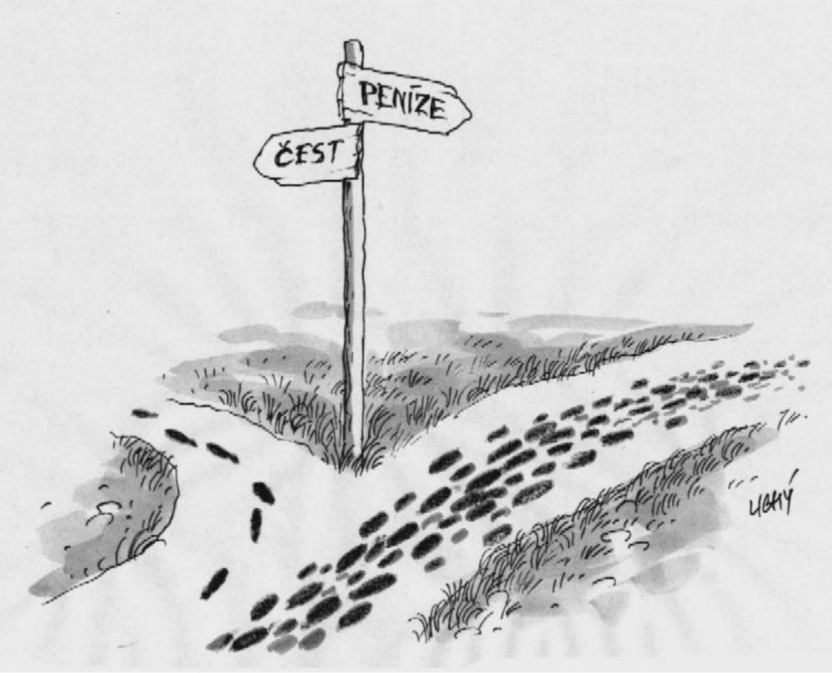
TEORIE HER

1 TEORIE ROZHODOVÁNÍ



Má-li někdo hledat strategii, jak dosáhnout nejžádanějšího výsledku, musí mít nejprve jasno v tom, co to vlastně ten nejžádanější výsledek je. To znamená, že musí být schopen jednotlivé alternativy, které připadají v úvahu, uspořádat. Požadovat přitom budeme tzv. úplné uspořádání - tj. o každých dvou alternativách je dotyčný schopen říci, zda jednu preferuje před druhou, či zda je hodnotí stejně (v tom případě řekneme, že je mezi nimi *indiferentní*).

Dále jsme při rozhodování často nuceni nějakým způsobem posoudit náhodnost. Máme letět letadlem, i když se může zřítit? Máme si koupit los, i když nemusí vyhrát? Máme uzavřít pojistku, i když ji třeba nikdy nevyužijeme? Máme si vyjet na kole, i když může pršet? Žádné zázračné řešení samozřejmě neexistuje a některá rozhodnutí budou stále velmi složitá. Nicméně trocha *pravděpodobnostního hlediska* a pár empirických pravidel mohou řadu rozhodnutí usnadnit. Při obtížnějším rozhodování pak můžeme protichůdné cíle uspořádat pomocí **funkce užitku**.

Příklad 1

Zaspal jste a teď spěcháte do práce na jednání, které má začít v 9 hodin. Je 8:50 a pěšky to do své kanceláře máte 15 minut nejrychlejší možnou chůzí. Takže přijdete o pět minut později.

Zvažujete, jaké jsou možnosti. V tuto dobu byste nikdy nejeli taxíkem. Mohli byste však jet autobusem, který by vás do práce dovezl za pět minut. Počkáte-li na zastávce a autobus do pěti minut přijede, budete v kanceláři včas. Super!

Jenže autobus je bohužel velmi nevypočitatelný. Někdy přijede hned, jindy se však neukáže třeba 20 minut. Budete-li čekat na zastávce a budete mít smůlu, můžete nakonec na jednání dorazit později o 15 místo o 5 minut. Máte to risknout? Máte čekat na autobus, když máte určitou šanci, že přijdete včas, ale také riskujete daleko větší zpoždění? Anebo máte jít raději pěšky a s jistotou přijít přesně o pět minut později?

Uvědomíte si, že jste v práci ve zkušební lhůtě a přijdete-li pozdě, váš přísný a dochvilný šéf vás určitě vyrazí. Rozhodnete se počkat na autobus, protože vaší jedinou nadějí je, že přijede rychle a vy se do práce dostanete včas. Naštěstí už na vás autobus čeká a vaše místo je zachráněno.

Ve stejný den se máte v 9 hodin večer sejít s kamarádem, abyste spolu trochu popili. Zase zjistíte, že vyrážíte pozdě, a zase se musíte rozhodnout mezi mírným, ale jistým zpožděním, které budete mít, půjdete-li pěšky, a mezi čekáním na autobus, který vás možná doveze na místo setkání včas, ale také se může hodně opozdit. Přijdete-li na skleničku o pár minut později, tak se toho moc nestane; přijdete-li však příliš pozdě, může si kamarád začít dělat starosti, nebo také může odejít. Usoudíte, že tentokrát bude lepší jít pěšky.

Rozhodování mezi chůzí a jízdou autobusem závisí na tom, jak vnímáte různé důsledky svého včasného příchodu a mírného nebo hodně velkého zpoždění. Teorie pravděpodobnosti může pracovat s pravděpodobnostmi jednotlivých výsledků, avšak k tomu, abyste se rozhodli, musíte také zvážit své hodnoty a preference. Vaše rozhodnutí nutně závisí na vašem vlastním ohodnocení toho, do jaké míry jsou jednotlivé výsledky žádoucí či nežádoucí.

Můžeme snad použít chladnou, strohou matematiku k tomu, abychom pracovali s tak subjektivními pojmy jako náklonnost či odpor? Matematika nikdy nemůže rozlišit správné od nesprávného nebo dobré od špatného. Pokud však své chápání dobrého a špatného dokážeme vyčíslit, může nám matematika při rozhodování pomoci.

Abyste své preference vyjádřili čísly, potřebujete určit svou **funkci užitku**, která bude vyjadřovat vaše osobní ohodnocení všech různých výsledků, které mohou nastat. Tato funkce bude kladná pro dobré věci (čím větší, tím lepší) a záporná pro špatné. Můžete například přiřadit ohodnocení +10 shlédnutí dobrého filmu, +20 shlédnutí hodně dobrého filmu, a +1 000 000 výhře jackpotu v loterii. Na druhé straně můžete přiřadit hodnotu 10 nakopnutí palce, 20 bolesti hlavy a 1 000 vyhazovu z práce.

Funkcemi užitku se zabývá právě **teorie her**, nauka o rozhodování, která je často využívána v ekonomii, politologii a sociologii. Tyto funkce ve čtyřicátých letech dvacátého století studoval maďarský matematik John von Neumann, jeden z prvních šesti profesorů matematiky (spolu s Albertem Einsteinem) světově proslulého ústavu Institute for Advanced Study v Princetonu v New Jersey.

Funkce užitku poskytují jednoduché a jasné pravidlo pro rozřešení obtížných rozhodování.

Příklad 2

Představte si například, že chystáte svou svatbu a přemýšlíte, kde ji uskutečnit. Výběr už jste zúžili na dvě alternativy: prvotřídní taneční sál ve městě a dřevěnou chatu v lese. Chata stojí na neuvěřitelně krásném místě u zářícího jezera, kolem jsou stromy pohupující se ve větru. Je tu však jeden problém: co když bude v den svatby pršet?

