} x_{i,n} = x_i$.

Naopak jestliže pro každé $i = 1, 2, \dots, k$ je $\lim\limits_{n\to\infty} x_{i,n} = x_i$ existují pro $\dfrac{\varepsilon}{k}$ přirozená čísla $n_{0,i}$ taková, že pro každé $n_i > n_{0,i}$ je $\left| x_{i,n_i} - x_i \right| < \dfrac{\varepsilon}{k}$. Ale pak pro $n_0 = \max(n_{0,1}, n_{0,2}, \dots, n_{0,k})$ je $\sum\limits_{i=1}^{k} \left| x_{i,n} - x_i \right| < k\dfrac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$. $\square$

✒ *Příklad 3.*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{3n^2+2n+3}, \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{2n-3}, \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} n\right)^{n} \right) =$$
$$= \left(\frac{1}{3}, e^4, e^{-2/\pi} \right).$$

☛ ***Příklad 4.*** Posloupnost $x_n = x^n$ pro $x \in (0,1)$ nekonverguje u prostoru $B\big((0,1)\big)$ k nule, přestože pro každé $x \in (0,1)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je totiž $\sup\limits_{x\in(0,1)} x^n = 1$. Proto pro $\varepsilon < 1$ neexistuje n_0 takové, aby pro každé $n > n_0$ bylo $\rho(x^n, 0) < \varepsilon$.

2.3. Bodová a stejnoměrná konvergence

V matematické analýze hraje konvergence v prostoru $B(M)$, kde M je množina, velmi důležitou roli. Konvergence v tomto prostoru se nazývá **stejnoměrná konvergence** na rozdíl od tak zvané **bodové konvergence**. Proto budeme přesněji definovat tyto dva pojmy nejprve na prostoru omezených funkcí na množině $M \subset \mathbb{R}$.

Definice 5. Nechť je $f_n(x)$ posloupnost omezených funkcí na množině $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $f_n(x)$ **konverguje bodově** k funkci $f(x)$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a pro každé $x \in M$ existuje $n_0(x)$ takové, že pro každé $n > n_0(x)$ je $\big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon$. Bodovou konvergenci posloupnosti funkcí $f_n(x)$ k funkci $f(x)$ budeme značit $f_n(x) \to f(x)$.

Definice 6. Nechť je $f_n(x)$ posloupnost omezených funkcí na množině $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $f_n(x)$ **konverguje stejnoměrně** k funkci $f(x)$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $x \in M$ a pro každé $n > n_0$ je $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$. Stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $f_n(x)$ k funkci $f(x)$ budeme značit $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

Poznámka. Rozdíl mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí spočívá v tom, že při bodové konvergenci může být n_0 závislé na $x \in M$, kdežto při stejnoměrné konvergenci je toto n_0 pro všechna $x \in M$ stejné. Zapíšeme bodovou a stejnoměrnou konvergenci symbolicky

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ bodově} \iff$$

$$\iff \quad (\forall \varepsilon > 0\, \forall x \in M\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad n > n_0 \quad \implies \quad \left|f(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon)$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ stejnoměrně} \iff$$

$$\iff \quad (\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall x \in M : \quad n > n_0 \quad \implies \quad \left|f(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon)$$

Z tohoto zápisu je zřejmé, že pokud posloupnost funkcí $f_n(x)$ konverguje k funkci $f(x)$ stejnoměrně, konverguje k ní také bodově. Ale opak není pravda. Právě stejnoměrná konvergence je konvergence v prostoru $B(M)$.

☛ ***Příklad 5.*** Na intervalu $(0,1)$ uvažujme posloupnost $f_n(x) = x^n$. Nechť $\varepsilon > 0$. Nechť je $0 < \varepsilon < 1$. Hledejme n_0 tak, aby pro každé $x \in (0,1)$ platila nerovnost $x^{n_0} < \varepsilon$. Pak je $n_0 > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln x}$. Ale protože $\lim\limits_{x\to 1_-} \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln x} = +\infty$, není možné zvolit n_0 nezávisle na x. n_0 je vlastně neomezenou funkcí $x \in (0,1)$. Proto posloupnost funkcí $f_n(x) = x^n$ konverguje sice bodově k funkci $f(x) = 0$, ale nekonverguje k této funkci stejnoměrně, tj. v prostoru $B\big((0,1)\big)$.

2.4. Úplné metrické prostory

Věta 7 (Cauchy–Bolzanova podmínka konvergence) *Nechť je posloupnost x_n v metrickém prostoru M konvergentní. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každé $m, n > n_0$ platí nerovnost $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Důkaz. Nechť posloupnost x_n konverguje k $x \in M$ a $\varepsilon > 0$. Pak k $\frac{\varepsilon}{2}$ existuje n_0 takové, že pro každé $m, n > n_0$ je $\rho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro každé $m, n > n_0$ platí $\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x) + \rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

Definice 7. Posloupnost x_n v metrickém prostoru M se nazývá **Cauchyovská** právě tehdy, když splňuje **Cauchy–Bolzanovu podmínku**: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro všechna m, $n > n_0$ platí nerovnost $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Poznámka. Věta 7. říká, že každá konvergentní posloupnost je Cauchyovská. Opak není obecně pravda. Například v množině racionálních čísel $\mathbb{Q}$ nekonverguje každá Cauchyovská posloupnost k racionálnímu číslu. Proto se množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ rozšiřuje na množinu reálných čísel $\mathbb{R}$, ve které už každá Cauchyovská posloupnost konvergentní.

Definice 8. Metrický prostor (M, ρ) se nazývá **úplný**, má-li každá Cauchyovská posloupnost x_n v M limitu v M.

☞ ***Příklad 6.*** Pro každé k je prostor $\mathbb{R}^k$ je úplný. To plyne z toho, že když je posloupnost $\boldsymbol{x}_n$ v $\mathbb{R}^k$ Cauchyovská, jsou Cauchyovské všechny posloupnosti $x_{k,n}$ jejich složek. Úplnost pak plyne z úplnosti množiny reálných čísel.

☞ ***Příklad 7.*** Nechť je $C(X) \subset B(X)$ vektorový prostor omezených spojitých funkcí na množině $X \subset \mathbb{R}$ se supremovou normou.

Tento prostor je úplný.

☛ ***Příklad 8.*** Nechť je $C\big(\langle 0,2\rangle\big)$ vektorový prostor všech omezených spojitých funkcí na intervalu $\langle 0,2\rangle$ s metrikou generovanou normou $\nu(f) = \int_0^2 \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$. Ukážeme, že tento prostor není úplný. Uvažujme posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{pro } x \in \langle 0,1)\,, \\ 1 & \text{pro } x \in \langle 1,2\rangle\,. \end{cases}$$

Nechť je $\varepsilon > 0$ a $n < m$. Pak je

$$\rho\big(f_n, f_m\big) = \nu\big(f_n - f_m\big) = \int_0^2 \big|f_n(x) - f_m(x)\big|\,\mathrm{d}x = \\ = \int_0^1 \big(x^n - x^m\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n+1}\,.$$

Z toho plyne, že k danému $0 < \varepsilon < 1$ existuje $n_0 > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ takové, že pro každé m a $n > n_0$ je $\rho\big(f_n, f_m\big) < \varepsilon$. (pro $\varepsilon \geq 1$ lze zvolit $n_0 = 1$). Máme tedy Cauchyovskou posloupnost. Bodová limita posloupnosti funkcí $f_n(x)$ je funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \langle 0,1)\,, \\ 1 & \text{pro } x \in \langle 1,2\rangle\,. \end{cases}$$

Pak je
$$\int_0^2 \left|f(x) - f_n(x)\right| \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\,.$$
Ale funkce $f(x)$ není spojitá v bodě $x = 1$, a tedy není ani limitou posloupnosti funkcí $f_n(x)$ v uvažovaném prostoru.

Poznámka. Ke každému metrickému prostoru M lze sestrojit metrický prostor $M' \supset M$, který je úplný. Touto konstrukcí lze například množině racionálních čísel $\mathbb{Q}$ sestrojit množinu $\mathbb{R}$ reálných čísel. V případě vektorového prostoru $C(X)$, kde $X \subset \mathbb{R}$, s normou použitou v příkladu 7, dostaneme tzv. prostor $L^1(X)$. Pro zavedení takových prostorů je ale třeba integrály chápat v Lebesqueově smyslu.

Věta 8. *Nechť je V normovaný vektorový prostor, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ a $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Pak posloupnost $x_n + y_n$ konverguje a platí $\lim\limits_{n\to\infty} \bigl(x_n + y_n\bigr) = x + y$.*

Důkaz. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ a $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, existují ke každému $\varepsilon > 0$ přirozená čísla $n_{0,x}$ a $n_{0,y}$ taková, že pro každé $n > n_{0,x}$ je $\left|x - x_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ a pro každé $n > n_{0,y}$ je $\left|y - y_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pak pro každé $n > n_0 = \max\bigl(n_{0,x}, n_{0,y}\bigr)$ platí nerovnost
$$\nu(x + y - x_n - y_n) \le \nu(x - x_n) + \nu(y - y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \quad \square$$

Věta 9. *Nechť je V normovaný vektorový prostor, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ a pro reálnou posloupnost a_n platí $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Pak je posloupnost $a_n x_n$ konvergentní a platí $\lim_{n\to\infty} (a_n x_n) = ax$.*

Důkaz. Použijeme nerovnosti

$$\nu(ax - a_n x_n) = \nu((a - a_n)x + a_n(x - x_n)) \leq |a - a_n|\nu(x) + |a_n|\nu(x - x_n) .$$

Protože je posloupnost a_n konvergentní, je omezená. Existuje tedy $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $|a_n| < K$. Pak ale je

$$\nu(ax - a_n x_n) \leq |a - a_n|\nu(x) + K\nu(x - x_n) .$$

Tvrzení věty pak snadno plyne z této nerovnosti. □

Věta 10. *Nechť je V vektorový prostor se skalárním součinem, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ a $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Pak je reálná posloupnost (x_n, y_n) konvergentní a $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y)$.*

Důkaz. Použijeme nerovnost

$$\begin{aligned} |(x,y)-(x_n,y_n)| = |(x-x_n,y)+(x_n,y-y_n)| \leq |(x-x_n,y)|+|(x_n,y-y_n)| \leq \\ \leq \|x - x_n\| \cdot \|y\| + \|x_n\| \cdot \|y - y_n\| . \end{aligned}$$

Protože je posloupnost x_n konvergentní, je omezená. Tj. existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\|x_n\| < K$. Pak ale platí nerovnost

$$|(x,y)-(x_n,y_n)| \leq \|x-x_n\|\cdot\|y\|+\|x_n\|\cdot\|y-y_n\| < \|y\|\cdot\|x-x_n\|+K\|y-y_n\| ,$$

ze které již snadno plyne dokazované tvrzení. $\square$

Nyní uvedeme jednu větu o úplných metrických prostorech, která je mnohých případech užitečná při důkazu existence a jednoznačnosti řešení rovnic.

Věta 11 (věta o pevném bodě). *Nechť je M úplný metrický prostor a zobrazení $f : M \to M$ má následující vlastnost: Existuje $K \in (0,1)$ takové, že pro každé x, $y \in M$ platí nerovnost $\rho\big(f(x), f(y)\big) \leq K\rho(x,y)$. (Takové zobrazení se často nazývá* ***kontrahující****.) Pak existuje právě jedno $x \in M$ takové, že $x = f(x)$.*

Důkaz. Nechť x_1 je libovolný prvek M. Sestrojme posloupnost $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, ..., $x_{n+1} = f(x_n)$, ... Jestliže tato posloupnost konverguje k $x \in M$ je toto x řešením rovnice $x = f(x)$. To plyne limitním přechodem ve vztahu $x_{n+1} = f(x_n)$. Jsou-li $x = f(x)$ a $y = f(y)$, pak dostaneme $\rho(x,y) = \rho\big(f(x), f(y)\big) \leq K\rho(x,y)$. Protože $K \in (0,1)$, plyne z toho, že $\rho(x,y) = 0$, a tedy $x = y$. To dokazuje jednoznačnost. Musíme tedy dokázat, že za daných předpokladů je posloupnost x_n konvergentní.
Indukcí lze snadno dokázat, že platí nerovnost

$$\rho\big(x_{n+1}, x_n\big) = \rho\big(f(x_n), f(x_{n-1})\big) \leq K\rho(x_n, x_{n-1}) \leq K^{n-1}\rho(x_2, x_1)\,.$$

Tedy pro $m > n$ plyne z trojúhelníkové nerovnosti předchozího vztahu nerovnost

$$\rho(x_m, x_n) \leq \sum_{r=n}^{m-1} \rho\big(x_{r+1}, x_r\big) \leq \sum_{r=n}^{m-1} K^{r-1} \rho(x_2, x_1) \leq$$
$$\leq \sum_{r=n}^{\infty} K^{r-1} \rho(x_2, x_1) = \frac{K^{n-1}}{1-K}\, \rho(x_2, x_1)\,.$$

Protože $K \in (0,1)$ lze pro dané $\varepsilon > 0$ najít n_0 tak, aby pro každé $m > n > n_0$ platila nerovnost $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Tedy posloupnost x_n je Cauchyovská. Z úplnosti metrického prostoru M pak plyne existence limity $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in M$.

Na závěr se ještě zmíníme o dvou velmi důležitých vlastnostech kompaktních, tj. omezených uzavřených, množin v $\mathbb{R}^k$.

Věta 12. *Podmnožina $X \subset \mathbb{R}^k$ je kompaktní právě tehdy, když z každé posloupnosti $\boldsymbol{x}_n \in X$ lze vybrat konvergentní podposloupnost $\boldsymbol{y}_n$, která je v X konvergentní.*

Poznámka. V obecných metrických prostorech slouží vlastnost kompaktních množin popsaná ve větě 12 k jejich definici: Podmnožina X metrického prostoru M se nazývá kompaktní pravě tehdy, když z každé posloupnosti v X lze vybrat podposloupnost, která je v X konvergentní.

Abychom mohli formulovat další velmi důležitou vlastnost kompaktních množin, budeme nejprve definovat pojem otevřené pokrytí množiny $X \subset M$, kde (M, ρ) je metrický prostor.

Definice 9. Nechť je X podmnožina metrického prostoru (M,ρ) a A je libovolná množina. Systém otevřených množin U_α, kde $\alpha \in A$, takový, že $X \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$, nazýváme **otevřené pokrytí** množiny X.

Věta 13. *Podmnožina $X \subset \mathbb{R}^k$ je kompaktní právě tehdy, když z každého otevřeného pokrytí U_i, $i \in \mathbb{N}$, množiny X lze vybrat její konečné pokrytí, tj. existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$.*

Poznámka. Pro kompaktní množiny platí obecnější věta než právě uvedená věta:

Věta 14. *Množina X je kompaktní právě tehdy, když z každého otevřeného pokrytí U_α, $\alpha \in A$, množiny X lze vybrat konečné pokrytí, tj. když existuje $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A$ takové, že $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$.*

Poznámka. V diferenciálním počtu zkoumáme pomocí derivací lokální vlastnosti funkcí, tj. vlastnosti v nějakém otevřeném okolí bodu $\boldsymbol{x}$. Ale většinou nás více zajímají globální vlastnosti funkce, tj. vlastnosti funkce na jisté množině X. Je-li množina $X \in \mathbb{R}^k$ kompaktní a funkce má určitou vlastnost v nějakém okolí $U(\boldsymbol{x})$ každého bodu $\boldsymbol{x} \in X$, pokrývají otevřené množiny $U(\boldsymbol{x})$ množinu X. Z věty 13a plyne, že existuje konečný počet takových okolí, který pokrývá celou množinu X. Tímto způsobem lze pro kompaktní množiny často přejít od lokálních vlastností funkce ke globálním vlastnostem na kompaktní množině.

3 LIMITA A SPOJITOST ZOBRAZENÍ

3.1. Limita zobrazení

Definice 1. Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení metrického prostoru (X, ρ) do metrického prostoru (Y, σ). Nechť a je hromadný bod X. Řekneme, že $A \in Y$ je **limitou** zobrazení f a bodě a, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in X$, $\rho(a, x) < \delta$, $x \neq a$, je $\sigma\big(A, f(x)\big) < \varepsilon$.

Definice 2. Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení metrického prostoru (X, ρ) do metrického prostoru (Y, σ) a $M \subset X$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě a, který je hromadný bod množiny M **limitu A vzhledem k množině M** právě tehdy, když má funkce $\widehat{f} = f\big|_M$ v bodě a limitu A. Pak píšeme

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = A\,.$$

Věta 1. *Nechť je $f : X \to Y$ zobrazení metrického prostoru X do metrického prostoru Y. Pak je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $x_n \in X$, $x_n \neq a$, a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, je $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.*

Důkaz. Nechť je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in X$, pro které je $0 < \rho(a, x) < \delta$, je $\sigma\big(A, f(x)\big) < \varepsilon$. Jestliže je x_n, $x_n \neq a$, posloupnost v X, která konverguje k a, existuje pro $\delta > 0$ přirozené číslo n_0 takové, že pro každé $n > n_0$ je $0 < \rho\big(a, x_n\big) < \delta$. Pak ale pro každé $n > n_0$ platí nerovnost $\sigma\big(A, f(x_n)\big) < \varepsilon$, a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} f\big(x_n\big) = A$.
Opačné tvrzení dokážeme nepřímo. Nechť a je hromadný bod množiny X a limita $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq A$. To znamená, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje $x \in X \cap P_\delta(a)$ takové, že $\sigma\big(A, f(x)\big) > \varepsilon$. Ke každému $n \in \mathbb{N}$ vybereme

$x_n \in X \cap P_{1/n}(a)$, které má tuto vlastnost. Pak je x_n posloupnost, pro kterou je $x_n \neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$. $\square$

Věta 2. *Zobrazení f metrického prostoru X do metrického prostoru Y má v bodě a nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Tvrzení se dokáže standardním způsobem, a proto jej nechávám jako cvičení. $\square$

Věta 3. *(Cauchy–Bolzanova podmínka) Jestliže limita zobrazení f metrického prostoru X do metrického prostoru Y v bodě a existuje, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x, y \in X \cap P_\delta(a)$ je $\sigma\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$.*

Důkaz. Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in \cap P_\delta(a)$ je $\sigma\big(f(x), A\big) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Nechť $x, y \in X \cap P_\delta(a)$. Pak z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že $\sigma\big(f(x), f(y)\big) \leq \sigma\big(A, f(x)\big) + \sigma\big(A, f(y)\big) < \varepsilon$. $\square$

Věta 4. *Jestliže je metrický prostor Y úplný, pak limita zobrazení $f : X \to Y$ v bodě a existuje právě tehdy, je-li splněna Cauchy–Bolzanova podmínka.*

Důkaz. Nechť je x_n libovolná posloupnost v X, $x_n \neq a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Nechť je $\varepsilon > 0$. Protože je splněna Cauchy–Bolzanova podmínka, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ $\delta > 0$ takové, že pro každé $x, y \in X \cap P_\delta(a)$ je $\sigma\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$. Protože

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, existuje n_0 takové, že pro každé $n > n_0$ je $x_n \in X \cap P_\delta(a)$. Proto je posloupnost $f(x_n)$ Cauchyovská a existence limity posloupnosti $f(x_n)$ plyne z úplnosti metrického prostoru (Y, σ). Tvrzení pak plyne z věty 1. $\square$

