Ukázka 1

Nechť má funkce $z = f(x, y)$ spojité parciální derivace. Napište rovnici tečné roviny ke grafu této funkce v bodě $A = \big[x_0, y_0, z_0\big]$.

Transformujte diferenciální výraz

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

do polárních souřadnic r a φ, které jsou definovány vztahy $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$.

Nechť jsou v okolí bodu $[1, 2, 0]$ pomocí soustavy rovnic

$$xy + xz + yz - 2z = 2\,, \qquad y^2 + z^2 - xy + \mathrm{e}^{xz} = 3$$

definovány funkce $y(x)$ a $z(x)$. Najděte jejich druhé derivace $y''(1)$ a $z''(1)$.

Pomocí substituce $u = xy^2$ a $v = \dfrac{y}{x}$ najděte souřadnici y_T těžiště homogenní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi

$$1 \le xy^2 \le 8\,, \qquad x \le 27y \le 27x\,,$$

jestliže víte, že její obsah je 9.

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci silového pole $\mathbf{f} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$ po křivce dané parametrickými rovnicemi

$$x = \ln t\,, \quad y = t\,, \quad z = \frac{1}{t}\,, \qquad 1 \le t \le 2\,,$$

která je orientovaná ve směru rostoucího parametru t.

Najděte hmotnost plochy $\mathcal{S}$, která je daná rovnicemi

$$z^2 = x^2 - y^2\,, \quad y^2 + z^2 \le 2y\,, \qquad x,\, z \ge 0$$

a jejíž hustota je $\rho(x, y, z) = z$.

Ukázka 2

Nechť má funkce $f(x,y)$ spojité parciální derivace n–tého řádu. Napište Taylorův polynom stupně n této funkce se středem v bodě $\left[x_0, y_0\right]$.

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$, kde $x,\ y,\ z > 0$.

Nechť je funkce $z = z(x,y)$ definována v okolí bodu $[1,1,-1]$ jako řešení rovnice

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + xz + yz} = 3\,.$$

Najděte její parciální derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1)$.

Najděte souřadnici x_T homogenního tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$9x^2 + 4y^2 \leq z^2\,, \qquad 0 \leq z \leq 3\,, \qquad x \geq 0\,,$$

jestliže víte, že jeho objem je $V = \frac{3}{4}\,\pi$.

Najděte křivkový integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y - 2y\,\mathrm{d}z)$, kde $\mathcal{C}$ je křivka daná rovnicemi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, \quad x^2 + y^2 = y\,,$$

která leží v prvním oktantu, tj. $x,\ y,\ z \geq 0$, a začíná v bodě $[0,0,1]$.

Najděte obsah plochy $\mathcal{S}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = uv\,, \quad y = \tfrac{1}{2}\,(u^2 - v^2)\,, \quad z = \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2)\,, \qquad u^2 + v^2 \leq 2\,, \quad u,\ v \geq 0\,.$$

Ukázka 3

Jak najdete objem rovnoběžnostěnu, jehož strany jsou vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$?

Nechť je funkce $f(x, y)$ definována vztahem $f(x, y) = F\big(u(x, y), v(x, y)\big)$, kde funkce $F(u, v)$ má spojité druhé parciální derivace a

$$u(x, y) = \ln\big(x + \sqrt{1 + x^2}\big)\,, \qquad v(x, y) = x^2 + xy + y^2\,.$$

Vyjádřete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pomocí parciálních derivací funkce $F(u, v)$.

Nechť je funkce $y(x)$ definována v okolí bodu $[1, 0]$ rovnicí

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $x = 1$.

Nechť je $I = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Pak platí rovnost

$$I^2 = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je dána nerovnostmi x, $y > 0$.
Pomocí substituce do polárních souřadnic najděte integrál I.

Najděte délku křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = \frac{t}{1 + t^2}\,, \quad y = \frac{1}{1 + t^2}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru souřadných os x, y, resp. z. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou $\mathcal{S}$, která je dána vztahy

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad 0 \le z \le 1$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná.

Ukázka 4

Nechť má vektorová funkce $\mathbf{f}(x, y, z)$ spojité parciální derivace. Co je $\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z)$?