Abyste své dilema rozřešili, můžete si vytvořit funkci užitku. Bude-li svítit slunce, svatba v přírodě bude tak nádherná, že jí přiřadíte hodnotu +1000. Svatba v sále ve městě (bez ohledu na to, zda bude pršet či svítit slunce) by byla také krásná, ale přece jen o trochu méně; přiřadíte jí hodnotu užitku +800.

Ovšem svatba v chatě za deště by byla katastrofa: hosté by se choulili uvnitř, zablácené boty, děravá střecha, hádající se rodiny, a z krásného výhledu by nebylo vůbec nic. Vaše manželství by samozřejmě i přesto bylo radostné, ovšem den svatby by odpovídal velké tlusté nule neboli nulové hodnotě užitku. Na základě toho, jak se vyvíjelo počasí v minulosti, odhadnete šanci na déšť v den svatby na 25 Rozhodujete se tedy mezi spolehlivým sálem s hodnotou +800 a riskantní chatou, která vám za pěkného počasí poskytne hodnotu +1000 a za deště 0. Co máte zvolit?

Teď nastala vhodná chvíle na to, abyste začali počítat. Chata vám přinese hodnotu +1000 s pravděpodobností 75 % a hodnotu 0 s pravděpodobností 25 %. To znamená, že rozhodnete-li se pro chatu, průměrná (neboli očekávaná) hodnota vaší funkce užitku bude 75 % z +1000 plus 25 % z 0, tedy +750. Rozhodnete-li se však pro taneční sál, bude bez ohledu na počasí vaše hodnota užitku rovna +800. Protože +800 je více než +750, taneční sál je lepší volbou než chata v lese. Vaší volbou (i když možná zdrahavou) by proto mělo být zamluvení sálu. Pak bude vaše svatba úspěšná, ať už bude pršet či nikoli. (A koneckonců, chatu můžete vždycky navštívit během svatební cesty, v nějaký pěkný slunečný den.) Funkce užitku vám pomohly učinit obtížné emocionální rozhodnutí pomocí racionálních, logických úvah.

✒ *Příklad 3*

Funkce užitku jsou užitečné i tehdy, rozhodujeme-li se například o tom, zda uzavřít pojistku, či nikoli.
Zvažujete-li pojištění, měli byste se nejprve sami sebe zeptat: ”Co je z dlouhodobého hlediska pravděpodobnější? Zaplatím na poplatcích více, než kolik dostanu zpět při pojistných událostech, nebo dostanu zpět více, než zaplatím?” Dostanete-li zpět více, bude pojistka rozumnou investicí, jinak ne.

Představte si, že pojistka vaší domácnosti stojí 800 $ ročně. Po většinu let nedojde k žádným pojistným událostem a váš roční zisk z pojistky bude -800 $. Na druhé straně však kdykoli může dojít k vážné pohromě - požáru, povodni, vloupání, zřícení střechy - a vyplacené pojistné může dosáhnout mnoha tisíc dolarů. Vyváží malá pravděpodobnost získání velké částky každoročních 800 $? Odpověď na tuto otázku je těžké získat nějakým přímým výpočtem. Závisí to ostatně na takových faktorech, jako je průměrná četnost požárů či povodní, průměrný rozsah poškození při požáru či povodni a uvážení všech dalších událostí, které by také mohly vést k nároku na pojistné plnění. Tyto průměrné hodnoty navíc mohou záviset na tom, kde žijete, jaké jsou zvyky vašich sousedů a podobně. I přesto však můžete učinit kvalifikovaný odhad.

Nejdůležitější skutečností je fakt, že pojišťovny obvykle dosahují ohromných zisků. Vždyť pojišťovnictví je jedním z nejvýnosnějších odvětví. Ze zákona velkých čísel přitom víme, že jediná možnost, jak může společnost dlouhodobě vydělat, je vybrat od zákazníků v průměru více peněz, než kolik jim vyplatí. Protože pojišťovny tolik vydělávají, musí to být jednoduše proto, že zákazníci v průměru zaplatí více, než kolik dostanou zpět.

Jinými slovy, aniž byste dohledávali statistiky požárů, poškození či cen pojistného, můžete s jistotou usoudit, že v průměru je platba za pojistku mrháním peněz. V průměru zaplatíte více, než kolik dostanete zpět na pojistných plněních. Znamená to tedy, že by se nikdo neměl pojišťovat? Nikoli, neznamená; a funkce užitku nám řeknou proč.

Každoroční platba 800 $ za pojistku je vcelku mírný výdaj, kterému můžeme přiřadit zápornou hodnotu užitku řekněme -800. Nebudete-li však pojištěni a přijde vážná pohroma (jako třeba požár či povodeň), tak důsledky mohou být zničující. Jestliže vás například pohroma donutí prodat dům nebo vás finančně zcela zruinuje, může to váš život zničit daleko více, než jak to vyjadřují samotné peníze. I kdyby byla peněžní hodnota vaší ztráty ”pouhých” 100 000 $, může tím být rozvráceno vaše postavení a finanční zajištění, může se vám rozpadnout manželství, vaše děti možná budou muset opustit univerzitu; to vše vám přinese zápornou hodnotu užitku -500 000 nebo ještě horší. Zkrátka a dobře, obtíže vás mohou zasáhnout podstatně více, než kolik by odpovídalo pouhé peněžní hodnotě ztráty.

Představte si, že každý rok je šance jedna ku 200, že dojde k podobně zničující pohromě. Potom z ryze finančního hlediska zaplatíte 800 $ za pojistku a máte jednu šanci ze 200, že dostanete 100 000 $. To znamená, že v průměru zaplatíte 800 $ a obdržíte jen 500 $ (tj. 100 000 $ děleno 200), což představuje

čistou ztrátu 300 $ ročně. Váš průměrný užitek je však ve skutečnosti roven 2500 (tj. 500 000 děleno 200) za odvrácení katastrofy minus 800 za platbu pojistky, což dává kladný výsledek +1700.
Z tohoto pohledu může někdy pojistka představovat situaci, kdy vyhrávají obě strany: pojišťovna v průměru vydělá peníze a klient získá užitek. To je však možné jen tehdy, když se jedná o pojištění proti katastrofálním ztrátám, jejichž hodnotu klient chápe jako daleko vyšší, než kolik činí příslušné pojistné plnění.
Pro ztráty, které nejsou tak zničující, je v průměru vždy lepší, ”pojistit se sám” tím, že pojistku neuzavřete a ztráty zaplatíte z vlastní kapsy. Občas přijdete o dost peněz, v průměru však na platbách pojistného ušetříte daleko více, než kolik případně zaplatíte za nápravy škod, k nimž dojde. Výdělek pojišťovny si zkrátka celý můžete nechat pro sebe.

Abychom byli schopni rozhodovací situace modelovat pomocí matematických modelů, zavedeme si nyní několik základních pojmů.