Věta 5. *Nechť jsou (X, ρ), (Y, σ) a (Z, τ) metrické prostory. Nechť jsou $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ zobrazení, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$. Dále nechť existuje prstencové okolí $P_{\delta_0}(a)$ takové, že pro každé $x \in X \cap P_{\delta_0}(a)$ je $f(x) \neq A$. Pak platí*

$$\lim_{x\to a} \big(g \circ f\big)(x) = \lim_{y\to A} g(y) = B\,.$$

Důkaz. Protože $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$, ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\eta > 0$ takové, že pro každé $y \in Y$, pro které je $0 < \sigma(y, A) < \eta$, platí $\tau\big(g(y), b\big) < \varepsilon$. Protože $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, existuje k $\eta > 0$ δ_1 takové, že pro každé $x \in X$, $0 < \rho(x, a) < \delta_1$ je $\sigma\big(f(x), A\big) < \eta$. Ale podle předpokladu platí pro $\delta = \min\big(\delta_0, \delta_1\big)$ a $x \in X$, $0 < \rho(x, a) < \delta$ nerovnost $0 < \sigma\big(f(x), A\big) < \eta$. Tedy pro každé takové x platí nerovnost $\tau\big(g\big(f(x)\big), A\big) < \varepsilon$. $\square$

Věta 6. *Nechť jsou $f(x)$ zobrazení a $g(x)$ zobrazení metrického prostoru X do normovaného vektorového prostoru V. Nechť existují limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Pak existuje také $\lim\limits_{x\to a}\big(f + g\big)(x) = A + B$.*

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existují $\delta_f > 0$ a $\delta_g > 0$ takové, že pro každé $x \in X$, pro které je $0 < \rho(a,x) < \delta_x$, resp. $0 < \rho(a,x) < \delta_y$, platí nerovnost $\nu\big(f(x) - A\big) < \frac{\varepsilon}{2}$, resp. $\nu\big(g(x) - B\big) < \frac{\varepsilon}{2}$. Když zvolíme $\delta = \min\big(\delta_x, \delta_y\big) > 0$, dostaneme pro každé $x \in X$, pro které je $0 < \rho(x,a) < \delta$ nerovnost $\nu\big(f(x) + g(x) - A - B\big) \leq \nu\big(f(x) - A\big) + \nu\big(g(x) - B\big) < \varepsilon$. $\square$

Věta 7. *Nechť je $f(x)$ zobrazení metrického prostoru X do normovaného vektorového prostoru V a $\alpha(x)$ je zobrazení metrického prostoru X do $\mathbb{R}$. Nechť existují $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in V$ a $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \alpha \in \mathbb{R}$. Pak existuje také $\lim\limits_{x\to a} \big(\alpha(x) f(x)\big) = \alpha A$.*

Důkaz. Plyne z nerovnosti

$$\nu\big(\alpha(x)f(x) - \alpha A\big) = \nu\big(\alpha(x)\cdot\big(f(x) - A\big) + \big(\alpha(x) - \alpha\big)\cdot A\big) \leq \big|\alpha(x)\big|\cdot\nu\big(f(x) - A\big) + \big|\alpha(x) - \alpha\big|\cdot\nu\big(A\big).$$

Protože existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ je funkce $\alpha(x)$ v jistém okolí bodu a omezená. Z toho se již snadno dokáže uvedené tvrzení. $\square$

Poznámka. Všechny uvedené věty platí po příslušných modifikacích také pro limitu vzhledem k množině.

V dalším omezíme na metrické prostory $\mathbb{R}^n$ a zobrazení $\boldsymbol{f} : X \to Y$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$ a $Y \subset \mathbb{R}^k$. Každé takové zobrazení je dáno předpisem

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}\big(x_1, x_2, \ldots, x_n\big) = \big(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_k(\boldsymbol{x})\big),$$

kde $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, jsou reálné funkce n proměnných, tj. $f_i\big(x_1, x_2, \ldots, x_n\big)$.

Protože $\mathbb{R}^k$ je úplný normovaný prostor, platí pro limity zobrazení $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ všechny výše uvedené věty.

Věta 8. *Nechť je $\boldsymbol{f} : X \to \mathbb{R}^k$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$. Pak je $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}$ právě tehdy, když pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ je $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f_i(\boldsymbol{x}) = A_i$.*

Důkaz. je podobný jako důkaz podobné věty pro posloupnosti. Proto jej na tomto místě nebudeme opakovat. □

Poznámka. Z věty 8 ihned plyne, že se stačí zabývat limitou funkcí více proměnných, tj. limitou funkce $f : X \to \mathbb{R}$.

Věta 9. *Nechť jsou f a g funkce n proměnných, $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A$ a $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = B$. Pak platí $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{x}) = AB$ a je-li $B \neq 0$ také $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \dfrac{(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \dfrac{A}{B}$.*

Důkaz. je analogií důkazu pro reálné funkce jedné reálné proměnné. □

Definice 3. Nechť je $f : X \to \mathbb{R}$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$, je funkce n proměnných a $\boldsymbol{a}$ je hromadný bod množiny X. Řekneme, že funkce $f(\boldsymbol{x})$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ **limitu plus nekonečno**, resp. **limitu mínus nekonečno**, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje prstencové okolí $P_\delta(\boldsymbol{a})$ takové, že pro každé $\boldsymbol{x} \in X \cap P_\delta(\boldsymbol{a})$ je $f(\boldsymbol{x}) > K$, resp. $f(\boldsymbol{x}) < K$. Pak píšeme $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = +\infty$, resp. $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = -\infty$.

Poznámka. Všechny typy limit lze definovat pomocí okolí bodu.

Definice 4. Množina X se systémem $\mathfrak{A}$ podmnožin X, pro které platí:

(1) $\emptyset$ a X patří do systému $\mathfrak{A}$,

(2) jestliže U_α, $\alpha \in A$, kde A je množina, patří do $\mathfrak{A}$, pak $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ patří do $\mathfrak{A}$,

(3) jestliže U_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ patří do $\mathfrak{A}$, pak také $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ patří do $\mathfrak{A}$,

se nazývá topologický prostor. Množiny ze systému $\mathfrak{A}$ se nazývají **otevřené množiny**. Okolí bodu $a \in X$ se nazývá každá otevřená množina, která obsahuje a.

V metrických prostorech jsme definovali systém $\mathfrak{A}$ otevřených množin pomocí pojmu vzdálenosti. Obecně se v topologických prostorech definuje limita následovně:

Definice 5. Nechť je f zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y a a je hromadný bod X. Bod $A \in Y$ nazveme **limitou zobrazení f v bodě** a právě tehdy, když pro každé okolí $U(A) \subset Y$ existuje prstencové okolí $P(a) = U(a) \setminus \{a\}$ takové, že pro každé $x \in X \cap P(a)$ je $f(x) \in U(A)$.

Pro limity funkcí více proměnných platí věty, které jsou podobné větám o limitách funkcí jedné proměnné. Také důkazy těchto vět jsou analogické důkazům pro limity funkcí jedné proměnné, a proto je většinou nebudeme uvádět.

Věta 10. *Nechť existuje prstencové okolí $P(\boldsymbol{a})$ takové, že pro každé $x \in X \cap P(\boldsymbol{a})$ platí $f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x})$. Pak $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) \leq \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$ (za předpokladu, že limity existují).*

Věta 11. *Nechť existuje prstencové okolí $P(\boldsymbol{a})$ takové, že pro každé $\boldsymbol{x} \in X \cap P(\boldsymbol{a})$ platí nerovnost $f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x}) \leq h(\boldsymbol{x})$. Jestliže je $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} h(\boldsymbol{x}) = A$, pak existuje také $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = A$.*

Věta 12. *Jestliže je $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 0$ a existuje prstencové okolí $P(\boldsymbol{a})$ takové, že je funkce $g(\boldsymbol{x})$ v tomto okolí omezená, je $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) =$*

0.

Poznámka. Podle definice je $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $\boldsymbol{x} \in X$, pro které je $0 < \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \delta$, platí nerovnost $\left|f(\boldsymbol{x}) - A\right| < \varepsilon$. Vezměme v prostoru $\mathbb{R}^n$ metriku ρ_2, která je generována skalárním součinem, tj. $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$. Každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$, lze zapsat právě jedním způsobem ve tvaru $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{n}r$, kde $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor s počátečním bodem $\boldsymbol{a}$ a koncovým bodem, $\boldsymbol{x}$ a $r > 0$. Pak je $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = r$. Pak lze přepsat výrok $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A$ jako: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé r, $0 < r < \delta$ a pro každý jednotkový vektor $\boldsymbol{n}$ platí $\left|f(r\boldsymbol{n}) - A\right| < \varepsilon$. Tedy nejen že A nesmí záviset na jednotkovém vektoru $\boldsymbol{n}$, ale také δ musíme vybrat nezávisle na $\boldsymbol{n}$. Jedná se tedy o jistou **stejnoměrnou konvergenci**. To dělá výpočet limit neurčitých výrazů značně komplikovaný. Jednoduché je, když je limita závislá na $\boldsymbol{n}$, tj. z různých směrů je různá. Ale pokud jsou limity stejné ze všech směrů, neplyne z toho, že limita existuje, protože k jistému $\varepsilon > 0$ nemusí být možné zvolit δ nezávisle na směru $\boldsymbol{n}$.

☛ ***Příklad 1.*** Najděte následující limity:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$, b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

Jednotkový směr v $\mathbb{R}^2$ lze psát jako $\boldsymbol{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, kde $\phi \in \langle 0, 2\pi)$. Pak každé $(x, y) \neq (0, 0)$ lze jediným způsobem vyjádřit ve tvaru $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r > 0$. (r a φ jsou tzv. polární souřadnice v $\mathbb{R}^2$).

V případě a) dostaneme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0_+} r\cos\varphi\sin^2\varphi = 0\,,$$

protože $\left|\cos\varphi\sin^2\varphi\right| \le 1$.
V případě b) je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0_+} \cos\varphi\sin\varphi = \cos\varphi\sin\varphi$$

a limita neexistuje, protože závisí na φ, tedy na směru.
V případě c) je situace poněkud komplikovanější. Jestliže je $x \neq 0$, tj. $\varphi \neq 0,\ \pi$, je $\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} \le \dfrac{xy^2}{x^2}$ a stejně jako v případě a) je tato limita rovna nule. Jestliže je $x = 0$, je celý výraz roven nule, a tedy v těchto směrech je limita také rovna nule. Tedy ve všech směrech je limita nulová. Ale přesto daná limita neexistuje. Totiž na parabole $x = y^2$ je výraz roven $\dfrac{1}{2}$, a tedy po této křivce není limita rovna nule. Aby tato limita byla rovna nule, museli bychom ke každému $\varepsilon > 0$ najít $\delta > 0$ (nezávislé na $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$) tak, aby pro každé r, $0 < r < \delta$ platila nerovnost

$$\left|\frac{r\cos\varphi\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\right| < \varepsilon\,.$$

Ale lze ukázat, že takové δ neexistuje.

3.2. Spojitost funkce

Definice 6. Nechť $f : M \to S$ je zobrazení metrického prostoru (M, ρ) do metrického prostoru (S, σ). Řekneme, že zobrazení f je **spojité v bodě** $a \in M$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in M$, pro které je $\rho(a, x) < \delta$, platí nerovnost $\sigma\big(f(a), f(x)\big) < \varepsilon$.

Definice 7. Nechť je $f : M \to S$ zobrazení metrického prostoru M do metrického prostoru S a nechť $X \subset M$. Říkáme, že zobrazení f je **spojité v bodě** $a \in X$ **vzhledem k množině** X, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in X$, pro které je $\rho(a, x) < \delta$, platí nerovnost $\sigma\big(f(a), f(x)\big) < \varepsilon$.

Věta 13. *Zobrazení $f : M \to S$ je spojité v bodě $a \in M$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $x_n \in M$, pro kterou je $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.*

Důkaz. Nechť je $f(x)$ spojitá v bodě $\in M$. K danému $\varepsilon > 0$ zvolme $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in M$, $\rho(a,x) < \delta$, je $\sigma\big(f(a), f(x)\big) < \varepsilon$. Nechť je x_n libovolná posloupnost v M taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Pak k našemu $\delta > 0$ existuje n_0 takové, že pro všechna $n > n_0$ je $\rho(a, x_n) < \delta$. Ale pak také pro všechna $n > n_0$ platí nerovnost $\sigma\big(f(a), f(x_n)\big) < \varepsilon$, a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Nechť není zobrazení $f(x)$ spojité v bodě $a \in M$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje $x \in X$, $\rho(a,x) < \delta$, je $\sigma\big(f(a), f(x)\big) \geq \varepsilon$. K tomuto ε zvolme $x_n \in M$ takové, že $\rho(a, x_n) < \dfrac{1}{n}$ a $\sigma\big(f(a), f(x_n)\big) \geq \varepsilon$. Tato posloupnost $x_n \in M$ konverguje k $a \in M$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$. $\square$

Poznámka. Z definice plyne, že zobrazení $f(x)$ je spojité v bodě $a \in M$ právě tehdy, když je a izolovaný bod metrického prostoru M nebo platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Definice 8. Nechť je $f : M \to S$ zobrazení metrického prostoru (M, ρ) do metrického prostoru (S, σ) a $X \subset M$. Říkáme, že zobrazení f je **spojité na množině** X právě tehdy, když je spojité v každém bodě množiny X.

Věta 14. *Zobrazení f metrického prostoru M do metrického prostoru S je spojité na množině $X \subset M$ právě tehdy, když je vzor každé otevřené množiny $V \subset S$ otevřená množina v X, tj. když pro každou otevřenou podmnožinu $V \subset S$ platí $f_{(-1)}(V) = X \cap U$, kde $U \subset M$ je otevřená množina.*

Důkaz. Nechť je vzor každé otevřené množiny $V \subset S$ otevřená množina a $a \in X \cap f_{(-1)}(V)$. Pak je $A = f(a)$ bodem otevřené množiny V. Nechť je $\varepsilon > 0$. Pak je množina $U_\varepsilon(A) \cap V$ otevřená. A podle předpokladu je $f_{(-1)}\big(U_\varepsilon(A) \cap V\big)$ je otevřená v X. Protože je a prvkem této otevřené množiny, existuje $\delta > 0$ takové, že $U_\delta(a) \subset f_{(-1)}\big(U_\varepsilon(A) \cap V\big)$. Ale z toho plyne, že pro každé $x \in X \cap U_\delta(a)$ je $f(x) \in U_\epsilon(A)$, a tedy zobrazení f je spojité v každém bodě $a \in X$. Nechť je zobrazení f spojité v každém bodě $x \in X$ a $V \subset S$ je otevřená množina. Je zřejmé, že $f_{(-1)}(V) = f_{(-1)}\big(V \cap f(X)\big)$. Protože je V otevřená množina, existuje ke každému $y \in V$ takové $\varepsilon_y > 0$, pro které je $U_{\varepsilon_y}(y) \subset V$. Pak ale $V = \bigcup\limits_{y \in V} U_{\varepsilon_y}(y)$ a $f_{(-1)}(V) = f_{(-1)}\left(\bigcup\limits_{y \in f(X)} \big(U_{\varepsilon_y}(y) \cap f(X)\big)\right)$. Jestliže $a \in f_{(-1)}(V)$, pak existuje $A \in V \cap f(X)$ takové, že $A = f(a)$. Protože je podle předpokladu zobrazení $f(x)$ spojité v bodě a, existuje k $\varepsilon_A > 0$ číslo δ_a takové, že pro každé $x \in X \cap U_{\delta_a}(a)$ je $f(x) \in U_{\varepsilon_A}(A)$. Tedy bod a je vnitřním bodem $f_{(-1)}(V)$ a množina $f_{(-1)}(V)$ otevřená v X. $\square$

Věta 15. *Nechť je $f : M \to S$, resp. $g : S \to T$ zobrazení metrického prostoru (M, ρ) do metrického prostoru (S, σ), resp. metrického prostoru (S, σ) do metrického prostoru (T, τ). Nechť je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ a g je zobrazení spojité v bodě A. Pak je $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lim\limits_{x \to a} g\big(f(x)\big) = g(A)$.*

Důkaz. Nechť je $\varepsilon > 0$. Protože je zobrazení g spojité v bodě $A \in S$ existuje $\eta > 0$ takové, že pro všechna $y \in S$, pro která je $\sigma(A, y) < \eta$, platí $\tau\big(g(A), g(y)\big) < \varepsilon$. Ale protože $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, existuje k $\eta > 0$ danému výše $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in M$, pro které je $0 < \rho(a,x) < \delta$ je $\sigma\big(A, f(x)\big) < \eta$. Tedy pro taková x platí nerovnost $\tau\big(g(A), g(f(x))\big) < \varepsilon$. □

Věta 16. *Nechť je $f: M \to S$, resp. $g: S \to T$ zobrazení metrického prostoru (M,ρ) do metrického prostoru (S,σ), resp. metrického prostoru (S,σ) do metrického prostoru (T,τ). Nechť f je spojité v bodě $a \in M$ a g je spojité v bodě $f(a)$. Pak je složené zobrazení $g \circ f : M \to T$ spojité v bodě a.*
Jestliže je f spojité na M a g spojité na S, pak je složené zobrazení $g \circ f : M \to T$ spojité na M.

Důkaz. Nechť $a \in M$ a $A = f(a)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\eta > 0$ takové, že pro každé $y \in S \cap U_\eta(A)$ je $g(y) \in U_\varepsilon\big(g(A)\big)$. K tomuto $\eta >$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in M \cap U_\delta(a)$ je $f(x) \in S \cap U_\eta(A)$. Tedy pro takové x je $g\big(f(x)\big) \in U_\varepsilon\big(g(A)\big)$, což dokazuje spojitost složené funkce v bodě a.
Druhá část tvrzení plyne z první a z toho, že f je spojité v každém bodě $x \in M$ a g je spojité v každém bodě $y \in S$. □

Věta 17. *Nechť jsou $f: M \to V$ a $g: M \to V$ zobrazení metrického prostoru M do normovaného vektorového prostoru V, které jsou spojité v bodě a a $\alpha : M \to \mathbb{R}$ je funkce, která je spojitá v bodě a. Pak jsou zobrazení $f + g$ a $\alpha \cdot f$ spojité v bodě a.*

Důkaz. se provede obvyklým způsobem, a proto jej nebudeme uvádět.

Věta 18. *Nechť jsou $f: M \to V$ a $g: M \to V$ zobrazení metric-*

kého prostoru M do vektorového prostoru V se skalárním součinem, které jsou spojité v bodě a. Pak (f, g) spojitá funkce v bodě a.

Důkaz. se provede obvyklým způsobem, a proto jej nebudeme uvádět.

Věta 19. *Zobrazení $\boldsymbol{F} : M \to \mathbb{R}^n$ metrického prostoru M je spojité v bodě a právě tehdy, když jsou v bodě a spojité všechny funkce $f_i : M \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.*

Důkaz. se provede obvyklým způsobem, a proto jej nebudeme uvádět.

Věta 20. *Nechť jsou $f : M \to \mathbb{R}$ a $g : M \to \mathbb{R}$ funkce na metrickém prostoru M, které jsou spojité v bodě a. Pak jsou funkce fg, a jestliže $g(a) \neq 0$ také funkce $\dfrac{f}{g}$ spojité v bodě a.*

Důkaz. se provede obvyklým způsobem, a proto jej nebudeme uvádět.

Poznámka. Věty obdobné větám 17–20 platí s příslušnými modifikacemi také pro spojitá zobrazení na množině M.