V bodě $A = [1, -1, 2]$ najděte parametrické rovnice tečny ke křivce $\mathcal{C}$, která v okolí bodu A je dána jako řešení soustavy rovnic

$$z^2 - xy + yz + x \sin(x + y) = 3\,, \qquad xy + xz + yz + 1 = 0\,.$$

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 2x^2 - 3xy - 2y^2$ za podmínky $x^2 + y^2 = 40$.

Pomocí substituce $x = r\cos^2\varphi$, $y = r\sin^2\varphi$, kde $r > 0$ a $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$, najděte obsah oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je určena nerovnostmi

$$\big(x + y\big)^4 \le 4xy\,, \qquad x,\, y \ge 0\,.$$

Najděte hmotnost křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = \mathrm{e}^{-t}\cos t\,, \quad y = \mathrm{e}^{-t}\sin t\,, \quad z = \mathrm{e}^{-t}\,, \qquad 0 < t < \infty\,,$$

jestliže je její lineární hustota $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Najděte plošný integrál

$$\iint_{\mathcal{S}} \Big((x^2 + yz)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y^2 + xz)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z^2 + xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \Big),$$

kde $\mathcal{S}$ je kladně orientovaná hranice polokoule

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 1\,, \qquad z \ge 0\,.$$

Ukázka 5

Nechť má vektorová funkce $\mathbf{f}(x, y, z)$ spojité parciální derivace. Co je $\operatorname{rot} \mathbf{f}(x, y, z)$?

Napište rovnici tečné roviny v bodě $A = [2, -1, 1]$ k ploše $\mathcal{S}$, která je v okolí bodu A definována rovnicí

$$xy \ln(x - z^2) + z\mathrm{e}^{x(y+z)} = 1 \,.$$

Jaké rozměry má otevřená vana, která má průřez půlkruh a daný povrch stěn $S = 27\pi \,\mathrm{m}^2$ a která má největší objem?

Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 \leq 2z \,, \qquad z - 4 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \,.$$

Najděte potenciál vektorového pole

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

a pomocí toho spočítejte práci pole $\mathbf{f}$ po křivce $\mathcal{C}$, která začíná v bodě $A = [2, -1, 2]$, končí v bodě $B = [4, 0, -3]$ a neprochází počátkem souřadnic.

Najděte obsah plochy $\mathcal{S}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = 2r \cos^2 \varphi \,, \quad y = r \sin^2 \varphi \,, \quad z = r \,, \qquad 0 \leq \varphi \leq \tfrac{1}{2}\pi \,, \quad 0 < r < 1 \,.$$

Ukázka 6

Jak spočítáte množství kapaliny, které proteče za jednotku času rovnoběžníkem se stranami $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, jestliže je rychlost proudění kapaliny $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Najděte derivaci funkce $f(x, y) = x^2 y + \ln \dfrac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ v bodě $A = [1, 1]$ ve směru normály ke grafu funkce $y = \sqrt[3]{x}$ v bodě A.

Nechť je funkce $z = z(x, y)$ definována v okolí bodu $[1, -1, -1]$ jako řešení rovnice

$$yz^3 + x^2 z + xy^2 - y^2 = 0\,.$$

Najděte její Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1, -1]$.

Na plochu $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi

$$3x^2 + 2y^2 \le 6\,, \qquad x^2 + 2 \le 2y^2\,, \qquad x,\, y > 0\,,$$

působí tlak $p(x, y) = 2y$. Najděte celkovou sílu F, která působí na plochu $\mathcal{S}$, tj. integrál

$$F = \iint_{\mathcal{S}} p(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Najděte souřadnici y_T těžiště homogenní křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = \cos t\,, \quad y = \sin t\,, \quad z = 1 - \ln\cos t\,, \qquad 0 \le t \le \tfrac{1}{3}\pi\,,$$

jestliže víte, že její délka je $\ln\bigl(2 + \sqrt{3}\bigr)$.

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru souřadných os x, y, resp. z. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ plochou $\mathcal{S}$, která je popsána parametrickými rovnicemi

$$\mathbf{x} = r\cos t\,\mathbf{i} + r\sin t\,\mathbf{j} + r^2\,\mathbf{k}\,, \qquad 0 < t < \pi\,, \quad 0 < r < 1\,,$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná.