ZÁKLADNÍ POJMY

$X \neq \emptyset$ ... **množina všech potenciálně možných výsledků dosažitelných strategickým chováním**

$\succsim$ ... **úplné uspořádání na X**

$\mathfrak{D} \neq \emptyset$ ... **množina možných rozhodnutí, alternativ**

$\rho : \mathfrak{D} \rightarrow X$ ... **výsledková funkce: každému rozhodnutí d přiřazuje nějakou matematickou strukturu $\rho(d)$ na množině X (rozhodnutí d „vede“ k nějakému výsledku nebo ke kombinaci výsledků)**

Rozhodování = akt výběru jednoho prvku $d \in \mathfrak{D}$

Rozhodovatel (účastník rozhodovací situace)

= subjekt, který vykonává tento výběr

Rozhodovatel (účastník rozhodovací situace)

= subjekt, který vykonává tento výběr

- **Racionální (inteligentní) rozhodovatel:** jeho rozhodování je uvědomělé, zaměřené k určitému cíli, využívá všech objektivně dostupných informací o důsledních voleb jednotlivých alternativ
- **Neracionální (neinteligentní, indiferentní) rozhodovatel:** lhostejný k důsledkům rozhodování; např. působení prostředí (”svět”, ”příroda”); alternativy volby neinteligentního rozhodovatele se obvykle nazývají **stavy**
- **p-inteligentní rozhodovatel:** s pravděpodobností p se chová jako inteligentní rozhodovatel, s pravděpodobností $1 - p$ jako neinteligentní

KLASIFIKACE ROZHODOVACÍCH SITUACÍ

Podle počtu charakteristik

- **Monokriteriální rozhodování:** výsledky jsou subjektem hodnoceny na základě jedné charakteristiky (kritéria)
- **Vícekriteriální rozhodování:** výsledky jsou subjektem hodnoceny podle více charakteristik (kritérií)

Podle počtu rozhodovatelů

- **Rozhodování s jediným racionálním účastníkem**
- **Rozhodování, jehož výsledek je ovlivněn alespoň dvěma racionálními účastníky = HRA**

INDIVIDUÁLNÍ ROZHODOVÁNÍ

Rozhodování za jistoty

Řekneme, že rozhodování probíhá **za jistoty**, jestliže pro každé $d \in \mathfrak{D}$ platí:

$$\rho(d) = x \in X,$$

tj. každá z alternativ (možné jednání) $d \in \mathfrak{D}$ vede ke známému, jednoznačně danému důsledku $x \in X$.

Matematické nástroje:

- diferenciální počet (extrémy)
- lineární a kvadratické programování
- variační počet
- **...**

Rozhodování za rizika

Řekneme, že rozhodování probíhá **za rizika**, jestliže výsledková funkce ρ přiřazuje každému rozhodnutí $d \in \mathfrak{D}$ nějaké **rozložení pravděpodobností** P_d **na množině výsledků** X, tj.

$$\rho(d) = P_d.$$

Jinými slovy, každé rozhodnutí vede k nějakému prvku z jisté množiny výsledků, přičemž jsou známy pravděpodobnostmi, s nimiž jednotlivé důsledky nastanou.

Poznámka. Jistota je degenerovaný případ rizika s prav. 0 a 1.

☞ ***Příklad 4***. Rozhodovatel volí mezi dvěma alternativami:

1. Obdrží 500 tis. Kč
2. S pravděpodobností 1/3 obdrží 300 tis. Kč, s pravděpodobností 2/3 obdrží 600 tis. Kč

✒ ***Příklad 5***. Uvažujme hru, jejíž účastník s pravděpodobností $1/3$ vyhraje 300 Kč a s pravděpodobností $2/3$ prohraje 90 Kč, anebo se za určitý obnos vzdá účasti ve hře.

✒ ***Příklad 6***. Obecněji, uvažujme hru s n možnými výsledky, jejichž hodnoty jsou po řadě $a_1, a_2, \ldots a_n$ Kč. Předpokládejme, že je známo, že jednotlivé výsledky nastávají s pravděpodobnostm $p_1, p_2, \ldots, p_n$, přičemž pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ je $p_i \in [0, 1]$, $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.. Při jaké nabídce se vyplatí od hry odstoupit?

Peněžní očekávaná hodnota: $b = a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n$.

Rozhodování za neurčitosti

Řekneme, že rozhodování probíhá **za neurčitosti**, jestliže výsledková funkce ρ přiřazuje každému rozhodnutí $d \in \mathfrak{D}$ nějakou **množinu výsledků** $X_d \subseteq X$**,** tj.

$$\rho(d) = P_d \subseteq X.$$

Jinými slovy, každé rozhodnutí vede k nějakému prvek z jisté množiny důsledků, přičemž pravděpodobnostmi, s nimiž jednotlivé důsledky nastanou, nejsou známé (či ani nemají smysl).

ROZHODOVÁNÍ ZA RIZIKA – LOTERIE

HISTORIE: POČÁTKY TEORIE UŽITKU

Daniel Bernoulli (1700 – 1782)

Výklad nové teorie ohodnocení risku

(Petrohrad 1725 – 1733, publ. 1838)

Risk by neměl být hodnocen podle střední hodnoty finančního zisku, ale spíše podle **střední hodnoty užitku**, který tento zisk přinese.

Ilustrační příklad: *Velmi chudý člověk nějakým způsobem získá los, který se stejnou pravděpodobností přinese výhru dvaceti tisíc dukátů nebo nic. Ocení tento muž svou šanci na vítězství na deset tisíc dukátů? Neprodá neuváženě tento los za devět tisíc dukátů? Mně osobně se zdá, že odpověď je záporná. Na druhou stranu mám sklon věřit, že bohatý muž koupi tohoto losu za devět tisíc dukátů neuváženě odmítne. Pokud se nemýlým, pak je jasné, že při hodnocení hry nemohou všichni lidé používat stejné pravidlo. . . . Není pochyb, že zisk tisíce dukátů je mnohem významnější pro žebráka než pro bohatého člověka, i když oba získají stejnou částku.*

Funkce užitku $u(x)$

… počet jednotek užitku z vlastnictví peněžní částky x

Předpoklad:

při zvětšení částky x na $x + dx$ je přírůstek užitku $du(x)$ přímo úměrný přírůstku dx a nepřímo úměrný částce x :

$$
\begin{aligned}
du(x) &= \frac{b\,dx}{x} && b > 0 \quad \text{(konstanta úměrnosti)} \\
u(x) &= b \ln x + c && c \in \mathbb{R} \\
&= b \ln x - b \ln \alpha && \alpha \in (0, +\infty) \\
u(x) &= b \ln \frac{x}{\alpha} && \alpha \text{ – hodnota počátečního majetku}
\end{aligned}
$$

Využití: objasnění *Petrohradského paradoxu*

Petrohradský paradox

Petr hází mincí a pokračuje v tom tak dlouho, dokud nepadne „hlava“. Souhlasí s tím, že dá Pavlovi jeden dukát, padne-li hlava v prvním hodu, dva dukáty, padne-li v druhém, čtyři, padne-li ve třetím, osm, padne-li ve čtvrtém, a tak dále, takže s každým dalším hodem se počet dukátů, které musí zaplatit, zdvojnásobí. Předpokládejme, že se snažíme určit hodnotu Pavlova očekávání . . . Rozumný člověk by s velkým potěšením prodal svou účast ve hře za dvacet dukátů.