Uvedeme ještě jednu větu, která se týká spojitých funkcí na kompaktních množinách v $\mathbb{R}^n$: **Věta 21.** *(Weierstrass) Nechť je*

$f : X \to \mathbb{R}$ spojitá funkce na kompaktní množině $X \subset \mathbb{R}^n$. Pak v X existují body $\boldsymbol{x}_m$ a $\boldsymbol{x}_M$ takové, že pro každé $\boldsymbol{x} \in X$ platí $f(\boldsymbol{x}_m) \leq f(\boldsymbol{x})$ a $f(\boldsymbol{x}_M) \geq f(\boldsymbol{x})$. Tedy spojitá funkce na kompaktní

množině $X \subset \mathbb{R}^n$ nabývá na množině X svého minima a maxima.

Důkaz. Nejprve připomeňme, že pro každou posloupnost $\boldsymbol{x}_n$ na kompaktní množině X existuje vybraná podposloupnost $\boldsymbol{y}_n$, která v X konverguje. Nejprve ukážeme, že spojitá funkce na kompaktní množině je omezená. Předpokládejme, že funkce $f(\boldsymbol{x})$ není omezená. Pak je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina $X_n = \left\{\boldsymbol{x} \in X\,;\ f(\boldsymbol{x}) > n\right\}$ neprázdná. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ vybereme prvek $\boldsymbol{x}_n \in X_n$. Takto získáme posloupnost $\boldsymbol{x}_n$ na kompaktní množině X. Z lze vybrat konvergentní podposloupnost $\boldsymbol{y}_n$. Tedy existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{y} \in X$. Ale protože $f\left(\boldsymbol{y}_n\right) > n$ je $\lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{y}_n) = +\infty$. To je spor s tím, že funkce $f(\boldsymbol{x})$ je spojitá na X. Podobně se ukáže, že je funkce $f(\boldsymbol{x})$ omezená zdola.

Protože je funkce $f(\boldsymbol{x})$ omezená, existují $S = \sup\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$ a $s = \inf\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$. Z definice suprema plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $X_n = \left\{\boldsymbol{x} \in X\,;\ f(\boldsymbol{x}) > S - \dfrac{1}{n}\right\}$ neprázdná. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ vyberme $\boldsymbol{x}_n \in X_n$. Protože je X kompaktní, lze z této posloupnosti vybrat konvergentní podposloupnost $\boldsymbol{y}_n$. Pak je zřejmě $f(\boldsymbol{y}_n) > S - \dfrac{1}{n}$. Protože existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{y} \in X$ dostaneme limitním přechodem $f(\boldsymbol{y}) \geq S$. Ale protože S je supremum, musí platit $f(\boldsymbol{y}) = S$. Tedy existuje $\boldsymbol{y} \in X$ takové, že pro každé $\boldsymbol{x} \in X$ je $f(\boldsymbol{y}) = \sup\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x})$. Analogicky je ukáže existence bodu, ve kterém má funkce $f(\boldsymbol{x})$ minimum. $\square$

4 DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

4.1. Diferenciál funkce

V diferenciálním počtu se snažíme lokálně, tj. v okolí daného bodu, nahrazovat zobrazení zobrazením jednodušším. V nulté aproximaci zobrazením konstantním; tomu odpovídá limita zobrazení. První aproximace je nahrazení dané funkce v okolí daného bodu rovinou. Tato rovina se volí tak, aby se v okolí bodu co nejméně lišila od grafu funkce. To znamená, že se volí tečná rovina. Za druhou aproximaci se volí kvadratická plocha, která v přesně daném smyslu co nejlépe aproximuje v okolí daného bodu graf funkce, atd. Tento princip lze obecně použít při zavedení diferenciálního počtu v úplných normovaných, tzv. *Banachových* prostorech. My se nebudeme zabývat diferenciálním počtem v takových obecných prostorech, ale pouze diferenciálním počtem v prostorech $\mathbb{R}^n$. Připomeňme, že $\mathbb{R}^n$ považujeme za úplný normovaný prostor s metrikou generovanou jednou z ekvivalentních norem ν_1, ν_2 nebo $\nu_{\max}$. V geometrických úvahách je nejvhodnější norma ν_2, která je generována skalárním součinem. Pouze v prostorech se skalárním součinem má smysl hovořit o úhlu dvou vektorů, a tedy o kolmých vektorech. S touto normou je prostor $\mathbb{R}^n$ úplný vektorový prostor se skalárním součinem, tzv. *Hilbertův prostor*.

Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a bod $\boldsymbol{a} \in D_f^\circ$. Naše snaha bude nahradit v okolí bodu $\boldsymbol{a}$ funkci $f(\boldsymbol{x})$ pomocí lineární funkce, tj. vyjádřit ji ve tvaru

$$f(\boldsymbol{x}) \approx f(\boldsymbol{a}) + c_1(x_1 - a_1) + c_2(x_2 - a_2) + \cdots + c_n(x_n - a_n) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - a_k)\,, \tag{4.1}$$

kde c_i jsou vhodná reálná čísla. Tedy rozdíl mezi přesnou hodnotou funkce $f(\boldsymbol{x})$ od naší první aproximace je

$$\eta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - \sum_{k=1}^{n} c_i(x_k - a_k)\,. \tag{4.2}$$

Po číslech c_i budeme požadovat, aby byl tento rozdíl pro malé $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|$ malý. Přesněji aby platilo

$$\lim_{\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{x}} \frac{\big|\eta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\big|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = 0\,. \tag{4.3}$$

Jestliže zavedeme novou proměnnou $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$, lze vztahy (4.1)–(4.3) zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) &= f(\boldsymbol{a}) + c_1 h_1 + c_2 h_2 + \cdots + c_n h_n + \eta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \\ &= f(\boldsymbol{a}) + \textstyle\sum_{k=1}^{n} c_k h_k + \eta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})\,, \\ &\lim_{\boldsymbol{h} \to 0} \frac{|\eta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

To nás vede k následující definici:

Definice 1. Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a bod $\boldsymbol{a} \in D_f^\circ$. Jestliže existují reálná čísla c_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ taková, že platí (4.4), nazýváme lineární funkci

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = c_1 h_1 + c_2 h_2 + \cdots + c_n h_n = \sum_{k=1}^{n} c_k h_k = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{h} \quad (4.5)$$

proměnné $\boldsymbol{h} = \big(h_1, h_2, \ldots, h_n\big)$ **diferenciálem funkce** $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$.
Jestliže existuje diferenciál funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$, nazývá se funkce **diferencovatelná v bodě** $\boldsymbol{a}$. Funkce $f(\boldsymbol{x})$ se nazývá **diferencovatelná na množině** $M \subset \mathbb{R}^n$, je-li diferencovatelná v každém bodě množiny M.

Protože pro funkce $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované předpisem $f_k(\boldsymbol{x}) = x_k$ je $\mathrm{d}f_k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \mathrm{d}x_k = h_k$, často se diferenciál (4.6) píše ve tvaru

$$\mathrm{d}f = c_1 \mathrm{d}x_1 + c_2 \mathrm{d}x_2 + \cdots + c_n \mathrm{d}x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathrm{d}x_k = \boldsymbol{c} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,. \quad (4.6)$$

Poznámka. Jestliže je funkce $y = f(\boldsymbol{x})$ diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{a}$ a $\mathrm{d}f = \sum_{k=1}^{n} c_k h^k$, lze její graf aproximovat v malém okolí bodu $\big(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})\big)$ *tečnou rovinou*. Ta má rovnici

$$y = f(\boldsymbol{a}) + c_1\big(x_1 - a_1\big) + c_2\big(x_2 - a_2\big) + \cdots + c_n\big(x_n - a_n\big) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{k=1}^{n} c_k\big(x_k - a_k\big)\,. \tag{4.7}$$

Naopak jestliže funkce $y = f(\boldsymbol{x})$ není diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{a}$, neexistuje ke grafu této funkce v bodě $\boldsymbol{a}$ tečná rovina.

Nechť je v prostoru $\mathbb{R}^k$ dána rovina jejím normálovým vektorem $\boldsymbol{n} = \big(n_1, n_2, \ldots, n_k\big)$ a bodem $\boldsymbol{a}$, kterým prochází. Pak je každý vektor, který leží v této rovině kolmý na vektor $\boldsymbol{n}$. To ale znamená, že pro každý bod $\boldsymbol{x}$ této roviny je vektor $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ kolmý na vektor $\boldsymbol{n}$, neboli

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 0 \iff n_1(x_1 - a_1) + n_2(x_2 - a_2) + \ldots n_k(x_k - a_k) = \sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - a_i) = 0\,. \tag{4.8}$$

Když srovnáme vztahy (4.7) a (4.8), vidíme, že tečná rovina je kolmá na $(n+1)$–rozměrný vektor $\boldsymbol{n} = (c_1, c_2, \ldots, c_n, -1)$ a prochází bodem $\big(a_1, a_2, \ldots, a_n, f(\boldsymbol{a})\big)$.

Přímka, která prochází bodem $\big(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})\big)$ a je kolmá na tečnou rovinu v tomto bodě, se nazývá *normála* ke grafu funkce $y = f(\boldsymbol{a})$ v bodě $\big(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})\big)$. Její parametrické rovnice tedy jsou

$$x_k = a_k + c_k t\,, \quad y = f(\boldsymbol{a}) - t\,, \tag{4.9}$$

kde $k = 1, 2, \ldots, n$ a $t \in \mathbb{R}$.

Obdobně se definuje pojem diferenciálu a diferencovatelného zobrazení pro zobrazení $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

Definice 2. Nechť je $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ a $\boldsymbol{a} \in D^\circ_{\boldsymbol{f}}$. Nechť existuje matice $\mathbf{C}$ typu $(k \times n)$ s prvky c_{ij} taková, že

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + \mathbf{C}\boldsymbol{h} + \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) \tag{4.10}$$

a

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{\|\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0\,. \tag{4.11}$$

Pak lineární zobrazení

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{C}\boldsymbol{h} \Longleftrightarrow y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} h_j \tag{4.12}$$

nazýváme **diferenciálem zobrazení $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$**.

Jestliže existuje diferenciál zobrazení $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$, nazýváme toto zobrazení **diferencovatelné v bodě $\boldsymbol{a}$**. Zobrazení $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ se nazývá **diferencovatelné na množině $M \subset \mathbb{R}^n$**, jestliže je diferencovatelné v každém bodě $\boldsymbol{a} \in M$.

Bývá zvykem psát diferenciál zobrazení $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ve tvaru

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \mathbf{C}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \Longleftrightarrow \mathrm{d}y_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij}\mathrm{d}x_j\,. \qquad (4.13)$$

Věta 1. *Zobrazení* $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *je diferencovatelné v bodě* $\boldsymbol{a}$ *právě tehdy, když jsou v bodě* $\boldsymbol{a}$ *diferencovatelné všechny funkce* $f_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, \ldots, k$. *Přitom platí*

$$\mathrm{d}f_i(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}h_j\,, \quad i = 1, 2, \ldots, k\,,$$

kde c_{ij} *jsou složky matice* $\mathbf{C}$.

Věta 2. *Má-li funkce* $f(\boldsymbol{x})$ *v bodě* $\boldsymbol{a}$ *diferenciál, je v tomto bodě spojitá.*

Věta 3. *Nechť jsou f a g funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, které jsou diferencovatelné v bodě $\boldsymbol{a}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je konstanta. Pak jsou v bodě $\boldsymbol{a}$ diferencovatelné funkce $\alpha \cdot f$, $\big(f+g\big)$, $f \cdot g$ a je-li $g(\boldsymbol{a}) \neq 0$ také $\dfrac{f}{g}$ a platí:*

$$\mathrm{d}\big(\alpha f\big)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \alpha \mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\,, \tag{4.14}$$

$$\mathrm{d}\big(f+g\big)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) + \mathrm{d}g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\,, \tag{4.15}$$

$$\mathrm{d}\big(f\cdot g\big)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = g(\boldsymbol{a})\cdot\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) + f(\boldsymbol{a})\cdot\mathrm{d}g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\,, \tag{4.16}$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \frac{g(\boldsymbol{a})\cdot\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})\cdot\mathrm{d}g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})}{g^2(\boldsymbol{a})}\,. \tag{4.17}$$

Věta 4. *Nechť jsou $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ a $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$, která jsou diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{a}$ a $\alpha(\boldsymbol{x})$ je funkce na $\mathbb{R}^n$ diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{a}$. Pak jsou v bodě $\boldsymbol{a}$ diferencovatelné funkce $\big(\alpha\boldsymbol{f}\big)(\boldsymbol{x})$, $\big(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}\big)(\boldsymbol{x})$ a $\big(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\big)(\boldsymbol{x})$, skalární součin, a platí*

$$\mathrm{d}\big(\alpha\boldsymbol{f}\big)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\mathrm{d}\alpha(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) + \alpha(\boldsymbol{a})\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\,,$$
$$\mathrm{d}\big(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}\big)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) + \mathrm{d}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\,,$$
$$\mathrm{d}\big(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\big)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\,.$$

Věta 5. *(diferenciál složeného zobrazení) Nechť $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, zobrazení $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ je diferencovatelné v bodě $\boldsymbol{a}$ a zobrazení $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ je diferencovatelné v bodě $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. Pak je složené zobrazení $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ diferencovatelné v bodě $\boldsymbol{a}$ a platí $\mathrm{d}\big(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}\big)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \mathrm{d}\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{A}, \mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})\big)$. Jestliže píšeme $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \mathbf{C}\boldsymbol{h}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{k}) = \mathbf{D}\boldsymbol{k}$, pak $\mathrm{d}\big(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}\big)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \mathbf{DC}\boldsymbol{h}$, neboli ve složkách*

$$\mathrm{d}\big(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}\big)_r(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \sum_{s=1}^{m} \sum_{t=1}^{n} d_{rs} c_{st} h_t \,,$$

kde $r = 1, 2, \ldots, k$.

4.2. Parciální derivace

Jak je známo z přednášky MA1, diferenciál funkce $f(x)$ jedné proměnné v bodě a existuje právě tehdy, když existuje derivace $f'(a)$ funkce $f(x)$ v bodě a. Pak je $\mathrm{d}f(a, h) = f'(a)h$. Podobně lze diferenciál funkce více proměnných vyjádřit pomocí derivací. Ale umíme derivovat pouze funkce jedné proměnné. Proto se pro funkce více proměnných zavádějí derivace podle vektoru.

Definice 3. Nechť je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce n proměnných $\boldsymbol{a} \in D_f$ a $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ vektor v $\mathbb{R}^n$. Nechť je bod $\boldsymbol{a}$ hromadným bodem množiny $M = \{\boldsymbol{x}\,;\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}t\,,\ t \in \mathbb{R}\} \cap D_f$ a $F(t) = f\big(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}t\big)$. Jestliže existuje derivace $F'(0)$, řekneme, že funkce $f(\boldsymbol{x})$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ **derivaci podle vektoru $\boldsymbol{v}$** rovnou $F'(0)$. Derivaci funkce $f(\boldsymbol{x})$ podle vektoru $\boldsymbol{v}$ značíme $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}$, $f'_{\boldsymbol{v}}$ apod.

Jestliže je $\|\boldsymbol{v}\| = 1$, nazýváme derivaci podle vektoru $\boldsymbol{v}$ **derivace ve směru $\boldsymbol{v}$**.

Jestliže je vektor $\boldsymbol{v}$ jeden z jednotkových vektorů ve směru souřadnicových os, tj. $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_i$, nazýváme derivaci $f_{\boldsymbol{e}_i}$ ve směru $\boldsymbol{e}_i$ **parciální derivací** podle proměnné x_i. Parciální derivace budeme značit $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ nebo f'_i.

Poznámka. Podle definice je derivace funkce $f(x)$ podle vektoru $\boldsymbol{v}$ rovna

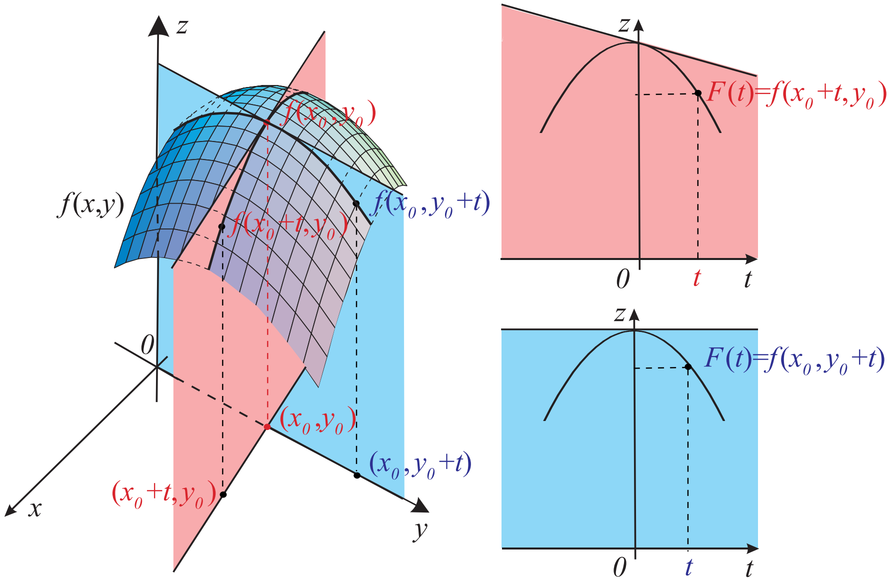
$$f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t) - f(\boldsymbol{x})}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f\big(x_1 + v_1 t, x_2 + v_2 t, \dots, x_n + v_n t\big) - f\big(x_1, x_2, \dots, x_n\big)}{t}\,.$$

Speciálně parciální derivace podle proměnné x_i je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{f\big(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n\big) - f\big(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n\big)}{t}\,.$$

To znamená, že parciální derivaci funkce $f(\boldsymbol{x})$ podle proměnné x_i najdeme tak, že všechny proměnné mimo x_i považujeme za konstanty a derivujeme podle x_i jako funkci jedné proměnné.



Podobně se definuje derivace podle vektoru $\boldsymbol{v}$ zobrazení $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Protože takové zobrazení je jednoznačně určeno k funkcemi $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, budeme, pokud není řečeno jinak, formulovat věty pro funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Zobecnění na zobrazení $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je zřejmé.

Home
Úvod
Strana 61
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

Protože jsou derivace podle vektoru derivace funkce jedné proměnné, platí pro ně vztahy známé z MA1.

Věta 6. *Nechť mají funkce $f(\boldsymbol{x})$ a $g(\boldsymbol{x})$ derivace podle vektoru $\boldsymbol{v}$ v bodě $\boldsymbol{a}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je konstanta. Pak platí*

$$
\begin{aligned}
\left(\alpha f\right)'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) &= \alpha f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) \,, \\
\left(f + g\right)'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) &= f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) + g'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) \,, \\
\left(fg\right)'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) &= f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a})g'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a})
\end{aligned}
$$

a je-li $g(\boldsymbol{a}) \neq 0$ také

$$
\left(\frac{f}{g}\right)'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \frac{f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{a})g'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a})}{g^2(\boldsymbol{a})} \,.
$$

Věta 7. *Pro každý vektor $\boldsymbol{v}$ a $a \in \mathbb{R}$ platí $f'_{a\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = af'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})$.*

Poznámka. Pro derivaci podle vektoru obecně neplatí $f'_{(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)} = f'_{\boldsymbol{v}_1} + f'_{\boldsymbol{v}_2}$. Tedy derivace podle vektoru není lineární funkcí vektoru $\boldsymbol{v}$.

Věta 8. *Má-li funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ diferenciál, existuje derivace funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ podle každého vektoru $\boldsymbol{v}$ a platí $f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$.*

Poznámka. Z věty 8 plyne, že je-li funkce $f(\boldsymbol{x})$ diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{a}$, je zobrazení $\boldsymbol{v} \to f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a})$ lineární funkcí vektoru $\boldsymbol{v}$. Konkrétně je-li $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \sum_{k=1}^{n} c_k h_k$, pak je $f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$.

Ve speciálním případě parciálních derivací je $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = c_i$. Tedy jestliže má funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ diferenciál, existují všechny parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$ a platí

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) h_k \,.$$

Ale v obecném případě nezaručuje existence všech parciálních derivací existenci diferenciálu funkce, a tedy ani existenci tečné roviny ke grafu funkce $y = f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$. V přednášce se nebudeme zabývat zkoumáním parciálních derivací funkce $f(\boldsymbol{x})$ v případě, že neexistuje její diferenciál. Pokud tedy budeme mluvit o parciálních derivacích funkce $f(\boldsymbol{x})$, budeme předpokládat, že je funkce diferencovatelná, a proto lze odvodit mnohé vztahy mezi derivacemi pomocí podobných vztahů pro diferenciály a vztahu (21).

Definice 4. Nechť má funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ diferenciál. Pak vektor

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \big(f_1'(\boldsymbol{a}), f_2'(\boldsymbol{a}), \dots, f_n'(\boldsymbol{a})\big)$$

nazýváme **gradient funkce** $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$.

Podle věty 8 pak můžeme v případě, že je funkce $f(\boldsymbol{x})$ diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{a}$, psát

$$f_{\boldsymbol{v}}'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})\,.$$

Věta 9. (parciální derivace složené funkce) *Nechť je $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zobrazení diferencovatelné v bodě $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ zobrazení diferencovatelné v bodě $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. Pak existují parciální derivace složené funkce $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ a platí*

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_r}(\boldsymbol{A}) \cdot \frac{\partial f_r}{\partial x_k}(\boldsymbol{a})\,.$$

Pro diferencovatelné funkce více proměnných platí některé věty analogické větám o diferencovatelných funkcích jedné proměnné.

Například analogie k Lagrangeově větě o střední hodnotě je

Věta 10. *Nechť je funkce $f(\boldsymbol{x})$ diferencovatelná na otevřené konvexní množině $M \in \mathbb{R}^n$. Pak pro každé dva body $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in M$ existuje $\boldsymbol{\xi} \in M$ takový, že*

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{\xi})\bigl(b_k - a_k\bigr) .$$

Důsledek. *Jestliže je funkce $f(\boldsymbol{x})$ diferencovatelná na otevřené konvexní množině M a všechny její parciální derivace jsou rovny nule, je funkce $f(\boldsymbol{x})$ na množině M konstantní.*

Poznámka. Výše uvedený důsledek platí v mnohem obecnější množiny $M \subset \mathbb{R}^n$. Z důkazu je zřejmé, že pro jeho platnost potřebujeme pouze to, aby existoval bod $\boldsymbol{a} \in M$ takový, že každý bod $\boldsymbol{x} \in M$ lze spojit s bodem $\boldsymbol{a}$ lomenou čarou. Lze ukázat, že pokud M je otevřená souvislá podmnožina v $\mathbb{R}^n$, funkce $f(\boldsymbol{x})$ je diferencovatelná v M a pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ je $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) = 0$, je funkce $f(\boldsymbol{x})$ konstantní v M.

Z toho, co bylo řečeno výše, plyne, že pokud existuje diferenciál funkce $f(\boldsymbol{x})$ umíme je vyjádřit pomocí parciálních derivací. Ale otázkou je, jak snadno ukázat existenci diferenciálu. Jednu z odpovědí dává následující věta.

Věta 11. *Nechť má funkce $f(\boldsymbol{x})$ v okolí bodu $\boldsymbol{a}$ parciální derivace, které jsou spojité v bodě $\boldsymbol{a}$. Pak je funkce $f(\boldsymbol{x})$ diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{a}$.*

Tvrzení 1. Nechť má funkce $f(\boldsymbol{x})$ všechny parciální derivace v množině $M = (a_1 - \varepsilon_1, a_1 + \varepsilon_1) \times (a_2 - \varepsilon_2, a_2 + \varepsilon_2) \times \cdots \times (a_n - \varepsilon_n, a_n + \varepsilon_n)$. Pak pro každé $\boldsymbol{b} \in M$ existují v M body $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, ..., $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$ takové, že

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\boldsymbol{\xi}^{(k)}\right)\left(b_k - a_k\right).$$

Poznámka. Všimněte si, že na rozdíl od věty 10 nepožadujeme, aby funkce $f(\boldsymbol{x})$ byla na M diferencovatelná.

Definice 5. Jestliže má zobrazení $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$ spojité parciální derivace, tj. všechny jeho složky $f_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, mají na M spojité parciální derivace, nazýváme zobrazení $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ **zobrazením třídy C_1** na množině M. Množina všech zobrazení třídy C_1 na množině M se obvykle značí $C_1(M)$.

Věta 12. *Jestliže je zobrazení* $\boldsymbol{f} \in C_1(M)$, *pak je* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *diferencovatelné.*

Z tvrzení 1. plyne velmi užitečná věta

Věta 13. *Nechť má funkce* $f(\boldsymbol{x})$ *v jistém okolí bodu* $\boldsymbol{a}$ *všechny parciální derivace* $f'_k(\boldsymbol{x})$, *které jsou spojité v bodě* $\boldsymbol{a}$. *Pak existuje okolí bodu* $\boldsymbol{a}$, *na kterém je funkce* $f(\boldsymbol{x})$ *spojitá.*

5 DIFERENCIÁLY VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

Definice 1. Řekneme, že funkce $f(\boldsymbol{x})$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ **diferenciál druhého řádu** neboli **druhý diferenciál**, jestliže

(1) funkce $f(\boldsymbol{x})$ má diferenciál prvního řádu v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a}$,

(2) všechny parciální derivace f'_k mají v bodě $\boldsymbol{a}$ diferenciál prvního řádu.

Druhý diferenciál funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ budeme značit $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})$ a platí

$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \sum_{r,s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial f}{\partial x_s} \right) (\boldsymbol{a})\, h_r h_s \,. \tag{5.1}$$

Z rovnice (5.1) vidíme, že pro výpočet druhého diferenciálu potřebujeme parciální derivace z parciálních derivací, tj. druhé parciální derivace.

Definice 2. Nechť parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ existuje v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a}$. Jestliže existuje parciální derivace $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\boldsymbol{a})$ nazýváme tento výraz **druhou parciální derivací** funkce $f(\boldsymbol{x})$ podle proměnných x_i a x_k v bodě $\boldsymbol{a}$. Druhé parciální derivace se často značí

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\boldsymbol{a}) = f'_{ik}(\boldsymbol{a})\,.$$

Poznámka: V obecném případě je nutné zachovávat pořadí derivování. Tedy obecně je $f'_{ik}(\boldsymbol{a}) \neq f'_{ki}(\boldsymbol{a})$. Ale pokud má funkce druhý diferenciál platí následující věta:

Věta 1. *Nechť je $f(x_1, x_2)$ funkce dvou proměnných a nechť její parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1} = f'_1$ a $\frac{\partial f}{\partial x_2} = f'_2$ existují v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ a mají diferenciál v bodě $\boldsymbol{a}$. Pak je $f'_{12}(\boldsymbol{a}) = f'_{21}(\boldsymbol{a})$.*

Důsledek. *Jestliže má funkce* $f(\boldsymbol{x})$ *v bodě* $\boldsymbol{a}$ *druhý diferenciál, platí pro každé* $i, k = 1, 2, \ldots, n$ *rovnost*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\boldsymbol{a})\,.$$

Protože pro funkce, které mají druhý diferenciál jsou parciální derivace záměnné, tj. platí $f'_{ik}(\boldsymbol{a}) = f'_{ki}(\boldsymbol{a})$, lze vztah (5.1) psát ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^{n} f'_{ii}(\boldsymbol{a})h_i^2 + \sum_{i\neq k} f'_{ik}(\boldsymbol{a})h_i h_k = \\ \sum_{i=1}^{n} f'_{ii}(\boldsymbol{a})h_i^2 + 2\sum_{1\leq i<k\leq n} f'_{ik}(\boldsymbol{a})h_i h_k\,. \qquad (5.2)\end{aligned}$$

Věta 1 o záměnnosti parciálních derivací vyžaduje předpoklad existence diferenciálu prvních parciálních derivací. Tento předpoklad se dá poměrně obtížně ověřit. Jedna z možností, jak ověřit existenci druhého diferenciálu dává následující věta.

Věta 2. *Nechť má funkce $f(\boldsymbol{x})$ všechny první parciální derivace v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a}$ a všechny druhé parciální derivace jsou spojité v bodě $\boldsymbol{a}$. Pak v bodě $\boldsymbol{a}$ existuje druhý diferenciál funkce $f(\boldsymbol{x})$.*

Tedy pokud má funkce $f(\boldsymbol{x})$ na množině M spojité druhé derivace, jsou záměnné. Ale abychom ověřili předpoklady této věty, musíme vědět, že jsou spojité obě derivace f'_{ik} a f'_{ki}. Tedy tato věta nemá příliš velký praktický význam pro to, abychom zjistili, že parciální derivace jsou záměnné. Ale platí následující

Věta 3. *Nechť je $f(\boldsymbol{x})$ funkce n proměnných. Nechť v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a}$ existují první parciální derivace $f'_i(\boldsymbol{x})$ a $f'_k(\boldsymbol{x})$ a nechť je $f'_{ik}(\boldsymbol{x}) = \left(f'_i\right)'_k(\boldsymbol{x})$ je spojitá v bodě $\boldsymbol{a}$. Pak v bodě $\boldsymbol{a}$ existuje $f'_{ki}(\boldsymbol{a}) = \left(f'_k\right)'_i(\boldsymbol{a})$ a platí $f'_{ik}(\boldsymbol{a}) = f'_{ki}(\boldsymbol{a})$.*

Abychom definovali diferenciál k–tého řádu, budeme nejprve definovat parciální derivace k–tého řádu.

Definice 3. Nechť je $f(\boldsymbol{x})$ funkce n proměnných. Jestliže existuje parciální derivace

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}}\partial x_{i_{k-2}}\dots\partial x_{i_1}}\right)(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k-1}}\dots\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{a}) =$$

$$= f'_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k}(\boldsymbol{a}),$$

nazýváme tento výraz *parciální derivací* funkce $f(\boldsymbol{x})$ podle proměnných i_1, i_2, . . . , i_k v bodě $\boldsymbol{a}$.

Obecně závisí parciální derivace k–tého řádu na pořadí, ve které derivujeme. Ale platí věty, které jsou analogické větám 1, 2 a 3:

Věta 4. *Nechť všechny parciální derivace funkce $f(\boldsymbol{x})$ až do řádu $(k-2)$ včetně mají diferenciál v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a}$ a všechny parciální derivace řádu $(k-1)$ mají diferenciál v bodě $\boldsymbol{a}$. Pak existují všechny parciální derivace funkce $f(\boldsymbol{x})$ v okolí bodu $\boldsymbol{a}$ až do řádu k včetně a nezávisí na pořadí, v němž derivujeme.*

Věta 5. *Nechť jsou všechny parciální derivace až do řádu $(k-1)$ záměnné v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a}$. Je-li v bodě $\boldsymbol{a}$ spojitá parciální derivace $\left(f_{i_1 i_2 \dots, i_{k-1}}\right)'_{i_k}(\boldsymbol{a})$, pak pro každou permutaci $\left(j_1, j_2, \dots, j_k\right)$ indexů $\left(i_{,} i_2, \dots, i_k\right)$ existuje parciální derivace*

$$f'_{j_1 j_2 \dots j_k}(\boldsymbol{a}) = f'_{i_1 i_2 \dots i_k}(\boldsymbol{a}) \,.$$

Poznámka: Jestliže má funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ záměnné parciální derivace řádu k, používáme pro parciální derivace zkrácené značení

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} \,,$$

kde $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ a k_1 je počet parciálních derivací podle x_1, k_2 je počet parciálních derivací podle x_2, atd. Přitom je-li $k_i = 0$, vynecháváme symbol ∂x_i^0.

Tedy například $f'_{1214514} = \dfrac{\partial^7 f}{\partial x_1^3 \partial x_2 \partial x_4^2 \partial x_5}$.

Nyní zobecníme definici 1 na případ diferenciálu libovolného řádu.

Home
Úvod
Strana 73
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

Definice 4. Nechť je dána funkce $f(\boldsymbol{x}) = f\big(x_1, x_2, \dots, x_n\big)$. Řekneme, že funkce $f(\boldsymbol{x})$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ *diferenciál řádu* k nebo **diferenciál k–tého řádu**, jestliže

(1) všechny parciální derivace funkce $f(\boldsymbol{x})$ až do řádu $(k-2)$ včetně mají diferenciál prvního řádu v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a}$

(2) všechny parciální derivace funkce $f(\boldsymbol{x})$ řádu $(k-1)$ mají v bodě $\boldsymbol{a}$ diferenciál prvního řádu.

Pak definujeme k–tý diferenciál funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ vztahem $\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \mathrm{d}\big(\mathrm{d}^{k-1} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})\big)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})$, kde diferenciál řádu $(k-1)$ považujeme za funkci proměnné $\boldsymbol{x}$.

Věta 6. *Jestliže má funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ diferenciál řádu k, pak jsou její všechny parciální derivace až do řádu k v bodě $\boldsymbol{a}$ záměnné.*

Definice 5. Nechť je $M \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina. Jestliže má funkce $f(\boldsymbol{x})$ na množině M všechny parciální derivace až do řádu k včetně spojité, říkáme, že je **třídy** $C_k(M)$. Jestliže má funkce $f(\boldsymbol{x})$ na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$ spojité parciální derivace všech řádů, říkáme, že je **třídy** $C_\infty(M)$ neboli že je **hladká na** M.

Věta 7. *Každá funkce $f(\boldsymbol{x}) \in C_k(M)$ má na množině M diferenciál řádu k a všechny její parciální derivace až do řádu k jsou na množině M záměnné.*

Jak jsme se již zmínili, lze diferenciály vyjádřit pomocí parciálních derivací. První diferenciál je funkce $f(\boldsymbol{x})$ je

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_r}(\boldsymbol{x}) h_h \,.$$

Protože druhý diferenciál je první diferenciál druhého diferenciálu je

$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}) = \sum_{r,s} \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s}(\boldsymbol{x}) h_r h_s \,.$$

Obecně je k–tý diferenciál funkce $f(\boldsymbol{x})$ roven

$$\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}) = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_k} f'_{i_1 i_2 \dots i_k}(\boldsymbol{x}) h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \,. \tag{5.3}$$

Jestliže má funkce $f(\boldsymbol{x})$ diferenciál k–tého řádu jsou podle věty 4 všechny parciální derivace řádu k záměnné. To nám umožňuje sloučit v (5.3) členy, které se liší pouze pořadím derivování. Počet všech permutací k prvkové množiny je $k!$. Jestliže se v této množině vyskytuje derivace podle první proměnné k_1–krát, derivací podle druhé proměnné k_2–krát atd., nezmění se permutace, jestliže permutujeme k_1 prvkovou množinu, která obsahuje derivace podle proměnné x_1, k_2 prvkovou množinu, která obsahuje derivace podle proměnné x_2, atd. Tedy (5.3) lze zapsat ve tvaru

$$\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}) = \\ = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\dots\cdot k_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}(\boldsymbol{x}) h_1^{k_1} h_2^{k_2} \dots h_n^{k_n} \,. \tag{5.4}$$

Poznámka: Jestliže si uvědomíme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí vztah

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^k = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\dots\cdot k_n!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n} \,,$$

lze vztah (5.4) přepsat ve tvaru

$$\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_a \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(\boldsymbol{x}) \,.$$

Z věty 4.9 víme, že když má zobrazení $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\boldsymbol{a}$ diferenciál prvního řádu a funkce $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ v bodě $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$ diferenciál prvního řádu, existuje diferenciál prvního řádu, a tedy i všechny parciální derivace složené funkce $H = f \circ \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Přitom jsou parciální derivace dány vztahem

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_r}(\boldsymbol{A}) \cdot \frac{\partial g_r}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \,.$$

Tedy jestliže existují první diferenciály zobrazení $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a}$ a funkce $f(\boldsymbol{y})$ v jistém okolí bodu $\boldsymbol{A}$ existuje parciální derivace složené funkce $H(\boldsymbol{x}) = f\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big)$ v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a}$ a je rovna

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_r}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big) \cdot \frac{\partial g_r}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \,. \tag{5.5}$$

Jestliže budeme předpokládat, že zobrazení $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ a funkce $f(\boldsymbol{y})$ mají diferenciály druhého řádu, lze derivovat rovnost (5.5) podle

x_k. Derivací dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)(\boldsymbol{x}) = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial y_r}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) \cdot \frac{\partial g_r}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{m}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial y_r}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))\right)\frac{\partial g_r}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial f}{\partial y_r}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial g_r}{\partial x_i}\right)(\boldsymbol{x})\right].$$

Protože $\frac{\partial f}{\partial y_r}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$ je složená funkce a druhé parciální derivace jsou záměnné (předpokládali jsme, že existuje druhý diferenciál), dostaneme

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k}(\boldsymbol{x}) = \sum_{r,s=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial y_r \partial y_s}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))\frac{\partial g_s}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})\frac{\partial g_r}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) + \\ + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_r}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))\frac{\partial^2 g_r}{\partial x_k \partial x_i}(\boldsymbol{x}). \qquad (5.6)$$

Podobně jako jsme odvodili ze vztahu (5.5) rovnost (5.6), lze za předpokladu existence třetích diferenciálů zobrazení $f(\boldsymbol{y})$ a $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ najít třetí parciální derivace složené funkce $H = f \circ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, atd. Obecně platí:

Věta 8. *Nechť má zobrazení $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\boldsymbol{a}$ diferenciál k–tého řádu a funkce $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ v bodě $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$ diferenciál k–tého řádu. Pak v bodě $\boldsymbol{a}$ má složená funkce $H = f \circ \boldsymbol{g}$ všechny parciální derivace až do řádu k a tyto derivace jsou záměnné.*

Věta 9. *Jestliže je zobrazení $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ třídy $C_k(M)$, kde M je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a funkce $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je třídy $C_k(N)$, kde $N \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina taková, že $\boldsymbol{g}(M) \subset N$, pak je složená funkce $H = f \circ \boldsymbol{g} \in C_k(M)$.*

Věta 10. *Nechť má zobrazení $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\boldsymbol{a}$ diferenciál k–tého řádu a funkce $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ v bodě $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$ diferenciál k–tého řádu. Pak v bodě $\boldsymbol{a}$ má složená funkce $H = f \circ \boldsymbol{g}$ diferenciál k–tého řádu.*

Při počítání s diferenciály se často používá velmi užitečná symbolika. Zaveďme v $\mathbb{R}^n$ speciální funkce $V_i(\boldsymbol{x}) = x_i$. Funkcím $V_i(\boldsymbol{x})$ můžeme říkat třeba "i–tá nezávislá proměnná". Funkce $V_i(\boldsymbol{x})$ mají diferenciály všech řádů a přitom je $\mathrm{d}V_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) = h_i$ a $\mathrm{d}^k V_i(\boldsymbol{x}) = 0$ pro každé $k > 1$. Jestliže jsme diferenciál funkce f značili $\mathrm{d}f$, je přirozené psát $h_i = \mathrm{d}V_i = \mathrm{d}x_i$. Při tomto označení se zapíše jako

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_r}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_r$$

nebo prostě

$$\mathrm{d}f = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_r}\,\mathrm{d}x_r = \sum_{r=1}^{n} f_r'\,\mathrm{d}x_r\,.$$

Toto označení je velmi výhodné i pro zápis diferenciálu složené funkce. Je-li totiž $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, kde zobrazení $\boldsymbol{g} = \big(g_1, g_2, \dots, g_m\big)$, pak lze první diferenciál složené funkce $H = f \circ \boldsymbol{g}$ zapsat ve tvaru

$$\mathrm{d}H = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} f_r' g_{r,s}\,\mathrm{d}x_s = \sum_{r=1}^{m} H_r' \mathrm{d}g_r\,,$$

protože $\mathrm{d}g_r = \sum\limits_{s=1}^{n} g_{r,s}\,\mathrm{d}x_s$. Mnohdy se ještě mlčky používá úmluva, že složenou funkci $H(\boldsymbol{x}) = f\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big)$ značíme také f. Při této úmluvě vždy platí vztah

$$\mathrm{d}f = \sum_{r=1}^{m} f_r'(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}y_r\,.$$

Pak závisí na tom, jestli považujeme funkci f za funkci nezávisle proměnné $\boldsymbol{y}$ nebo je to proměnná, která ještě závisí na proměnné $\boldsymbol{x}$.