Střední hodnota výhry:

$$\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+2^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{2}+\cdots=\infty$$

Paradox:

očekávaná hodnota výhry je nekonečná, člověk dá přednost poměrně skromné částce

Bernoulli: střední hodnota užitku, který výhra přinese:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} b \ln \frac{\alpha + 2^{n-1}}{\alpha} =$$

$$= b \ln[(\alpha+1)^{\frac{1}{2}}(\alpha+2)^{\frac{1}{4}} \cdots (\alpha+2^{n-1})^{\frac{1}{2^n}} \cdots] - b \ln \alpha$$

Částka D, jejíž přidání k počátečnímu majetku přinese stejný užitek:

$$b \ln \frac{\alpha + D}{\alpha} = b \ln[(\alpha+1)^{\frac{1}{2}}(\alpha+2)^{\frac{1}{4}} \cdots (\alpha+2^{n-1})^{\frac{1}{2^n}} \cdots] - b \ln \alpha$$

$$D = [(\alpha+1)^{\frac{1}{2}}(\alpha+2)^{\frac{1}{4}} \cdots (\alpha+2^{n-1})^{\frac{1}{2^n}} \cdots] - \alpha$$

Pro nulové počáteční jmění:

$$D = \sqrt[2]{1} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{4} \cdot \sqrt[16]{8} \cdots = 2$$

Nedostatky Bernoulliho funkce užitku:

- Je definována jen pro kladné hodnoty částky x, zatímco ve skutečnosti se často jedná i o ztráty
- U různých lidí je funkce užitku z peněžních částech různá a neodvíjí se jen z majetkových poměrů

Důležitý podnět, od něhož se mohl odrazit další vývoj
Podobné – avšak nezávislé – úvahy
(Bernoulli cituje v závěru svého pojednání):

Gabriel Cramer (1704 – 1752)

Dopis Mikuláši Bernoullimu z roku 1728

Myšlenka: lidé hodnotí finanční částky podle užitku, který jim přinesou

Předpoklad: jakákoli částka převyšující 2^{24} dukátů člověku připadá stejná jako 2^{24}.

Očekávaná hodnota zisku:

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 4+\cdots+\frac{1}{2^{24}}\cdot 2^{24}+\frac{1}{2^{25}}\cdot 2^{24}+\frac{1}{2^{26}}\cdot 2^{24}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=12+1=13\,.$$

Mé morální očekávání je proto redukováno na hodnotu 13 dukátů a ekvivalentní částka, která mi má být vyplacena, je redukována podobně – to je výsledek, který se zdá být mnohem rozumnější než uvažování této částky rovné nekonečnu.

Daniel Bernoulli
(1700 – 1782)

Gabriel Cramer
(1704 – 1752)

✒ ***Příklad 7***. Rozhodovatel volí mezi dvěma alternativami:

1. Obdrží 500 tis. Kč
2. S pravděpodobností 1/3 obdrží 300 tis. Kč,
   s pravděpodobností 2/3 obdrží 600 tis. Kč

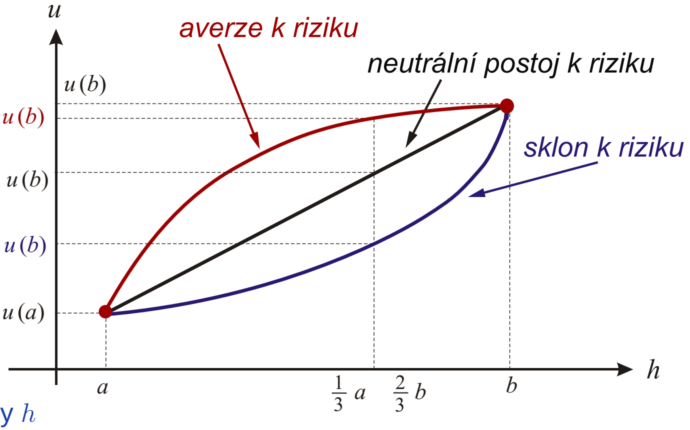
Očekávané hodnoty: $\pi_1 = 500,\ \pi_2 = \frac{1}{3} \cdot 300 + \frac{2}{3} \cdot 600 = 500$

Rozhodnutí závisí
na postoji k riziku:

$u\left(\frac{1}{3}\,a \quad \frac{2}{3}\,b\right) > \frac{1}{3}\,u(a) \quad \frac{2}{3}\,u(b)$

$u\left(\frac{1}{3}\,a \quad \frac{2}{3}\,b\right) = \frac{1}{3}\,u(a) \quad \frac{2}{3}\,u(b)$

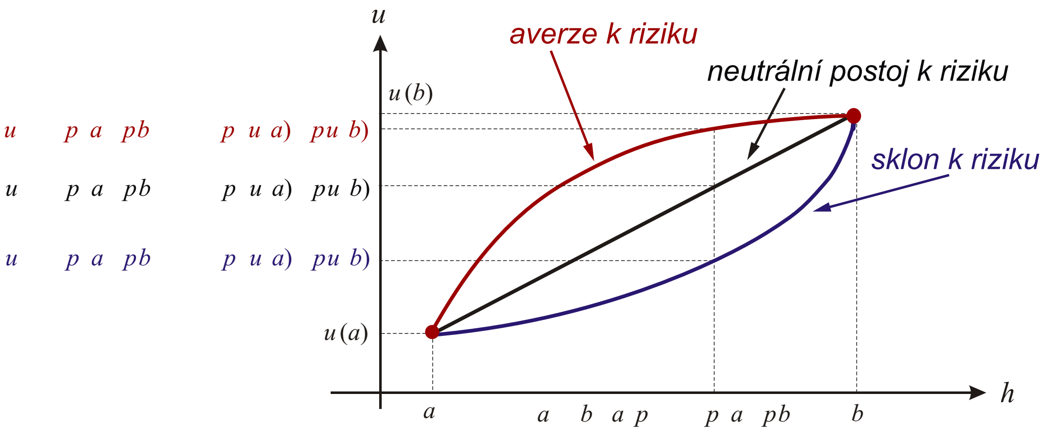
$u\left(\frac{1}{3}\,a \quad \frac{2}{3}\,b\right) < \frac{1}{3}\,u(a) \quad \frac{2}{3}\,u(b)$



$u(h)\ldots$ užitek z peněžní částky h

Vyjádření postoje k riziku pomocí funkce užitku

$u(h)$ . . . užitek z peněžní částky h



☛ ***Příklad 8***. Investor volí mezi třemi alternativami:

1. Zakoupit cenné papíry, které s jistotou přinesou roční úrok 5,5%
2. Zakoupit akcie, které přinesou roční úrok

   3% s pravděpodobností $\frac{1}{3}$

   6% s pravděpodobností $\frac{1}{3}$

   9% s pravděpodobností $\frac{1}{3}$

3. Zakoupit akcie, které přinesou roční úrok

   4% s pravděpodobností $\frac{1}{2}$

   8% s pravděpodobností $\frac{1}{2}$

⇝ **Rozhodování mezi loteriemi**

AXIOMATICKÁ TEORIE UŽITKU

$\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ – množina základních alternativ, cen

Loterie: $L = (p_1 A_1, p_2 A_2, \ldots, p_r A_r)$

– náhodný mechanismus, který s pravděpodobností p_i vybírá cenu A_i ; pravděpodobnosti p_i jsou známé,

$$p_i \geq 0; \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1\,.$$

$\mathfrak{L}$ – množina všech loterií s cenami z množiny $\mathfrak{A}$

Rozhodování mezi loteriemi
$L = (p_1 A_1, p_2 A_2, \ldots, p_r A_r)$ **a** $L' = (p'_1 A_1, p'_2 A_2, \ldots, p'_r A_r)$

Preferuje-li rozhodovatel pokus odpovídající loterii L před pokusem odpovídajícím loterii L', pak řekneme, že **loterie L je preferována před loterií L'**

Podmínka 1 (uspořádání alternativ). Na množině základních alternativ je definováno úplné neostré uspořádání **”preference nebo indiference”**, ozn. $A_i \succsim A_j$.

Pro každé $A_i, A_j \in \mathfrak{A}$ tedy platí: $A_i \succsim A_j$ nebo $A_j \succsim A_i$;

je-li $A_i \succsim A_j$ a $A_j \succsim A_k$, pak $A_i \succsim A_k$.