Ale obecně lze zavést operaci diferencování d, která funkci f přiřadí funkci $\mathrm{d}f$. Tato operace má následující vlastnosti:

(1) $\mathrm{d}(af + bg) = a\mathrm{d}f + b\mathrm{d}g$, kde a a b jsou reálné konstanty

(2) $\mathrm{d}(fg) = g\mathrm{d}f + f\mathrm{d}g$

(3) $\mathrm{d}\big(f^m\big) = mf^{m-1}\mathrm{d}f$, kde $m \in \mathbb{R}$

(4) $\mathrm{d}\big(\mathrm{d}^k f\big) = \mathrm{d}^{k+1} f$.

Přitom si je ale třeba uvědomit, že pokud jsou x_i nezávisle proměnné, je $\mathrm{d}^k x_i = 0$ pro $k \geq 2$.
Správné používání těchto označení mnohdy dělá výpočty pro parciální derivace a diferenciály přehlednější. Tohoto označení budeme často používat zejména v přednášce 7 při výpočtu tzv. vázaných extrémů funkce více proměnných.

Na závěr uvedeme analogii Taylorova vzorce pro funkci více proměnných.

Věta 11. *Nechť je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce, která má v každém bodě úsečky $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h}$, $t \in (0,1)$ diferenciál $(k+1)$–ního řádu. Pak existuje $\Theta \in (0,1)$ takové, že*

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) + \cdots + \frac{1}{k!}\,\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) + \\ + \frac{1}{(k+1)!}\,\mathrm{d}^{k+1} f(\boldsymbol{a}+\Theta\boldsymbol{h},\boldsymbol{h})\,. \quad (5.7)$$

Home
Úvod
Strana 81
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

V praxi je mnohdy výhodnější trochu slabší tvrzení, které ukazuje, jak lze pomocí diferenciálů nahradit funkci n proměnných $f(\boldsymbol{x})$ aproximovat polynomem do řádu k.

Věta 12. *Nechť je funkce $f(\boldsymbol{x}) \in C_k(M)$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina a $\boldsymbol{a} \in M$. Pak pro každé $\boldsymbol{h}$ takové, že $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h} \in M$ platí*

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{1!}\,\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) + \cdots + \\ + \frac{1}{k!}\,\mathrm{d}^k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) + \eta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\,, \end{aligned} \tag{5.8}$$

kde

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{\big|\eta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\big|}{\|\boldsymbol{h}\|^k} = 0\,.$$

6 FUNKCE DEFINOVANÉ IMPLICITNĚ

V této přednášce se budeme zabývat následujícím problémem:
Je dáno s spojitých funkcí $F_k\big(x_1, x_2, ;x_r, y_1, y_2, \ldots, y_s\big) = F_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, s$, $r + s$ proměnných. Kdy existují, alespoň lokálně, spojité funkce $y_1 = f_1(\boldsymbol{x})$, $y_2 = f_2(\boldsymbol{x})$, …, $y_s = f_s(\boldsymbol{x})$ proměnných x_1, x_2, …, x_r takové, že pro každé $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, s$ platí

$$F_k\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) = F_k\big(x_1, \ldots, x_r, f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_s(\boldsymbol{x})\big) = 0\,?$$

V podstatě se jedná o to, kdy můžeme zaručit, že ze soustavy rovnic

$$F_k\big(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s\big) = 0, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, s\,,$$

lze, alespoň lokálně, najít y_k jako spojité funkce x_i.
Řešení tohoto problému nejprve ukážeme na případě, kde $r = s = 1$. Jedná se tedy o řešení rovnice $F(x, y) = 0$. Nejprve musíme zaručit, že rovnice má nějaké řešení. Proto budeme předpokládat, že existují a a b taková, že $F(a, b) = 0$. Pro řešení rovnice $F(x, y) = 0$ v okolí bodu (a, b) existují na funkci $F(x, y)$ různé předpoklady. My budeme předpokládat, že funkce $F(x, y)$ je v okolí bodu (a, b) spojitá, že v jistém okolí bodu (a, b) existuje spojitá parciální derivace $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$, která je v bodě (a, b) různá od nuly. Za těchto předpokladů

Home
Úvod
Strana 83
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

lze totiž, aspoň teoreticky, sestrojit pro každé x z jistého okolí bodu a funkci $y = f(x)$, pro kterou platí $F\big(x, f(x)\big) = 0$. Konstrukce řešení využívá větu o kontrahujícím zobrazení v úplném metrickém prostoru.

Označme $C = F_{,y}(a,b) \neq 0$ a uvažujme zobrazení $\Phi(x,y) = y - \dfrac{1}{C}\,F(x,y)$. Rovnice $F(x,y) = 0$ je ekvivalentní rovnici $y = \Phi(x,y)$. Navíc platí $b = \Phi(a,b)$, funkce $\Phi(x,y)$ je spojitá v jistém okolí bodu (a,b), parciální derivace $\Phi_{,y}(x,y)$ existuje v jistém okolí tohoto bodu a $\Phi_{,y}(a,b) = 0$. Nechť je dáno x. Později ukážeme, jaké podmínky musí toto x splňovat. Sestrojme posloupnost $y_0 = b$, $y_1 = \Phi(x,y_0)$, $y_2 = \Phi(x,y_1)$, ..., $y_{n+1} = \Phi(x,y_n)$, ... Jestliže existuje parciální derivace $\Phi_{,y}(x,y)$ na úsečce, která spojuje bodu (x,y_n) a (x,y_{n-1}), existuje podle Lagrangeově věty o střední hodnotě η takové, že bod (x,η) leží na této úsečce a platí

$$\left|y_{n+1} - y_n\right| = \left|\Phi(x,y_n) - \Phi(x,y_{n-1})\right| = \left|\Phi_{,y}(x,\eta)\right| \cdot \left|y_n - y_{n-1}\right| .$$

Bod x musíme volit tak, aby bylo zaručeno, že pro každé n takové η existuje a aby $\left|\Phi_{,y}(x,\eta)\right| < 1$. Pak je pro takové x zobrazení $\Phi(x,y)$ kontrahující v proměnné y.

Protože je funkce $\Phi_{,y}(x,y)$ spojitá v bodě (a,b) a $\Phi_{,y}(a,b) = 0$, existuje $\Delta > 0$ takové, že pro každé $(x,y) \in (a-\Delta, a+\Delta) \times (b-\Delta, b+\Delta)$ je $\left|\Phi_{,y}(x,y)\right| < \dfrac{1}{2}$. Protože je funkce $\Phi(x,y)$ v jistém okolí bodu (a,b) spojitá a $\Phi(a,b) = b$, existuje δ, $0 < \delta < \Delta$ takové, že pro každé $x \in (a-\delta, a+\delta)$ je $\left|\Phi(x,b) - b\right| < \dfrac{\Delta}{4}$. Pak pro každé $x \in U_\delta(a)$ platí $\left|y_{n+1} - y_n\right| < \dfrac{1}{2}\left|y_n - y_{n-1}\right|$. Z toho plyne, že pro každé n je $\left|y_{n+1} - y_n\right| < \dfrac{1}{2^n}\left|y_1 - y_0\right| = \dfrac{1}{2^n}\left|\Phi(x,b) - b\right| < \dfrac{\Delta}{2^{n+2}}$. Pro každé

$n \in \mathbb{N}$ tedy platí nerovnost

$$\left|y_{n+1} - y_0\right| \le \sum_{r=0}^{n} \left|y_{r+1} - y_r\right| < \sum_{r=0}^{n} 2^{-r}\left|y_1 - y_0\right| < \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-(r+2)}\Delta = \frac{\Delta}{2}\,.$$

Z toho ale plyne, že pro všechna $x \in (a-\delta, a+\delta)$ leží celá posloupnost y_n v intervalu $(b-\Delta, b+\Delta)$. Tedy pro každé takové x a $n \in \mathbb{N}$ existuje $\eta \in (y_{n+1}, y_n)$ takové, že $\left|\Phi(x, y_{n+1}) - \Phi(x, y_n)\right| = \left|\Phi_{,y}(x, \eta)\right| < \frac{1}{2}$. Protože pro každé $m > n$ je

$$\left|y_m - y_n\right| \le \sum_{r=n}^{m-1} 2^{-r-2}\Delta < \sum_{r=n}^{\infty} 2^{-r-2}\Delta = 2^{-n-1}\Delta\,,$$

je posloupnost y_n Cauchyovská. Existuje tedy $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \left\langle b - \frac{\Delta}{2}, b + \frac{\Delta}{2}\right\rangle \subset \big(b-\Delta, b+\Delta\big)$. Protože je funkce $\Phi(x, y)$ spojitá, je $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \Phi(x, y_n) = \Phi(x, y)$. Tedy toto y je pro pevné x řešením rovnice $y = \Phi(x, y)$. Jestliže je $z \in \big(b - \Delta, b + \Delta\big)$ druhé řešení této rovnice, je $\left|y - z\right| = \left|\Phi(x, y) - \Phi(x, z)\right| < \frac{1}{2}\left|y - z\right|$, neboli $y = z$. Tedy pro každé $x \in (a - \delta, a + \delta)$ existuje právě jedno $y \in \big(b - \Delta, b + \Delta\big)$ takové, že $y = \Phi(x, y)$, čili $F(x, y) = 0$. Proto existuje funkce $f : (a - \delta, a + \delta) \to (b - \Delta, b + \Delta)$ definovaná předpisem $y = f(x)$, kde y je právě nalezené řešení rovnice $F(x, y) = 0$.

Ukážeme, že právě sestrojená funkce $y = f(x)$ je na intervalu $x \in (a - \delta, a + \delta)$ spojitá. Protože $y_0(x) = b$ je spojitá funkce a $y_{n+1}(x) = \Phi\big(x, y_n(x)\big)$ plyne z předpokladu, že $y_n(x)$ je spojitá funkce, že funkce $y_{n+1}(x)$ je také spojitá, protože $\Phi(x, y)$ je spojitá. Indukcí lze ukázat, že všechny funkce $y_n(x)$ jsou na intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ spojité. Podle definice je $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$. Ale z nerovnosti $\left|y(x) - y_n(x)\right| < 2^{-n}\Delta$ plyne, že posloupnost funkcí $y_n(x)$

konverguje k funkci $y(x)$ na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$ stejnoměrně. Proto je funkce $y = f(x)$ na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$ spojitá.
Předpokládejme navíc, že funkce $F(x,y)$ má diferenciál prvního řádu. Ukážeme, že funkce $y = f(x)$ má diferenciál prvního řádu. Protože má funkce $F(x,y)$ diferenciál prvního řádu, platí

$$F(x+h, y+k) - F(x,y) = F_{,x}(x,y)h + F_{,y}(x,y)k + \big(|h| + |k|\big)\eta(x,y;h,k)\,,$$

kde $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \eta(x,y;h,k) = 0$. Nechť je $y(x+h) - y(x) = k(h)$. Pak je $F\big(x, y(x)\big) = F\big(x+h, y(x) + k(h)\big) = 0$, a tedy platí

$$F_{,x}\big(x, y(x)\big)h + F_{,y}\big(x, y(x)\big) \cdot k(h) + \big|h + k(h)\big|\eta\big(x, y(x); h, k(h)\big) = 0\,,$$

neboli

$$k(h)\Big(F_{,y}\big(x,y(x)\big) \pm \eta\big(x,y(x);h,k(h)\big)\Big) = -h\Big(F_{,x}\big(x,y(x)\big) \pm \eta\big(x,y(x);h,k(h)\big)\Big)\,.$$

Protože $\lim\limits_{h\to 0} k(h) = 0$ a $F_{,y}(x,y) \neq 0$, existuje okolí bodu $\big(x, y(x)\big)$ takové, že na tomto okolí je $F_{,y}\big(x,y(x)\big) \pm \eta\big(x,y(x);h,k(h)\big) \neq 0$. Na tomto okolí platí

$$\begin{aligned} k(h) &= -\frac{h}{F_{,y}\big(x,y(x)\big) \pm \eta\big(x,y(x);h,k(h)\big)}\Big(F_{,x}\big(x,y(x)\big) \pm \eta\big(x,y(x);h,k(h)\big)\Big) = \\ &= -\frac{F_{,x}\big(x,y(x)\big)}{F_{,y}\big(x,y(x)\big)}\,h \pm \frac{F_{,x}\big(x,y(x)\big) \pm F_{,y}\big(x,y(x)\big)}{F_{,y}\big(x,y(x)\big) \cdot \Big(F_{,y}\big(x,y(x)\big) \pm \eta\big(x,y(x);h,k(h)\big)\Big)}\,\eta\big(x,y(x);h,k(h)\big)h\,. \end{aligned}$$

A protože $\lim\limits_{h\to 0} k(h) = 0$ a $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \eta(x,y;h,k) = 0$, je

$$\mathrm{d}y(x) = -\frac{F_{,x}\big(x,y(x)\big)}{F_{,y}\big(x,y(x)\big)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Tedy pro $x \in (a-\delta, a+\delta)$ existuje derivace

$$y'(x) = -\frac{F_{,x}\big(x, y(x)\big)}{F_{,y}\big(x, y(x)\big)}\,.$$

Navíc jsou-li obě parciální derivace funkce $F(x, y)$ spojité, je tato derivace spojitá v jistém okolí bodu $x = a$.
Má-li funkce $F(x, y)$ na nějakém okolí bodu (a, b) diferenciál n–tého řádu, je z (1) vidět, že v okolí bodu $x = a$ má implicitně definovaná funkce $y = y(x)$ také diferenciál n–tého řádu a jestliže jsou na jistém okolí bodu (a, b) všechny parciální derivace funkce $F(x, y)$ až do řádu n včetně spojité, má funkce $y = y(x)$ na jistém okolí bodu $x = a$ spojité všechny derivace až do řádu n.

Pro obecné r a s platí následující věta.

Věta 1. (o implicitních funkcích)
Nechť jsou r a s přirozená čísla a nechť je $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s)$. Nechť jsou funkce $F_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = F_k(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s)$, $k = 1,\ 2,\ \dots,\ s$, spojité v jistém okolí bodu $\boldsymbol{\alpha}$ a mají v tomto okolí všechny parciální derivace prvního řádu $\dfrac{\partial F_k}{\partial y_i}$, které jsou spojité spojité v bodě $\boldsymbol{\alpha}$. Nechť platí:

$$
\begin{aligned}
&F_k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = F_k(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s) = 0 \quad \text{pro } k = 1,\ 2,\ \dots,\ s \\
&\det\left(\tfrac{\partial F_k}{\partial y_i}\right)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0\,.
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Pak existují $\delta > 0$ a $\Delta > 0$ taková, že ke každému $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_r) \in J$, kde $J = \big\{\boldsymbol{x}\,;\ |x_i - a_i| < \delta,\ i = 1, 2, \dots, r\big\}$, existuje právě jeden bod $\boldsymbol{y} \in K$, kde $K = \big\{\boldsymbol{y}\,;\ |y_k - b_k| < \Delta,\ k = 1, 2, \dots, s\big\}$, pro který platí $F_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = F_k(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s) = 0$ pro všechna $k = 1, 2, \dots, s$.
Souřadnice y_k tohoto bodu definují funkce

$$y_k = \varphi_k\big(x_1, x_2, \dots, x_r\big) \quad k = 1,\ 2\ \dots,\ s\,.$$

Tyto funkce φ_1, φ_2, $\dots$, φ_s jsou spojité na intervalu J.
Jestliže funkce $F_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $k = 1, 2, \dots, s$, mají diferenciál n–tého řádu na množině $J \times K$, mají funkce $y_k = \varphi_k(\boldsymbol{x})$, $k = 1, 2, \dots, s$ na množině J diferenciál n–tého řádu.

Jestliže jsou pro všechna $k = 1, 2, \dots, s$ funkce $F_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in C_n(J \times K)$, pak jsou funkce $y_k = \varphi_k(x_1, \dots, x_r) \in C_n(J)$ pro všechna $k = 1, 2, \dots, s$.

V praxi se věty o implicitních funkcí používá tak, že se nejprve ověří její předpoklady. Pak najdeme první diferenciál funkcí $F_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ a z rovnic

$$\mathrm{d}F_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})\big) \, \mathrm{d}x_i + \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial F_k}{\partial y_\ell} \big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})\big) \, \mathrm{d}y_\ell = 0$$

najdeme $\mathrm{d}y_k$. Řešení této soustavy existuje v bodech $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, kde determinant

$$D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \det \left(\frac{\partial F_k}{\partial y_\ell} \right) (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{D\big(F_1, F_2, \dots, F_s\big)}{D\big(y_1, y_2, \dots, y_s\big)} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq 0 \, .$$

Protože $\mathrm{d}y_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x_i$, lze velmi snadno najít z prvního diferenciálu funkcí y_k jejich první parciální derivace.
Abychom našli druhý diferenciál funkcí $y_k(\boldsymbol{x})$, resp. druhé parciální derivace těchto funkcí, diferencujeme rovnici (8). Tím dostaneme (pro jednoduchost vynecháváme označení bodu, v němž

se počítají parciální derivace)

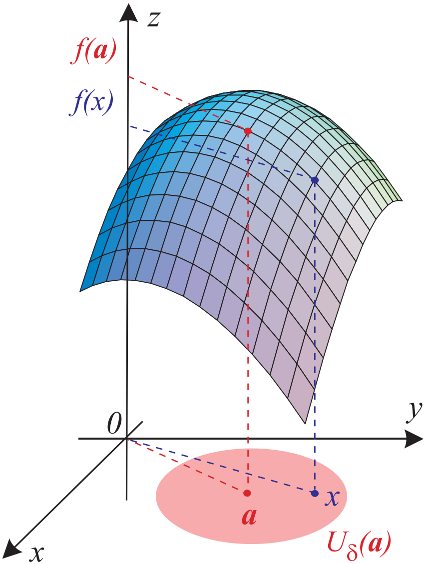
$$\mathrm{d}^2F = \sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_i \partial x_j}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j + 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{m=1}^{s} \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_i \partial y_m}\,\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_m + \\ + \sum_{m,n=1}^{s} \frac{\partial^2 F_k}{\partial y_m \partial y_n}\,\mathrm{d}y_m\mathrm{d}y_n + \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial F_k}{\partial y_\ell}\,\mathrm{d}^2 y_\ell = 0\,.$$

Protože z (8) již známe $\mathrm{d}y_m$, je soustava (10) soustavou lineárních rovnic pro d^2y_ℓ. Všimněte si, že koeficienty u d^2y_ℓ v (10) jsou stejné jako koeficienty u $\mathrm{d}y_\ell$ v soustavě (9). Abychom tedy našli ze soustavy (10) druhé diferenciály d^2y_ℓ stačí znát inverzní matici k matici $\mathbf{Y}$ s prvky $Y_{k\ell} = \dfrac{\partial F_k}{\partial y_\ell}$. Ale tu jsme vlastně našli při řešení soustavy (8). Jestliže jsme našli druhé diferenciály d^2y_ℓ, snadno najdeme všechny druhé parciální derivace funkcí y_k, protože

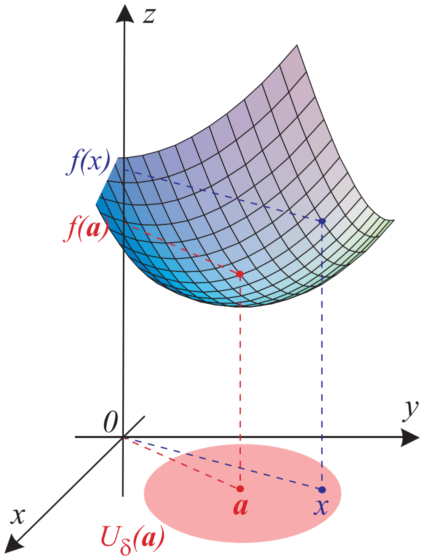
$$\mathrm{d}^2y_k = \sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j\,.$$

Postup při výpočtu diferenciálů a parciálních derivací vyšších řádů je podobný.