Jestliže platí $A_i \succsim A_j$, ale nikoli $A_j \succsim A_i$, pak píšeme $A_i \succ A_j$

Jestliže platí $A_i \succsim A_j$ a zároveň $A_j \succsim A_i$, pak píšeme $A_i \sim A_j$

Označení:

A_1 – nejpreferovanější, A_r – nejméně preferovaná alternativa

$\rightsquigarrow$ rozšíření uspořádání množiny $\mathfrak{A}$ na množinu loterií $\mathfrak{L}$

☛ ***Příklad 9***. Uvažujme následující loterie:

L =

EUR 5	EUR -2
2/3	1/3

M =

EUR 5	EUR 15	EUR -2
1/3	1/6	1/2

☛ ***Příklad 10***. Uvažujme následující loterie:

L =

EUR 5	EUR -2
2/3	1/3

M =

EUR 5	EUR 15	EUR -2
1/3	1/6	1/2

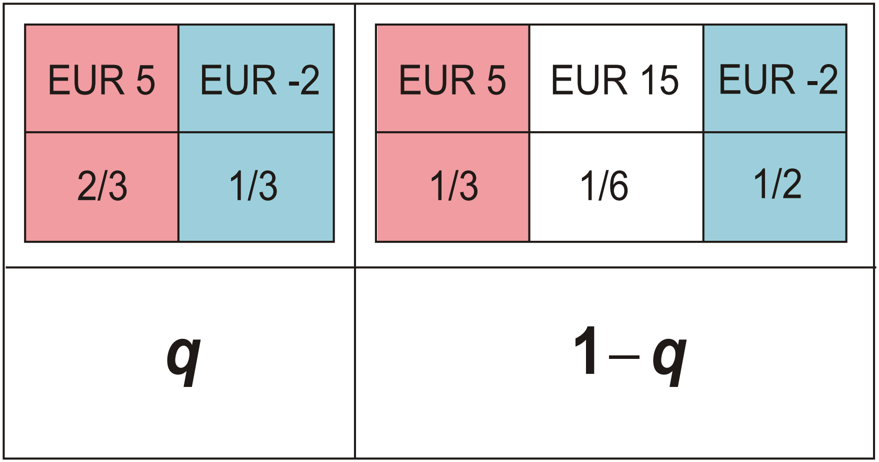
Očekávání:

$$E(L) = 5 \cdot \frac{2}{3} + (-2) \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$E(M) = 5 \cdot \frac{1}{3} + 15 \cdot \frac{1}{6} + (-2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{19}{6}$$

***Příklad 11*.**

Složená loterie – cenami jsou opět loterie:



<table>
<tr>
<td><table><tr><td>EUR 5</td><td>EUR -2</td></tr><tr><td>2/3</td><td>1/3</td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>EUR 5</td><td>EUR 15</td><td>EUR -2</td></tr><tr><td>1/3</td><td>1/6</td><td>1/2</td></tr></table></td>
</tr>
<tr>
<td>q</td>
<td>$1-q$</td>
</tr>
</table>

✒ ***Příklad 12***. Složená loterie:

EUR5	EUR 15	EUR -2	EUR5	EUR 15	EUR -2
2/3	0	1/3	1/3	1/6	1/2
q			$1-q$		

☜ ***Příklad 13***. Složená loterie:

<table>
<tr><td><i>L</i></td><td><i>M</i></td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>EUR5</td><td>EUR 15</td><td>EUR -2</td></tr>
<tr><td>2/3</td><td>0</td><td>1/3</td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><td>EUR5</td><td>EUR 15</td><td>EUR -2</td></tr>
<tr><td>1/3</td><td>1/6</td><td>1/2</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>q</td><td>$1-q$</td></tr>
</table>

$=$

EUR5	EUR 15	EUR -2
p_1	p_2	p_3

$= qL + (1-q)M$

☞ ***Příklad 14***. Složená loterie:

<table>
<tr><th><i>L</i></th><th><i>M</i></th></tr>
<tr><td><table><tr><td>EUR5</td><td>EUR 15</td><td>EUR -2</td></tr><tr><td>2/3</td><td>0</td><td>1/3</td></tr></table></td><td><table><tr><td>EUR5</td><td>EUR 15</td><td>EUR -2</td></tr><tr><td>1/3</td><td>1/6</td><td>1/2</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>q</td><td>$1-q$</td></tr>
</table>

$=$

EUR5	EUR 15	EUR -2
p_1	p_2	p_3

$= qL+(1-q)M$

$$p_1 = q \cdot \frac{2}{3} + (1-q) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}q + \frac{1}{3}$$

☞ ***Příklad 15***. Složená loterie:

<table>
<tr><th>L</th><th>M</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>EUR5</td><td>EUR 15</td><td>EUR -2</td></tr>
<tr><td>2/3</td><td>0</td><td>1/3</td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><td>EUR5</td><td>EUR 15</td><td>EUR -2</td></tr>
<tr><td>1/3</td><td>1/6</td><td>1/2</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>q</td><td>1−q</td></tr>
</table>

=

EUR5	EUR 15	EUR -2
p_1	p_2	p_3

$= qL+(1-q)M$

$$p_1 = q \cdot \frac{2}{3} + (1-q) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}q$$

$$p_2 = q \cdot 0 + (1-q) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}q$$

$$p_3 = q \cdot \frac{1}{3} + (1-q) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}q$$

$L^{(1)}, L^{(2)}, \ldots, L^{(s)}$ ... loterie s cenami $A_1, A_2, \ldots, A_r$

Složená loterie: $\left(q_1 L^{(1)}, q_2 L^{(2)}, \ldots, q_s L^{(s)}\right), \ L^{(i)} \in \mathfrak{L}$

$$q_i \geq 0, \quad q_1 + q_2 + \cdots + q_s = 1 \, .$$

$L^{(1)}, L^{(2)}, \ldots, L^{(s)}$ ... loterie s cenami $A_1, A_2, \ldots, A_r$

Složená loterie: $\left(q_1 L^{(1)}, q_2 L^{(2)}, \ldots, q_s L^{(s)}\right),\ L^{(i)} \in \mathfrak{L}$

$$q_i \geq 0, \quad q_1 + q_2 + \cdots + q_s = 1\,.$$

Podmínka 2 (redukce složených loterií).

Libovolná složená loterie $\left(q_1 L^{(1)}, q_2 L^{(2)}, \ldots, q_s L^{(s)}\right)$, kde

$$L^{(i)} = \left(p_1^{(i)} A_1, p_2^{(i)} A_2, \ldots, p_r^{(i)} A_r\right), \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

je indiferentní s jednoduchou loterií

$$(p_1 A_1, p_2 A_2, \ldots, p_r A_r), \quad \text{kde}$$

$$p_i = q_1 p_i^{(1)} + q_2 p_i^{(2)} + \cdots + q_s p_i^{(s)}, \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Podmínka 3 (spojitost).

Každá cena A_i je indiferentní s nějakou loterií zahrnující pouze A_1 a A_r. Tj. existuje takové $u_i \in \langle 0, 1\rangle$, že A_i je indiferentní s loterií

$$(u_i A_1, 0A_2, \ldots, 0A_{r-1}, (1 - u_i)A_r)\,.$$

Pro jednoduchost budeme psát:

$$A_i \sim (u_i A_1,\ (1 - u_i)A_r) = \tilde{A}_i.$$

$A_1 \succ A_i \succ A_r$

Pro p blízké 1 ... loterie $(pA_1, (1 - p)A_r)$ je preferována před A_i

Pro p blízké 0 ... A_i je preferováno před loterií $(pA_1, (1 - p)A_r)$

Podmínka 4 (záměnnost).

V libovolné loterii L lze zaměnit $\tilde{A}_i$ za A_i , tj.

$$(p_1 A_1, \dots, p_i A_i, \dots, p_r A_r) \sim (p_1 A_1, \dots, p_i \tilde{A}_i, \dots, p_r A_r).$$

Podmínka 5 (tranzitivita).

Relace preference a indiference na množině loterií $\mathfrak{L}$ jsou tranzitivní.

Podmínka 6 (monotonie).

$$(pA_1, (1-p)A_r) \succsim (p'A_1, (1-p')A_r) \Leftrightarrow p \geq p'.$$

Podmínka 1 – 5:

$$(p_1A_1, p_2A_2, \ldots, p_rA_r) \sim \left(p_1\tilde{A}_1, p_2\tilde{A}_2, \ldots, p_r\tilde{A}_r\right)$$

Podmínka 2 (redukce složených loterií):

$$(p_1A_1, p_2A_2, \ldots, p_rA_r) \sim (pA_1, (1-p)A_r)\,,$$

kde $p = p_1u_1 + p_2u_2 + \cdots + p_ru_r$

Pro libovolné dvě loterie pak pomocí podm. 6 rozhodneme o preferenci.

Věta 1. *Splňuje-li relace $\succsim$ podmínky 1–6, pak existují taková reálná čísla u_i, že pro každou dvojici loterií*

$$L = (p_1A_1, p_2A_2, \ldots, p_rA_r), \quad L' = (p'_1A_1, p'_2A_2, \ldots, p'_rA_r)$$

platí:

$$L \succsim L' \Leftrightarrow (p_1u_1 + \cdots + p_ru_r \geq p'_1u_1 + \cdots + p'_ru_r)\,.$$

Definice 1. Zavede-li určitá osoba na množině loterií úplné uspořádání $\succsim$ preferencí a je-li každé loterii L přiřazeno reálné číslo $u(L)$ odrážející tyto preference, tj. pro každou dvojici loterií $L, L' \in \mathfrak{L}$ je

$$L \succsim L' \Leftrightarrow u(L) \geq u(L')$$

pak řekneme, že na množině loterií $\mathfrak{L}$ existuje **funkce užitku** u**.**

Má-li navíc funkce užitku tu vlastnost, že

$$u\left(qL, (1-q)L'\right) = qu(L) + (1-q)u(L')$$

pro všechny loterie L, L' a každé $q \in \langle 0, 1\rangle$, pak řekneme, že funkce užitku je **lineární.**

Jsou-li splněny podmínky 1–6, lze sestrojit lineární funkci užitku následujícím předpisem:

$$u(A_1) = 1$$

$$u(A_i) = u_i \quad \text{pro} \;\; 1 < i < r \quad \text{(podle podmínky 3)}$$

$$u(A_r) = 0$$

$$u(p_1 A_1\,, p_2 A_2\,, \ldots, p_r A_r) = p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots + p_r u_r$$

Je-li u funkce užitku na $\mathfrak{L}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, pak funkce u', kde

$$u'(L) = au(L) + b \quad \text{pro každou loterii } L \in \mathfrak{L},$$

je rovněž funkcí užitku.

Naopak, pro každé dvě funkce užitku u, u^* na $\mathfrak{L}$ existují taková čísla $a^*, b^* \in \mathbb{R}$, $a^* > 0$, že pro všechny loterie $L \in \mathfrak{L}$ platí:

$$u^*(L) = a^* u(L) + b^*.$$

ROZHODOVÁNÍ ZA NEURČITOSTI

Uvažujme rozhodovací situaci s konečnou množinou možných rozhodnutí (strategií) $\mathfrak{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}$ a s konečnou množinou „stavů světa“ $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$. Pro každou alternativu a každý stav světa nechť je znám užitek rozhodovatele:

	Stav světa			
Rozhodnutí	S_1	S_2	$\dots$	S_n
D_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
D_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	....			
D_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

Víme, že jistě nastane jeden ze stavů z množiny $\mathfrak{S}$, není nám však známo ani to, s jakou pravděpodobností jednotlivé stavy mohou nastat.

ROZHODOVÁNÍ ZA NEURČITOSTI

Laplacův princip

Laplacův princip navrhuje zvolit takovou strategii, která by byla optimální v případě, že by pravděpodobnosti, s nimiž nastanou různé stavy světa, byly shodné, tj. jako kdyby se jednalo o rozhodování za rizika se stejnými pravděpodobnostmi přiřazenými jednotlivým stavům.

V našem případě, tj. pro matici užitků $A = (a_{ij})$, je podle Laplaceova principu optimální strategií volba takového řádku i, pro který je

$$\frac{a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}}{n} \quad \text{maximální.}$$

Výsledkem rozhodování je tedy řádek i^*, pro který platí:

$$i^* = \arg\max_i \frac{a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}}{n}$$

Maximinní (pesimistické) kritérium

Tento princip navrhuje pro jednotlivé možné strategie stanovit nejnižší hodnoty užitku a zvolit takovou strategii, pro kterou je toto minimum maximální. Rozhodovatel tedy předpokládá, že se jej okolní svět bude „snažit“ co nejvíce poškodit.

V našem případě, tj. pro matici užitků $A = (a_{ij})$, je podle pesimistického principu optimální strategií volba takového řádku i, pro který je

$$\min_j a_{ij}$$

maximální.

Výsledkem rozhodování je tedy řádek i^*, pro který platí:

$$i^* = \arg\max_i \min_j a_{ij}$$

Maximaxní (optimistické) kritérium

Tento princip navrhuje pro jednotlivé možné strategie stanovit nejvyšší hodnoty užitku a zvolit takovou strategii, pro kterou je toto maximum maximální. Rozhodovatel tedy předpokládá, že se mu okolní svět bude „snažit“ co nejvíce pomoci.

V našem případě, tj. pro matici užitků $A = (a_{ij})$, je podle optimistického principu optimální strategií volba takového řádku i, pro který je

$$\max_j a_{ij}$$

maximální.

Výsledkem rozhodování je tedy řádek i^*, pro který platí:

$$i^* = \arg\max_i \max_j a_{ij}$$

Hurwitzovo kritérium

Hurwitzovo kritérium je konvexní kombinací optimistického a pesimistického kritéria. Vhodná volba parametru α umožní nastavit vhodný kompromis mezi oběma krajnostmi – často nepřijatelně důvěřivým, resp. nepřijatelně opatrným kritériem.

V našem případě, tj. pro matici užitků $A = (a_{ij})$, je výsledkem rozhodování řádek i^*, pro který platí:

$$i^* = \arg\max_i(\alpha \max_j a_{ij} + (1-\alpha)\min_j a_{ij}) =$$

$$= \arg(\alpha \max_i \max_j a_{ij} + (1-\alpha)\max_i \min_j a_{ij}),$$

kde parametr α vyjadřuje míru optimismu

$\alpha = 0 \ldots$ pesimistické (maximinní kritérium)

$\alpha = 1 \ldots$ optimistické (maximaxní kritérium)

Princip minimaxní lítosti (ztráty příležitosti)

Tento princip je založen na pozorování, že v mnoha situacích je rozhodnutí posuzováno zpětně, ex post, aniž se skutečně připustí, že v okamžiku rozhodování neměl dotyčný k dispozici informace, které má až při tomto zpětném posuzování. Princip maximinní lítosti rozhodovatele uchrání od ”dodatečné lítosti”. V případě maticové hry s neinteligentním protivníkem a s maticí $A = (a_{ij})$ je postup následující: Od každého prvku v matici odečteme maximální prvek v daném sloupci, tento rozdíl pak uvažujeme s opačným znaménkem (ve shodě s intuitivním pohledem, že ”malá lítost je lepší než velká”). Optimálním rozhodnutím je volba takového řádku, pro který je

$$\max_j \left[(\max_k a_{kj} - a_{ij}) \right]$$

minimální.