7 EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH



Ostré lokální maximum



Ostré lokální minimum

Home
Úvod
Strana 91
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

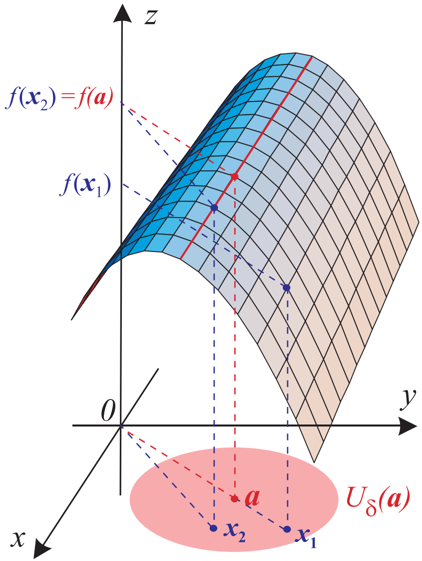
7.1. Základní pojmy

Připomeňme, že $\|\boldsymbol{x}\|$ značíme jednu z norem na prostoru $\mathbb{R}^n$, definovanou v přednášce 1. Protože jsou všechny tyto normy ekvivalentní, nezáleží na tom, kterou z nich vybereme.

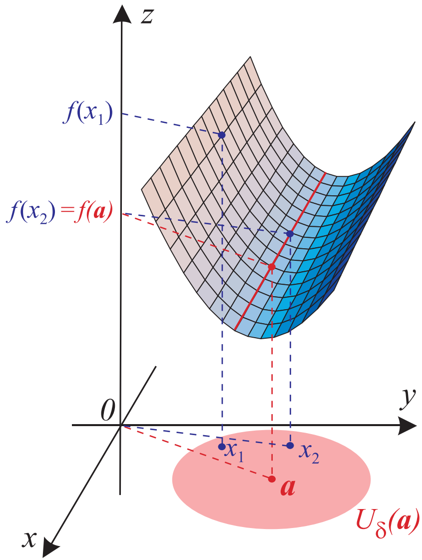
Definice 1. Nechť je dána funkce $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a bod $\boldsymbol{a} \in M$, nechť je funkce f definována na nějakém okolí bodu $\boldsymbol{a}$. Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $\boldsymbol{x}$, pro která je $0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta$, platí nerovnost

- $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{a})$, řekneme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ **ostré lokální minimum**
- $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a})$, řekneme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ **(neostré) lokální minimum**
- $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{a})$, řekneme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ **ostré lokální maximum**
- $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a})$, řekneme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ **(neostré) lokální maximum**

Nastane-li některý z uvedených případů, říkáme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ **(ostrý, neostrý) extrém.**



Nestré lokální maximum



Nestré lokální minimum

Definice 2. Nechť je dána funkce $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, množina $M \subset E$ a bod $\boldsymbol{a} \in M$. Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $\boldsymbol{x} \in M$, pro která je $0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta$, platí nerovnost

- $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{a})$, řekneme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ **ostré lokální minimum vzhledem k množině** M
- $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a})$, řekneme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ **(neostré) lokální minimum vzhledem k množině** M
- $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{a})$, řekneme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ **ostré lokální maximum vzhledem k množině** M
- $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a})$, řekneme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ **(neostré) lokální maximum vzhledem k množině** M

Nastane-li některý z uvedených případů, říkáme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ **(ostrý, neostrý) extrém vzhledem k množině** M **.**

Přímo z definice plynou následující dvě věty:

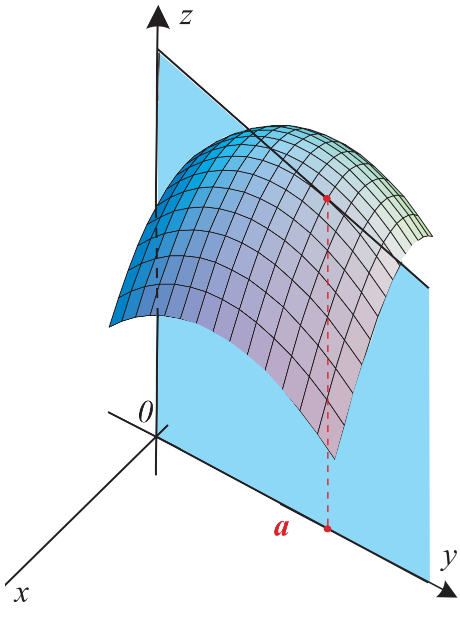
Věta 1. *Nechť funkce $f(\boldsymbol{x})$ nabývá na množině M své největší hodnoty v bodě $\boldsymbol{a} \in M$. Pak má funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální maximum vzhledem k množině M (maximum nemusí být ostré).*

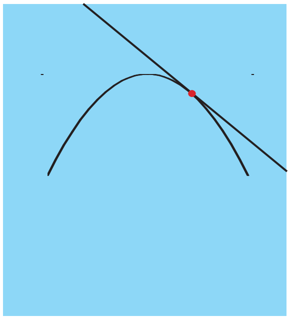
Věta 2. *Je-li $\boldsymbol{a} \in M \subset N$ a funkce $f(\boldsymbol{x})$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální maximum vzhledem k množině N, má v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální maximum vzhledem množině M.*

Následující věta udává nutné podmínky pro to, aby funkce $f(\boldsymbol{x})$ měla v bodě $\boldsymbol{a} \in M$ lokální extrém.

Věta 3. *Nechť je $M \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina. Jestliže v bodě $\boldsymbol{a} \in M$ existuje derivace funkce $f(\boldsymbol{x})$ ve směru $\boldsymbol{n}$ a je různá od nuly, nemá funkce v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém.*

Důkaz. Z předpokladu věty plyne, že funkce jedné proměnné $F(t) = f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{n}t)$ nemá lokální extrém v bodě $t = 0$. Proto pro libovolné $\tau > 0$ existují t_1,t_2, $|t_k| < \tau$ taková, že $F(t_1) > F(0) > F(t_2)$. Ale to znamená, že pro libovolné okolí bodu $\boldsymbol{a}$ existují $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{n}t_1$ a $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{n}t_2$ takové, že $f(\boldsymbol{x}_1) > f\boldsymbol{a}) > f(\boldsymbol{x}_2)$. Tedy funkce $f(\boldsymbol{x})$ nemá v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém. $\square$



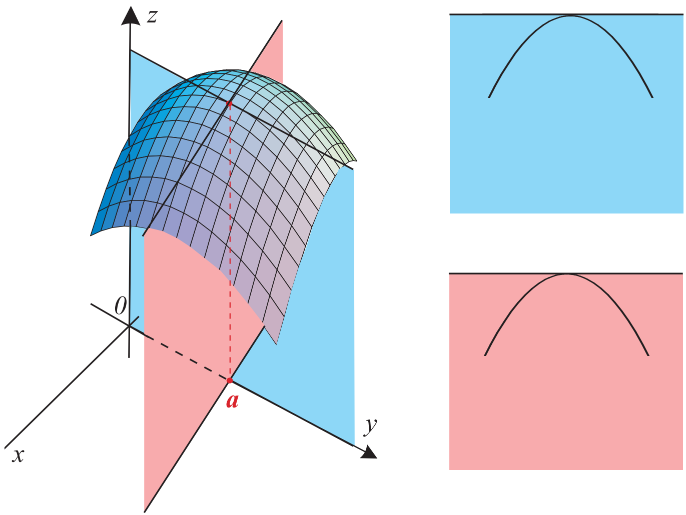


Tedy aby funkce $f(\boldsymbol{x})$ mohla mít v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém, musí být její derivace bodě $\boldsymbol{a}$ v každém směru rovna nule nebo nesmí existovat.

Budou nás proto zajímat body, kde parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) = 0\,, \tag{7.1}$$

nebo body, kde některá parciální derivace neexistuje.



Home
Úvod
Strana 97
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

V bodech, ve kterých platí (7.1), lze často o existenci a druhu extrému rozhodnout podle následující věty.

Věta 4. *Nechť funkce $f(\boldsymbol{x})$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ diferenciál druhého řádu a nechť v bodě $\boldsymbol{a}$ platí (7.1). Uvažujme kvadratickou formu*

$$\Phi(\boldsymbol{h}) = \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \sum_{r,s=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s}(\boldsymbol{a}) h_r h_s \, . \tag{7.2}$$

Je-li kvadratická forma (7.2)

- **pozitivně definitní**, *má funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$* **ostré lokální minimum***;*
- **negativně definitní**, *má funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$* **ostré lokální maximum***;*
- **indefinitní**, *nemá funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém.*

Poznámka. Připomeňme si některé pojmy a vlastnosti kvadratických forem, které známe z algebry.
Nechť jsou $a_{rs} = a_{sr}$, r, $s = 1, 2, \dots, n$, reálná čísla. **Kvadratickou formou** nazýváme funkci

$$Q(\boldsymbol{x}) = Q\big(x_1, x_2, \dots, x_n\big) = \sum_{r,s=1}^{n} a_{rs} x_r x_s =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} a_{rr} x_r^2 + 2 \sum_{1 \le r < s \le n} a_{rs} x_r x_s \,. \tag{7.3}$$

Zřejmě $Q(\mathbf{0}) = 0$.

Jestliže pro každé $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ je

- $Q(\boldsymbol{x}) > 0$, nazýváme formu $Q(\boldsymbol{x})$ **pozitivně definitní**.
- $Q(\boldsymbol{x}) \ge 0$, nazýváme formu $Q(\boldsymbol{x})$ **pozitivně semidefinitní**.
- $Q(\boldsymbol{x}) < 0$, nazýváme formu $Q(\boldsymbol{x})$ **negativně definitní**.
- $Q(\boldsymbol{x}) \le 0$, nazýváme formu $Q(\boldsymbol{x})$ **negativně semidefinitní**.

Jestliže existují $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ taková, že $Q(\boldsymbol{x}) > 0 > Q(\boldsymbol{y})$, nazývá se kvadratická forma $Q(\boldsymbol{x})$ **indefinitní**.

Věta 5 *(Sylvestrovo kritérium). Nechť je $Q(\boldsymbol{x})$ kvadratická forma tvaru (7.3). Označme*

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{7.4}$$

Nechť je $D_n \neq 0$.

- *Je-li $D_k > 0$ pro každé $k = 1, 2, \dots, n$, je kvadratická forma $Q(\boldsymbol{x})$* **pozitivně definitní**.
- *Je-li $(-1)^k D_k > 0$ pro každé $k = 1, 2, \dots, n$ (tj. $D_1 = a_{11} < 0$ a determinanty D_k z (7.4) střídají znaménka), je kvadratická forma $Q(\boldsymbol{x})$* **negativně definitní**.
- *Jestliže nenastává ani jedna ze dvou výše uvedených možností, je kvadratická forma $Q(\boldsymbol{x})$* **indefinitní**.

☛ ***Příklad 1.*** Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{1}{2}\,z^2 - 3xz - 2y + 2z$.

Řešení. Funkce $f(x,y,z)$ má spojité derivace všech řádu na celé množině $\mathbb{R}^3$, proto existuje diferenciál libovolného řádu. První diferenciál je $\mathrm{d}f(x,y,z) = 3\big(x^2 - z\big)\mathrm{d}x + 2(y-1)\mathrm{d}y + (z - 3x + 2)\mathrm{d}z$. Tedy lokální extrémy mohou existovat v bodech, kde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3\big(x^2 - z\big)\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\big(y-1\big)\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = z - 3x + 2\,.$$

Tato soustava má dvě řešení $\boldsymbol{a}_1 = [1;1;1]$ a $\boldsymbol{a}_2 = [2;1;4]$.

Druhý diferenciál funkce $f(x,y,z)$ je $\mathrm{d}^2 f(x,y,z) = 6x\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - 6\mathrm{d}x\mathrm{d}z$.

V bodě $\boldsymbol{a}_1 = [1;1;1]$ je odpovídající kvadratická forma

$$\Phi(h,k,l) = 6h^2 + 2k^2 + l^2 - 6hl = 6\left(h - \frac{1}{2}\,l\right)^2 + 2k^2 - \frac{1}{2}\,l^2\,.$$

Jak je vidět, je tato kvadratická forma indefinitní, a tedy v bodě $\boldsymbol{a}_1 = [1;1;1]$ nemá funkce $f(x,y,z)$ lokální extrém.

V bodě $\boldsymbol{a}_2 = [2;1;4]$ je kvadratická forma

$$\Phi(h,k,l) = 12h^2 + 2k^2 + l^2 - 6hl = 12\left(x - \frac{1}{4}\,l\right)^2 + 2k^2 + \frac{1}{4}\,l^2\,.$$

Tedy kvadratická forma je v tomto případě pozitivně definitní, a proto má funkce $f(x,y,z)$ v bodě $\boldsymbol{a}_2 = [2;1;4]$ lokální minimum.

Ukážeme ještě použití Sylvestrova kritéria. Matice druhých derivací v bodě $\boldsymbol{a}_1$

je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Z ní dostaneme

$$D_1 = 6 > 0\,, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0\,, \qquad \begin{vmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 < 0\,.$$

Tedy forma $\Phi(h, k, l)$ je indefinitní a funkce nemá v bodě $\boldsymbol{a}_1$ lokální extrém.

V bodě $\boldsymbol{a}_2$ je matice druhých derivací $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Protože

$$D_1 = 12 > 0\,, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 > 0\,, \qquad \begin{vmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 > 0\,,$$

je kvadratická forma $\Phi(h, k, l)$ pozitivně definitní, a tedy v bodě $\boldsymbol{a}_2$ má funkce $f(x, y, z)$ lokální minimum.

7.2. Vázané extrémy

V této části se budeme zabývat výpočtem lokálních extrémů funkce $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = \big(x_1, x_2, \dots, x_n\big)$ na množině M, která je dána soustavou rovnic

$$g_k(\boldsymbol{x}) = 0\,, \quad k = 1,\, 2,\, \dots,\, r\,. \tag{7.5}$$

Vztahy (7.5) se často nazývají vazby, a proto se často mluví o **vázaných extrémech**.

Nejprve na případě $n = 2$ a $r = 1$ ukážeme různé způsoby řešení této úlohy. Máme tedy najít lokální extrémy funkce $f(x, y)$ na množině, která je určena rovnicí $g(x, y) = 0$.

Jestliže se nám podaří explicitně z rovnice $g(x, y) = 0$ vyjádřit jednu proměnnou jako funkci druhé, například najít funkci $y = \varphi(x)$, lze za y dosadit do funkce $f(x, y)$ a hledat extrém funkce jedné proměnné $F(x) = f\big(x, \varphi(x)\big)$. Ale to je úloha, kterou jsme se zabývali v přednášce z MA1.

Jiná možnost je popsat množinu M parametricky, tj. najít funkce $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in T$, takové, že $g\big(\varphi(t), \psi(t)\big) = 0$. Jestliže tyto vztahy dosadíme do funkce $f(x, y)$, můžeme lokální extrémy hledat pro funkci jedné proměnné $\Phi(t) = f\big(\varphi(t), \psi(t)\big)$, kde $t \in T$.

Existuje ale ještě jiná možnost, při které nemusíme znát řešení rovnice $g(x, y) = 0$. Předpokládejme, že funkce $g(x, y)$ má spojité parciální derivace na otevřené množině $E \subset \mathbb{R}^2$ a $\dfrac{\partial g}{\partial y} \neq 0$ na M. Pak lze podle věty o implicitních funkcích vyjádřit alespoň lokálně vyjádřit y jako funkci proměnné x, tj. $y = \varphi(x)$. Když dosadíme tento vztah do funkce $f(x, y)$, máme najít lokální extrém funkce jedné proměnné $F(x) = f\big(x, \varphi(x)\big)$. Jak je známo z MA1 extrém funkce $F(x)$ může existovat pouze v bodě a, ve kterém je

$$F'(a) = f'_x\big(a, \varphi(a)\big) + f'_y\big(a, \varphi(a)\big)\varphi'(a) = 0\,. \tag{7.6}$$

V bodě, kde je lokální extrém máme tedy dvě rovnice, (7.6) a $g\big(a, \varphi(a)\big) = 0$, pro tři proměnné a, $\varphi(a)$ a $\varphi'(a)$. Tedy musíme najít ještě jednu rovnici. Ale tu získáme derivováním vazbové podmínky v bodě a. Z té plyne vztah

$$g'_x\big(a, \varphi(a)\big) + g'_y\big(a, \varphi(a)\big)\varphi'(a) = 0\,.$$

Tedy v bodě, kde má funkce $f(x, y)$ lokální extrém, musí platit rovnice

$$f'_x(a, b) + f'_y(a, b)y'(a) = 0\,, \tag{7.7}$$

$$g'_x(a, b) + g'_y(a, b)y'(a) = 0\,, \tag{7.8}$$

$$g(a, b) = 0\,, \tag{7.9}$$

kde jsme označili $b = \varphi(a)$ a $y'(a) = \varphi'(a)$. Soustava (7.7)–(7.9) je již soustavou tří rovnic pro tři neznámé a v principu ji lze řešit. Většinou se ale používá jistá metoda řešení této soustavy. Protože jsme předpokládali, že je $g'_y(a, b) \neq 0$ existuje právě jedna konstanta λ taková, že

$$f'_y(a, b) + \lambda g'_y(a, b) = 0\,. \tag{7.10}$$

Jestliže vynásobíme rovnici (7.8) číslem λ a přičteme k rovnici (7.7), dostaneme vzhledem k podmínce (7.10), že pro takové λ musí platit také

$$f'_x(a, b) + \lambda g'_x(a, b) = 0\,. \tag{7.11}$$

Tedy jestliže má funkce $f(x, y)$ s vazbovou podmínkou $g(x, y) = 0$ v bodě (a, b) lokální extrém, musí existovat konstanta λ taková, že platí

$$f'_x(a, b) + \lambda g'_x(a, b) = 0\,, \tag{7.12}$$

$$f'_y(a, b) + \lambda g'_y(a, b) = 0\,, \tag{7.13}$$

$$g(a, b) = 0\,. \tag{7.14}$$

Abychom rozhodli o druhu lokálního extrému, najdeme druhý diferenciál funkce $F(x) = f\big(x, \varphi(x)\big)$ v bodě a. Z věty o diferenciálu složené funkce dostaneme

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2F(a) = f'_{xx}(a,b)\mathrm{d}x^2 + 2f'_{xy}(a,b)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+ \\ + f'_{yy}(a,b)\mathrm{d}y^2 + f'_y(a,b)\mathrm{d}^2y\,. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Ale z vazbové podmínky plynou vztahy:

$$\mathrm{d}g(a,b) = g'_x(a,b)\mathrm{d}x + g'_y(a,b)\mathrm{d}y = 0 \tag{7.16}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2g(a,b) = g'_{xx}(a,b)\mathrm{d}x^2 + 2g'_{xy}(a,b)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+ \\ + g'_{yy}(a,b)\mathrm{d}y^2 + g'_y(a,b)\mathrm{d}^2y = 0\end{aligned} \tag{7.17}$$

Jestliže rovnici (7.17) číslem λ a přičteme k rovnici (7.15), dostaneme vzhledem k podmínce (7.13) pro druhý diferenciál vztah

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2F(a) = \big(f'_{xx}(a,b)\lambda g'_{xx}(a,b)\big)\mathrm{d}x^2+2\big(f'_{xy}(a,b)+\lambda g'_{xy}(a,b)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+ \\ + \big(f'_{yy}(a,b)+\lambda g'_{yy}(a,b)\big)\mathrm{d}y^2\,.\end{aligned} \tag{7.18}$$

Ale $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ splňují podmínku (7.16), a tedy nejsou nezávislé. Proto musíme za jednu z těchto proměnných dosadit z (7.16). Tím získáme kvadratickou formu v jedné proměnné. Je-li tato forma pozitivně definitní, má funkce $f(x,y)$ v bodě (a,b) ostré lokální minimum a je-li negativně definitní, má v tomto bodě lokální maximum.