☛ ***Příklad 16***. Chemical Products Ltd. zvažuje kontrakt na výrobu sad pro testování HIV. Může podepsat kontrakt na výrobu 2 000, 3 000, 4 000 nebo 5 000 testovacích sad, nebo se obchodu nemusí zúčastnit vůbec. Výrobní náklady jsou pro jednotlivá množství po řadě 20 000 EUR, 25 000 EUR, 30 000 EUR a 35 000 EUR.
Předtím, než se sady odešlou do nemocnic, musejí projít náhodným destruktivním testem. Jestliže se test zjistí, že chybné výsledky dává méně než 2% sad, bude cena za jednu sadu 20 EUR. Je-li podíl vadných sad v rozmezí 2% až 4%, bude cena 10 EUR. Je-li podíl vadných sad vyšší než 4%, cena za jednu sadu budou 2 EUR.

Firma nikdy předtím podobné sady nevyráběla, takže nedokáže předem odhadnout, jaká část výrobků bude vadná. Jakou má zvolit strategii?

Situaci lze znázornit pomocí matice, jejíž prvky představují zisk firmy v tisících EUR:

	Vadných		
Počet sad	Méně než 2%	2 – 4%	Více než 4%
0	0	0	0
2 000	20	0	-16
3 000	35	5	-19
4 000	50	10	-22
5 000	65	15	-25

Situaci lze znázornit pomocí matice, jejíž prvky představují zisk firmy v tisících EUR:

		Vadných		
Počet sad	Méně než 2%	2 – 4%	Více než 4%	Střední hod.
0	0	0	0	**0**
2 000	20	0	-16	**4/3**
3 000	35	5	-19	**7**
4 000	50	10	-22	**38/3**
5 000	65	15	-25	**55/3**

Laplacův princip: hledáme maximum z řádkových středních hodnot, tj. $\max\{0,\ 4/3,\ 7,\ 38/3,\ 55/3\} = 55/3$.

Nejlepší rozhodnutí je proto vyrábět 5 000 testovacích sad.

Maximinní princip: nalezneme maximum z nejmenších zisků v jednotlivých řádcích:

	Vadných			
Počet sad	Méně než 2%	2 – 4%	Více než 4%	Minimum
0	0	0	0	**0**
2 000	20	0	-16	**-16**
3 000	35	5	-19	**-19**
4 000	50	10	-22	**-22**
5 000	65	15	-25	**-25**

$$\max\{0,\ -16,\ -19,\ -22,\ -25\} = 0$$

Nejlepším rozhodnutím je tedy nevyrábět vůbec nic.

Maximaxní princip: nalezneme maximum z nejmenších zisků v jednotlivých řádcích:

	Vadných			
Počet sad	Méně než 2%	2 – 4%	Více než 4%	Maximum
0	0	0	0	**0**
2 000	20	0	-16	**20**
3 000	35	5	-19	**35**
4 000	50	10	-22	**50**
5 000	65	15	-25	**65**

$$\max\{0,\ 20,\ 35,\ 50,\ 65\} = 65$$

Nejlepším rozhodnutím je vyrábět co nejvíce sad.

Princip minimaxní lítosti: v každém sloupec nalezneme maximum ("kdybychom bývali věděli, že bude vadných sad daná část, bylo by bývalo nejlepší zvolit řádek, v němž leží toto maximum):

Matice "lítostí": $(\max_k a_{kj} - a_{ij})$

	Vadných		
Počet	$<$ 2%	2 – 4%	$>$ 4%
0	0	0	**0**
2 000	20	0	-16
3 000	35	5	-19
4 000	50	10	-22
5 000	**65**	**15**	-25

			max
65	15	0	**65**
45	15	16	**45**
30	10	19	**30**
15	5	22	**22**
0	0	25	**25**

$$\min\{65,\ 45,\ 30,\ 22,\ 25\} = 22$$

Nejmenší lítost lze očekávat při výrobě 4 000 testovacích sad.