Číslo λ se nazývá **Lagrangeův multiplikátor** a celá metoda pak **metoda Lagrangeova multiplikátoru**. Tuto metodu hledání lokálních vázaných extrémů lze formulovat pro obecný případ.

Věta 6. *Nechť funkce*

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \quad g_k(\boldsymbol{x}) = g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, r \tag{7.19}$$

mají spojité parciální derivace prvního řádu v otevřené množině $E \subset \mathbb{R}^n$. Nechť je v každém bodě množiny E hodnost matice

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial g_r}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_r}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial g_r}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{7.20}$$

rovna r a nechť je M množina všech bodů $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, které splňují rovnice

$$g_k(\boldsymbol{x}) = g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\,. \tag{7.21}$$

Pak platí následující tvrzení.

Jestliže má funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a} \in E$ lokální extrém vzhledem k množině M, existují reálná čísla λ_1, λ_2, ..., λ_r taková, že

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = 0 \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \ldots, n \tag{7.22}$$

$$g_k(\boldsymbol{a}) = 0 \quad \text{pro každé } k = 1, 2, \ldots, r \tag{7.23}$$

Nechť je bod $\boldsymbol{a} \in E$ a λ_k čísla, pro která platí (7.22) a (7.23), a nechť mají funkce (7.19) v bodě $\boldsymbol{a}$ diferenciál druhého řádu. Sestrojme kvadratickou formu proměnných $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, ..., $\mathrm{d}x_n$

$$\Psi\big(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n\big) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) \right) \mathrm{d}x_i \, \mathrm{d}x_j \,. \tag{7.24}$$

Protože matice $\mathbf{W}$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ hodnost r, existuje alespoň jeden její nenulový determinant řádu r. Nechť je to například determinant

$$W = \frac{D\big(g_1, g_2, \ldots, g_r\big)}{D\big(x_1, x_2, \ldots, x_r\big)}(\boldsymbol{a}) \neq 0 \,. \tag{7.25}$$

Když ze soustavy r rovnic

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}x_i = 0 \tag{7.26}$$

vyjádříme $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_r$ jako lineární formy proměnných $\mathrm{d}x_{r+1}$, $\mathrm{d}x_{r+2}, \ldots, \mathrm{d}x_n$ a dosadíme je do kvadratické formy Ψ, získáme kvadratickou formu Φ proměnných $\mathrm{d}x_{r+1}, \mathrm{d}x_{r+2}, \ldots, \mathrm{d}x_n$. Jestliže je tato kvadratická forma pozitivně, resp. negativně, definitní, má funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ ostré lokální minimum, resp. maximum, vzhledem k množině M. Jestliže je kvadratická forma Φ indefinitní, nemá funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém vzhledem k množině M.

Poznámka. Konstanty $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ z této věty se často nazývají **Lagrangeovy multiplikátory** a uvedená metoda hledání vázaných extrémů **metoda Lagrangeových multiplikátorů.**

Jednoduše řečeno, metodu Lagrangeových multiplikátorů lze popsat následujícím způsobem.

Sestrojíme tzv. **Lagrangeovu funkci**

$$L(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k g_k(\boldsymbol{x}), \tag{7.27}$$

kde λ_k jsou zatím neurčené konstanty. S touto funkcí zacházíme stejně, jako by vazbové podmínky neexistovaly, tj. najdeme body $\boldsymbol{a}$ takové, že

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial L}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) = \cdots = \frac{\partial L}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) = 0. \tag{7.28}$$

Přitom se ale musíme omezit na body $\boldsymbol{a}$, pro které je

$$g_1(\boldsymbol{a}) = g_2(\boldsymbol{a}) = \cdots = g_r(\boldsymbol{a}) = 0. \tag{7.29}$$

Soustava rovnic (7.28) a (7.29) je soustava $(n+r)$ rovnic pro $(n+r)$ proměnných $\boldsymbol{a} = \big(a_1, a_2, \ldots, a_n\big)$ a λ_1, . . . , λ_r.
Když najdeme takové body, sestrojíme druhý diferenciál funkce $L(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$, tj.

$$\mathrm{d}^2 L = \sum_{k,l=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_l}\, \mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_l. \tag{7.30}$$

Z rovnic

$$\mathrm{d}g_i(\boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}x_k = 0$$

vypočteme r z hodnot $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ pomocí $(n-r)$ ostatních a dosadíme do (7.30). Tak získáme kvadratickou formu $(n-r)$ proměnných, která rozhoduje o typu extrému v bodě $\boldsymbol{a}$ stejně jako kvadratická forma Φ definovaná v (7.2) ve větě 4.

☛ ***Příklad 2.*** Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z)=x+y+z$ na množině M, která je dána rovnicí $g(x,y,z)=xyz-1=0$.

Řešení. Úlohu bychom mohli řešit tak, že bychom z vazbové podmínky vyjádřili například $z=\dfrac{1}{xy}$ a pak hledali lokální extrémy funkce dvou proměnných $F(x,y)=x+y+\dfrac{1}{xy}$. Ale na tomto příkladě ukážeme použití metody Lagrangeových multiplikátorů. Tato metoda by mohla selhat pouze v bodech, kde by bylo $g(x,y,z)=g'_x(x,y,z)=g'_y(x,y,z)=g'_z(x,y,z)=0$. Ale takové body neexistují, a proto lze metodu použít bez obav.
Sestrojíme Lagrangeovy funkci $L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)=x+y+z+\lambda(xyz-1)$. Nutné podmínky pro extrém jsou

$$\frac{\partial L}{\partial x}=1+\lambda yz=\frac{\partial L}{\partial y}=1+\lambda xz=\frac{\partial L}{\partial z}=1+\lambda xy=0\,,\quad xyz=1\,.$$

Tato soustava má pouze jediné řešení $x=y=z=1$, $\lambda=-1$. Abychom rozhodli o typu extrému, sestrojíme v tomto bodě druhý diferenciál funkce $L(x,y,z)$. Ten je $\mathrm{d}^2L(1,1,1)=-2(\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\mathrm{d}y\mathrm{d}z)$. Ale tato kvadratická forma tří proměnných je indefinitní. Ale diferenciál vazebné podmínky dává vztah $\mathrm{d}g(1,1,1)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=0$. Z toho plyne, že $\mathrm{d}z=-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$. Jestliže dosadíme tento vztah do $\mathrm{d}^2L(1,1,1)$, dostaneme kvadratickou formu Φ dvou proměnných $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ tvaru $\Phi=2\big(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{d}y^2\big)$, která je, jak se lze snadno přesvědčit pozitivně definitní. Tedy funkce $f(x,y,z)$ na v bodě $[1;1;1]$ ostré lokální minimum vzhledem k množině $M=\big\{[x;y;z]\in\mathbb{R}^3\,;\ xyz=1\big\}$.

7.3. Globální extrémy na kompaktní množině

Mnohdy vedou řešené problémy na úlohu najít největší nebo nejmenší hodnotu funkce $f(\boldsymbol{x})$ na množině M, která je dána jistými nerovnostmi. Jestliže je množina M kompaktní, tj. omezená a uzavřená, a funkce $f(\boldsymbol{x})$ na množině M spojitá, víme z Weierstrassovy věty, že v množině M existustují body $\boldsymbol{a}_1$ a $\boldsymbol{a}_2$ takové, že pro všechna $\boldsymbol{x} \in M$ platí nerovnosti $f\left(\boldsymbol{a}_1\right) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq f\left(\boldsymbol{a}_2\right)$. Tedy funkce $f(\boldsymbol{x})$ nabývá na množině M nejmenší a největší hodnoty. Tyto hodnoty mohou byt vnitřní body množiny M nebo mohou ležet na hranici M. Jestliže funkce $f(\boldsymbol{x})$ nabývá extrému ve vnitřním bodě $\boldsymbol{a}$ množiny M, musí mít v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém. Tedy pokud existují parciální derivace musí v bodě $\boldsymbol{a}$ platit (7.1). Nabývá-li funkce $f(\boldsymbol{x})$ extrém v bodě $\boldsymbol{a}$, který je hraniční bod množiny M, musí mít funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém vzhledem k hranici množiny M. Jestliže je hranice M dána pomocí rovnic $g_k(\boldsymbol{x}) = 0$, lze v těchto bodech použít metodu Lagrangeových multiplikátorů. Abychom tedy našli největší a nejmenší hodnotu diferencovatelné funkce $f(\boldsymbol{x})$ na kompaktní množině M stačí najít vnitřní body množiny M, ve kterých platí (7.1) a hraniční body M, kde by mohl být extrém. Jestliže je těchto bodů konečně mnoho, stačí z těchto bodů vybrat ten, ve kterém je funkční hodnota $f(\boldsymbol{x})$ největší nebo nejmenší.

Tento postup ilustrujeme v následujícím příkladě.

☛ ***Příklad 3.*** Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ na množině $M \subset \mathbb{R}^2$ dané nerovnostmi $0 \le x \le 3$ a $0 \le y \le 2x^2$.

Řešení. Nejprve budeme zkoumat vnitřní body množiny M, tj. body, které vyhovují nerovnostem $0 < x < 3$ a $0 < y < 2x^2$. Aby funkce $f(x, y)$ nabývala v tomto bodě své nejmenší nebo největší hodnoty, musí platit (7.1), tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0\,.$$

Tyto rovnice jsou splněny pouze v bodech $x = y = 0$ nebo $x = y = 1$. Ale bod $[0; 0]$ není vnitřním bodem množiny M. Tedy jediný vnitřní bod, ve kterém může funkce $f(x, y)$ nabývat extrém je bod $\boldsymbol{a}_1 = [1; 1]$.
Hranice množiny M je tvořena třemi křivkami:

1. $x = 3$, $0 \le y \le 18$
2. $y = 0$, $0 \le x \le 3$
3. $y = 2x^2$, $0 \le x \le 3$

Na první křivce je $f(3, y) = F_1(y) = y^3 - 9y + 27$. Tato funkce může nabývat extrém v bodech $y \in (0, 18)$, kde $F_1'(y) = 0$ nebo v krajních bodech. Protože $F_1'(y) = 3y^2 - 9$, dostaneme pomocí derivace jediný bod $\boldsymbol{a}_2 = \left[3; \sqrt{3}\right]$.

V bodech druhé křivky budeme hledat body, v nichž může mít lokální extrém funkce $F_2(x) = f(x,0) = x^3$, $x \in (0,3)$. V těchto bodech je derivace $F_2'(x) = 3x^2 \neq 0$.

Ve třetím případě hledáme body, ve kterých je derivace funkce $F_3(x) = f\left(x, 2x^2\right) = 8x^6 - 5x^3$, $x \in (0,3)$, rovna nule. Protože $F_3'(x) = 48x^5 - 15x^2$. Protože bod $x = 0$ nevyhovuje podmínce $x \in (0,3)$, dostáváme jediný bod $\boldsymbol{a}_3 = \left[\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2}}; \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{25}{4}}\right]$.

Konečně nám zbývají body, které jsou průnikem dvou hraničních křivek, tedy body $\boldsymbol{a}_4 = [0;0]$, $\boldsymbol{a}_5 = [3;0]$ a $\boldsymbol{a}_6 = [3;18]$.

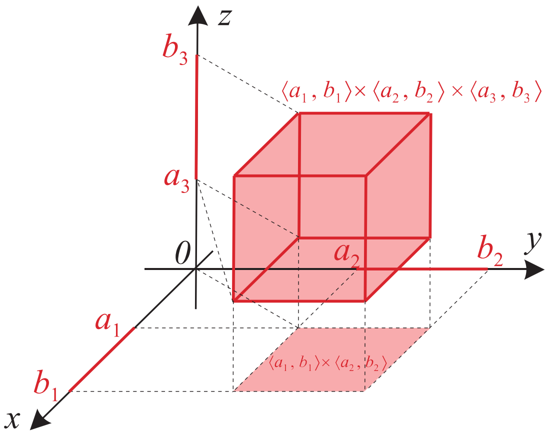
Protože je $f\left(\boldsymbol{a}_1\right) = -1$, $f\left(\boldsymbol{a}_2\right) = 27 - 3\sqrt{3}$, $f\left(\boldsymbol{a}_3\right) = -\frac{25}{32}$, $f\left(\boldsymbol{a}_4\right) = 0$, $f\left(\boldsymbol{a}_5\right) = 27$ a $f\left(\boldsymbol{a}_5\right) = 5697$, nabývá funkce $f(x,y)$ na množině M největší hodnoty 5697 v bodě $[3;18]$ a nejmenší hodnoty -1 v bodě $[1;1]$.

8 RIEMANNŮV INTEGRÁL V $\mathbb{R}^n$

8.1. Zavedení Riemannova integrálu v $\mathbb{R}^n$

Nechť je $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ omezený uzavřený interval, tj.

$$\mathcal{I} = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle ; \quad a_i , b_i \in \mathbb{R} ; \; a_i \leq b_i . \tag{8.1}$$



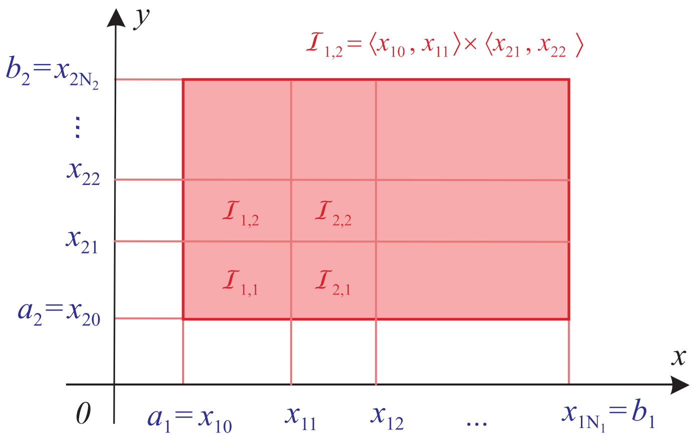
Definice 1. Nechť je $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ interval definovaný v (8.1). Každou množinu bodů

$$\{x_{ij}\,,\ i = 1,\,2,\,\ldots,\,n,\ j = 0,\,1,\,2\,\ldots,\,N_i \in \mathbb{N}\}\,,$$

kde

$$x_{i0} = a_i \le x_{i1} \le x_{i2} \le \cdots \le x_{iN_i} = b_i\,,$$

nazýváme **dělení intervalu** $\mathcal{I}$. Dělení intervalu, tj. výše uvedenou množinu bodů, budeme značit $\mathcal{D}$. Množinu všech dělení intervalu $\mathcal{I}$ budeme značit $\mathfrak{D}$.



Pro každé dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\mathcal{I}$ označme $\mathcal{I}_{j_1,j_2,\dots,j_n}$, $1 \le j_k \le N_k$, interval

$$\mathcal{I}_{j_1,j_2,\dots,j_n} = \left\langle x_{j_1-1}, x_{j_1} \right\rangle \times \left\langle x_{j_2-1}, x_{j_2} \right\rangle \times \dots \times \left\langle x_{j_n-1}, x_{j_n} \right\rangle \tag{8.2}$$

a

$$d_{j_1,j_2,\dots,j_n} = \left(x_{j_1} - x_{j_1-1}\right)\left(x_{j_2} - x_{j_2-1}\right)\dots\left(x_{j_n} - x_{j_n-1}\right) \tag{8.3}$$

obsah n-dimenzionálního intervalu $\mathcal{I}_{j_1,j_2,\dots,j_n}$.
Nechť je $f(\boldsymbol{x})$ reálná funkce omezená na intervalu $\mathcal{I}$. Pro každé dělení $\mathcal{D}$ označme

$$m_{j_1,j_2,\dots,j_n} = \inf_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{I}_{j_1,\dots,j_n}} \left(f(\boldsymbol{x})\right) \tag{8.4}$$

$$M_{j_1,j_2,\dots,j_n} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{I}_{j_1,\dots,j_n}} \left(f(\boldsymbol{x})\right) \tag{8.5}$$

a definujme

$$s(f,\mathcal{D}) = \sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{N_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{N_n} m_{j_1,j_2,\dots,j_n} d_{j_1,j_2,\dots,j_n} \tag{8.6}$$

$$S(f,\mathcal{D}) = \sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{N_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{N_n} M_{j_1,j_2,\dots,j_n} d_{j_1,j_2,\dots,j_n}\,. \tag{8.7}$$

Čísla $s(f,\mathcal{D})$, resp. $S(f,\mathcal{D})$ se nazývá **dolní**, resp. **horní integrální součet funkce $f(\boldsymbol{x})$ příslušný k dělení $\mathcal{D}$**. Protože je funkce $f(\boldsymbol{x})$ omezená na $\mathcal{I}$, existují reálná čísla $m = \inf\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{I}} f(\boldsymbol{x})$ a $M = \sup\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{I}} f(\boldsymbol{x})$. Ze zřejmého vztahu $m \le m_{j_1,\dots,j_n} \le M_{j_1,\dots,j_n} \le M$ plyne, že pro každé dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\mathcal{I}$ platí nerovnost

$$m d_{\mathcal{I}} \le s(f,\mathcal{D}) \le S(f,\mathcal{D}) \le M d_{\mathcal{I}}\,, \tag{8.8}$$

kde $d_{\mathcal{I}}$ je obsah intervalu $\mathcal{I}$.

Definice 2. Nechť je $\mathcal{I}$ je interval (8.1) a $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ jeho dvě dělení. Je-li každý bod dělení $\mathcal{D}_1$ bodem dělení $\mathcal{D}_2$, nazveme dělení $\mathcal{D}_2$ **zjemněním** dělení $\mathcal{D}_1$.

Poznámka: Z definice 2 plyne, že když je dělení $\mathcal{D}_2$ zjemněním dělení $\mathcal{D}_1$, obsahuje $\mathcal{D}_2$ všechny body dělení $\mathcal{D}_1$ a třeba i některé další dělící body. Tedy každý interval $\mathcal{I}_{k_1,k_2,\dots,k_n}$ dělení $\mathcal{D}_1$ je sjednocením konečného počtu intervalů $\mathcal{J}_\alpha$ dělení $\mathcal{D}_2$.

Věta 1. *Je-li dělení $\mathcal{D}_2$ intervalu $\mathcal{I}$ zjemněním dělení $\mathcal{D}_1$ intervalu $\mathcal{I}$, je*

$$s\big(f,\mathcal{D}_1\big) \le s\big(f,\mathcal{D}_2\big) \le S\big(f,\mathcal{D}_2\big) \le S\big(f,\mathcal{D}_1\big)\,. \tag{8.9}$$

Věta 2. *Jsou-li $\mathcal{D}_1$ a $\mathcal{D}_2$ dvě dělení intervalu $\mathcal{I}$, pak platí:*

$$s\big(f,\mathcal{D}_1\big) \le S\big(f,\mathcal{D}_2\big)\,. \tag{8.10}$$

Ze vztahu (8.8) plyne, že existují konečná reálná čísla $s(f), S(f)$:

$$s(f) = \sup_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} s(f,\mathcal{D}) \le \inf_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} S(f,D) = S(f)\,. \tag{8.11}$$

Definice 3. Čísla $s(f)$, resp. $S(f)$ ze vztahu (8.11) nazýváme **dolní**, resp. **horní Riemannův integrál funkce** $f(x)$ **přes interval** $\mathcal{I}$.

Jestliže v (8.11) platí rovnost $s(f) = S(f)$, nazýváme toto číslo **(Riemannův) integrál funkce** $f(x)$ **přes interval** $\mathcal{I}$ a říkáme, že funkce $f(\boldsymbol{x})$ je **integrovatelná** na intervalu $\mathcal{I}$. Pro tento integrál používáme označení

$$\int_{\mathcal{I}} f\big(x_1, x_2, \ldots, x_n\big)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_{\mathcal{I}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V\,. \tag{8.12}$$

Definice 4. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená množina a $\chi_M(\boldsymbol{x})$ je tzv. **charakteristická funkce** množiny M, která je definována předpisem

$$\chi_M(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \boldsymbol{x} \in M \\ 0 & \text{pro } \boldsymbol{x} \notin M \end{cases} \tag{8.13}$$

Protože je M omezená, existuje interval $\mathcal{I} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $M \subset \mathcal{I}$. Jestliže existuje Riemannův integrál

$$d(M) = \int_{\mathcal{I}} \chi_M(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}V \,,$$

říkáme, že množina M je **(Riemannovsky) měřitelná** a číslo $d(M)$ se nazýváme **mírou (obsahem) množiny M**.

Poznámka. Snadno se lze přesvědčit, že nezáleží na volbě intervalu $\mathcal{I} \subset M$.

Definice 5. Nechť je $M \subset \mathbb{R}^n$ je Riemannovsky měřitelná množina a $f(\boldsymbol{x})$ funkce omezená na množině M. Nechť je $\mathcal{I}$ interval v $\mathbb{R}^n$ takový, že $M \subset \mathcal{I}$. Definujme funkci

$$\widehat{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) & \text{pro } \boldsymbol{x} \in M \\ 0 & \text{pro } \boldsymbol{x} \in \mathcal{I} \setminus M \end{cases}$$

Je-li funkce $\widehat{f}(\boldsymbol{x})$ integrovatelná na intervalu $\mathcal{I}$, říkáme, že funkce $f(\boldsymbol{x})$ je **integrovatelná na množině** M a píšeme

$$\int_M f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V = \int_M f\big(x_1, x_2, \dots, x_n\big)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int_{\mathcal{I}} \widehat{f}\big(x_1, x_2, \dots, x_n\big)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n\,. \quad (8.14)$$

Množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál přes množinu M budeme značit $\mathfrak{R}(M)$.

Poznámka. Opět se lze snadno přesvědčit, že nezáleží na volbě intervalu $M \subset \mathcal{I}$.

Věta 3. *Nechť jsou funkce f, f_1, $f_2 \in \mathfrak{R}(M)$ a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Pak jsou také funkce $cf \in \mathfrak{R}(M)$ a $f_1 + f_2 \in \mathfrak{R}(M)$ a platí*

$$\int_M cF(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V = c\int_M f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V\,, \tag{8.15}$$

$$\int_M \big(f_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x})\big)\,\mathrm{d}V = \int_M f_1(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V + \int_M f_2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V\,. \tag{8.16}$$

Důsledek. *Jsou-li funkce $f_k \in \mathfrak{R}(M)\,,\ c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$, pak je $f(\boldsymbol{x}) = c_1 f_1(\boldsymbol{x}) + c_2 f_2(\boldsymbol{x}) + \cdots + c_r f_r(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{R}(M)$ a platí:*

$$\int_M (c_1 f_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + c_r f_r(\boldsymbol{x}))\ \mathrm{d}V =$$

$$= c_1 \int_M f_1(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V + \cdots + c_r \int_M f_r(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V\,. \tag{8.17}$$

Velmi důležitou roli v teorii integrálu hrají tzv. množiny nulové míry.

Definice 6. Jestliže je $M \subset \mathbb{R}^n$ měřitelná množina taková, že

$$d(M) = \int_M \chi_M(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V = 0\,,$$

nazýváme množinu M **množinou míry nula** nebo **množinou nulové míry**.

Definice 7. Jestliže nějaká vlastnost $V(\boldsymbol{x})$ platí pro všechna $\boldsymbol{x} \in M$ mimo bodů z množiny $N \subset M$ a množina N má míru nula, budeme říkat, že vlastnost $V(\boldsymbol{x})$ platí **skoro všude** na množině M.

Věta 4. *Nechť je $f(\boldsymbol{x}) = 0$ skoro všude na M. Pak je*

$$\int_M f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V = 0$$

Věta 5. *Nechť je M měřitelná množina taková, že její hranice ∂M má míru nula. Pak každá funkce, která je na M spojitá a omezená, je na množině M integrovatelná.*

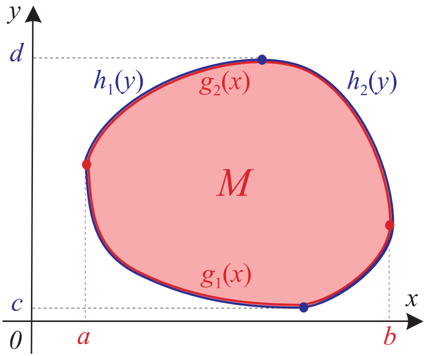
8.2. Speciální případy

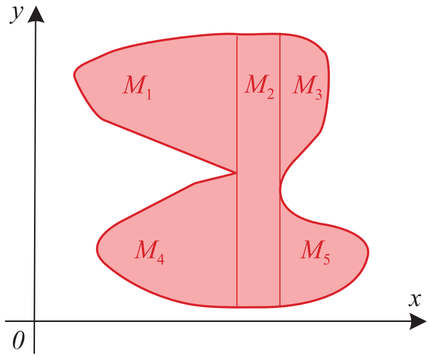
8.2.1. Dvojný integrál – Riemannův integrál v $\mathbb{R}^2$

Riemannův integrál v $\mathbb{R}^2$ se nazývá rovněž **dvojný integrál** a značí se obvykle

$$\int_M f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V = \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Při studiu dvojných integrálů budeme zpravidla pro jednoduchost předpokládat, že množina M je tzv. **přípustná oblast**, tj. omezená množina, jejíž hranici tvoří konečně mnoho prostých křivek.





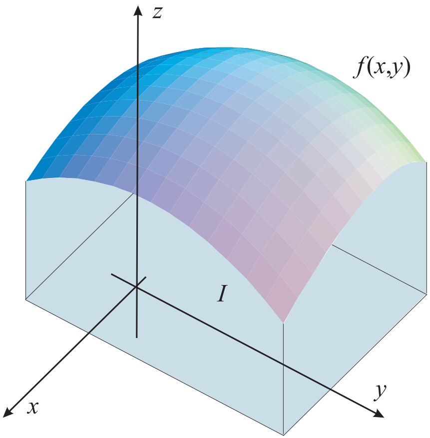
Home
Úvod
Strana 125
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

Pro ještě větší jednoduchost a názornost budeme předpokládat, že hranici přípustné oblasti lze popsat jako graf dvou funkcí, $g_1(x), g_2(x)$, resp. $h_1(y), h_2(y)$. Není-li možné hranici takto popsat, rozdělíme oblast tak, jak to znázorňuje obr. vpravo.

Geometrický význam dvojného integrálu

Uvažujme funkci f a interval $\mathcal{I}$, nechť je $f \geq 0$ na $\mathcal{I}$. Existuje-li Riemannův integrál $\int_{\mathcal{I}} f \, \mathrm{d}V$, lze se na jeho hodnotu dívat jako na **objem tělesa V ohraničeného grafem dané funkce:**

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in \mathcal{I},\ 0 \leq z \leq f(x, y)\} .$$



Další aplikace dvojného integrálu

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je přípustná oblast.

- Plošný obsah rovinného obrazce M :

$$\mu(M) = \iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

- Hmotnost tenké desky M :

$$m(M) = \iint_M \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

  kde $\sigma(x,y)$ značí plošnou hustotu. Veličina $\sigma(x,y)$ může rovněž udávat hustotu náboje a výsledný integrál **celkový náboj tenké desky**.

- Statické momenty rovinného obrazce M :

$$S_x(M) = \iint_M y\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \qquad S_y(M) = \iint_M x\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

  kde $\sigma(x,y)$ je plošná hustota.

- Souřadnice těžiště rovinného obrazce M :

$$x_t(M) = \frac{S_y(M)}{m(M)}\,, \qquad y_t(M) = \frac{S_x(M)}{m(M)}\,.$$

8.3. Metody výpočtu Riemannova integrálu

8.3.1. Fubiniova věta

Zaveďme následující označení:

$$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{r+s} = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s\,, \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^r\,, \ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^s\,,$$

tj. $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_s)$, $r + s = n$,

$$\boldsymbol{z} = (x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_s).$$

Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$, budeme psát

$$M_{\boldsymbol{x}} = \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^s;\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in M\right\}, \qquad M_{\boldsymbol{y}} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^r;\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in M\right\}.$$
$$M^{\boldsymbol{x}} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^r;\ M_{\boldsymbol{x}} \neq \emptyset\right\}, \qquad M^{\boldsymbol{y}} = \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^s;\ M_{\boldsymbol{y}} \neq \emptyset\right\}.$$

Je-li $f(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ funkce definovaná na množině $M \subset \mathbb{R}^n$, definujme funkce $f^{\boldsymbol{x}} : M_{\boldsymbol{x}} \to \mathbb{R}$ a $f^{\boldsymbol{y}} : M_{\boldsymbol{y}} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = f^{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,.$$

Jestliže je $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ interval, platí rovnost

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\boldsymbol{y}} \times \mathcal{I}_{\boldsymbol{x}} = \mathcal{I}^{\boldsymbol{x}} \times \mathcal{I}^{\boldsymbol{y}} = \mathcal{I}^{\boldsymbol{x}} \times \mathcal{I}_{\boldsymbol{x}} = \mathcal{I}_{\boldsymbol{y}} \times \mathcal{I}^{\boldsymbol{y}}\,.$$

Je zřejmé, že pro objem těchto intervalů platí rovnosti

$$V(\mathcal{I}) = V(\mathcal{I}^{\boldsymbol{x}}) \cdot V(\mathcal{I}_{\boldsymbol{x}}) = V(\mathcal{I}^{\boldsymbol{y}}) \cdot V(\mathcal{I}_{\boldsymbol{y}}) \,.$$

Pomocí Riemannova integrálu lze tuto rovnost zapsat jako

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{I}} \chi_{\mathcal{I}}(\boldsymbol{z}) \, \mathrm{d}V &= \int_{\mathcal{I}^{\boldsymbol{x}}} \left(\int_{\mathcal{I}_{\boldsymbol{x}}} \chi_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}V_{\boldsymbol{y}} \right) \mathrm{d}V_{\boldsymbol{x}} = \\ &= \int_{\mathcal{I}^{\boldsymbol{y}}} \left(\int_{\mathcal{I}_{\boldsymbol{y}}} \chi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}V_{\boldsymbol{x}} \right) \mathrm{d}V_{\boldsymbol{y}} \,, \end{aligned} \tag{8.18}$$

kde symbol $\mathrm{d}V_{\boldsymbol{x}}$, resp. $\mathrm{d}V_{\boldsymbol{y}}$, znamená, že integrujeme přes proměnnou $\boldsymbol{x}$, resp. $\boldsymbol{y}$.
Vztah (8.18) zobecňuje následující věta.

Věta 6 (Fubini) *Nechť je funkce $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ definovaná na $M \subset \mathbb{R}^n$. Nechť existuje integrál*

$$\int_M f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V \tag{8.19}$$

a pro skoro všechna $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}^{\boldsymbol{x}}$, resp. $\boldsymbol{y} \in \mathcal{M}^{\boldsymbol{y}}$, existují integrály

$$F(\boldsymbol{x}) = \int_{M_{\boldsymbol{x}}} f^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_{\boldsymbol{y}} = \int_{M_{\boldsymbol{x}}} f^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_s\,, \tag{8.20}$$

resp.

$$G(\boldsymbol{y}) = \int_{M_{\boldsymbol{y}}} f^{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V_{\boldsymbol{x}} = \int_{M_{\boldsymbol{y}}} f^{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_r\,. \tag{8.21}$$

Jestliže rozšíříme funkci $F(\boldsymbol{x})$ na množinu $M^{\boldsymbol{x}}$, resp. $G(\boldsymbol{y})$ na množinu $M^{\boldsymbol{y}}$, v bodech, kde není definována, nulou, pak platí:

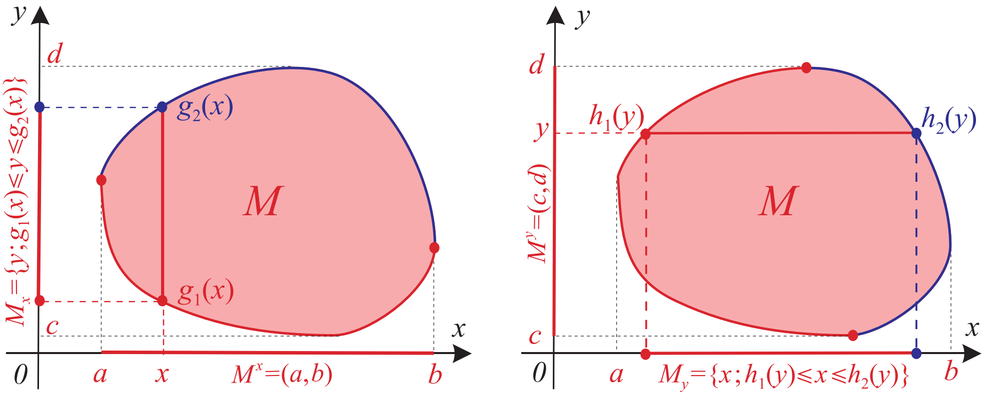
$$\int_M f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V = \int_{M^{\boldsymbol{x}}} F(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V_{\boldsymbol{x}} = \int_{M^{\boldsymbol{y}}} G(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{8.22}$$

tj.

$$\int_M f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V = \int_{M^{\boldsymbol{x}}} \left(\int_{M_{\boldsymbol{x}}} f^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_s \right) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_r =$$
$$= \int_{M^{\boldsymbol{y}}} \left(\int_{M_{\boldsymbol{y}}} f^{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_r \right) \mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_s\,.$$

Podle této věty lze Riemannův integrál v $\mathbb{R}^n$ najít pomocí výpočtu dvou Riemannových integrálů v prostorech menší dimenze. Postupnou aplikací této věty je pak možné najít integrál v $\mathbb{R}^n$, pokud existuje, pomocí výpočtu n jednorozměrných Riemannových integrálů.

Speciální případ: $\mathbb{R}^2$



Při hledání Riemannova integrálu v $\mathbb{R}^2$ budeme zpravidla používat Fubiniovu větu v následujícím znění:

Home
Úvod
Strana 131
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

Věta (Fubiniova pro $\mathbb{R}^2$). *Nechť M je omezená množina, jejíž hranici lze popsat pomocí dvojic funkcí $g_1(x), g_2(x)$ a $h_1(y), h_2(y)$ - viz obr. výše. Nechť existuje dvojný integrál*

$$f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Existuje-li jeden z integrálů

$$F(x)=\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy,\ x\in\langle a,b\rangle\,,$$

$$G(y)=\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x,\ y\in\langle c,d\rangle,$$

pak existuje i druhý a platí:

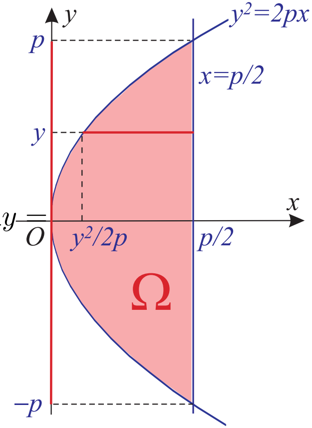
$$f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b F(x)dx=\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right)dx=$$

$$=\int_c^d G(y)dy=\int_c^d\left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right)dy\,.$$

Home
Úvod
Strana 132
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

☛ ***Příklad 1.*** Nalezněte integrál $\iint_\Omega xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde Ω je oblast ohraničená parabolou $y^2 = 2px$ a přímkou $x = p/2$.

Řešení.



$$\iint_\Omega xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-p}^{p}\left(\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} xy^2\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-p}^{p}\left(y^2\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{-p}^{p}\left(y^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-p}^{p}\left(y^2\left(\frac{p^2}{8} - \frac{y^4}{8p^2}\right)\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{p^2}{8}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-p}^{p} - \frac{1}{8p^2}\left[\frac{y^7}{7}\right]_{-p}^{p} = \frac{p^5}{21}$$

8.3.2. Věta o substituci

Věta 7 (O substituci) *Nechť je $\varphi(\boldsymbol{x})$ prosté regulární zobrazení otevřené množiny $X \subset \mathbb{R}^n$ na množinu $Y \subset \mathbb{R}^n$. Nechť je $M \subset X$, $f(\boldsymbol{y})$ funkce definovaná na $\varphi(M)$ a $D_\varphi(\boldsymbol{x})$ jakobián zobrazení φ. Pak platí*

$$\int_{\varphi(M)} f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n = \int_M f\big(\varphi(\boldsymbol{x})\big)\big|D_\varphi(\boldsymbol{x})\big|\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n\,, \qquad (8.23)$$

pokud oba integrály v (8.23) existují.

Jak je vidět z věty 7, substituce nemění pouze integrovanou funkci, ale také podstatně oblast M, přes kterou integrujeme. Proto se na rozdíl od jednorozměrných integrálů pomocí substituce nesnažíme pouze zjednodušit integrovanou funkci, ale také integrační oblast. To je při výpočtu vícerozměrných integrálů velmi podstatné. Například jestliže se nám podaří transformovat oblast M na interval, stačí podle Fubiniovy věty najít n jednorozměrných integrálů, i když většinou poměrně složitých.