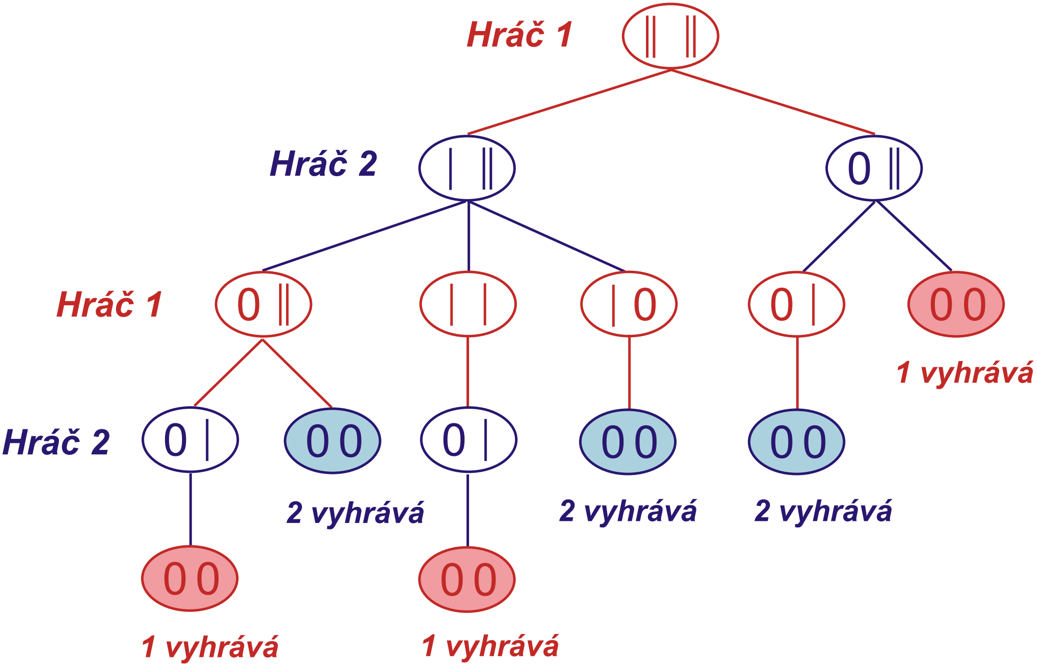
2 HRA V EXPLICITNÍM TVARU

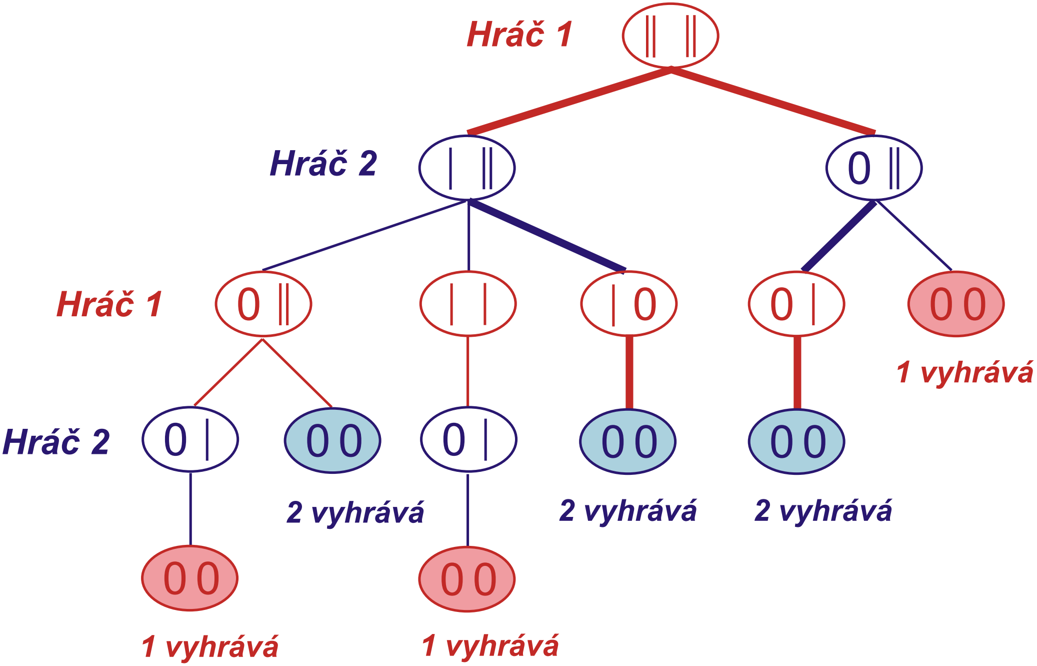
Příklad 1 – Hra Nim.

Uvažujme jednoduchou hru, kdy dva hráči – označme je čísly 1, 2 – mají před sebou dvě hromádky, z nichž každá je tvořena dvěma fazolemi. Hráč 1 musí vzít z jedné hromádky jednu nebo dvě fazole, fazole se nevracejí zpět. Potom je na řadě hráč 2, který také musí vzít z jedné hromádky jednu nebo dvě fazole. Takto se hráči střídají, až jeden z nich vezme poslední fazoli – a ten prohrává.

Pokud byste si mohli vybrat, zda budete začínat, či budete-li hráčem 2, pro co byste se rozhodli?

Všechny možné situace, které ve hře mohou nastat, lze znázornit pomocí **stromu hry:**





Ze stromu hry je patrné, že ať zvolí první hráč jakoukoli strategii, druhý může zvolit takovou strategii, která jej dovede k vítězství.

HRA V EXPLICITNÍM TVARU

Matematický model rozhodovací situace, v níž rozhodnutí jednotlivých hráčů probíhá ve formě postupně prováděných tahů (etap)

Strom hry . . . zachycuje všechny situace, které ve hře mohou nastat. Každé situaci odpovídá jeden **uzel**, z každého uzlu vychází určitý počet **hran** odpovídajících možným rozhodnutím, tzv. **tahům** daného hráče. Jestliže se hráč, který je na řadě, rozhodne pro nějaký tah, navodí novou situaci, v níž se rozhoduje druhý hráč – této nové situaci opět odpovídá jistý uzel stromu spojený s předchozím hranou. Při znázorňování se většinou postupuje ve směru shora dolů (popř. zleva doprava) a pravidelně se střídají uzly, v nichž se rozhoduje první hráč, a uzly, v nichž se rozhoduje druhý hráč.

Hra = soubor pravidel

Partie hry = jedna realizace hry

Právě jeden uzel má tu vlastnost, že do něj nevchází žádná hrana; takový uzel se nazývá **počáteční uzel** nebo také **kořen** stromu. Dále jsou zde uzly, z nichž žádná hrana nevychází; tyto uzly se nazývají **koncové** a odpovídají pozicím, kdy je rozhodnuto o výsledku a hra končí.

☛ ***Příklad 2*** – Hra Nim – obměna

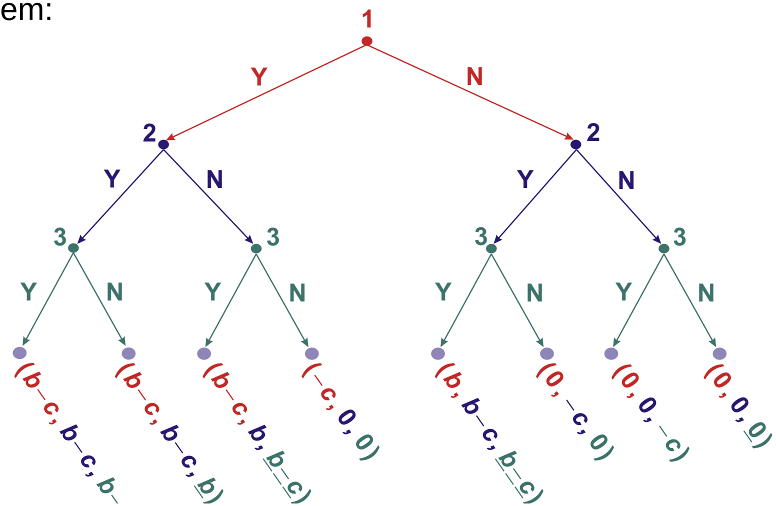
Ve hře Nim místo dvou hromádek uvažujme tři hromádky po dvou fazolích, pravidla jsou jinak stejná. Který hráč má nyní zaručenou výhru?

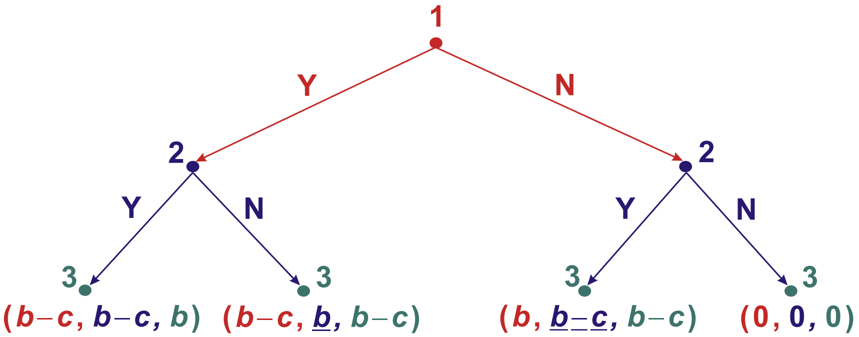
Řešení. Návod: První hráč může na začátku odebrat jednu hromádku a tím postavil protihráče do pozice hráče č. 1 v předchozí variantě se dvěma hromádkami.

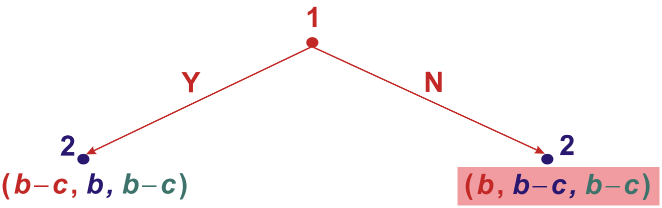
Příklad 3 – Hlasování o platech

Tři zákonodárci hlasují o tom, zda mají zvýšit své platy. Všichni tři si zvýšení přejí, zároveň však každého z nich v případě hlasování ”pro” čeká ztráta u voličů v hodnotě c. Prospěch ze zvýšení b převyšuje ztrátu c, $b > c$. Hlasují-li postupně a otevřeně, je lepší volit jako první nebo jako poslední? Kdo volí jako poslední, vidí, jaká je situace a může případně rozhodnout o tom, zda zvýšení projde či nikoli. Je to tedy nejvýhodnější?

Řešení. Návod: Situaci si můžeme znázornit následujícím obrázkem:







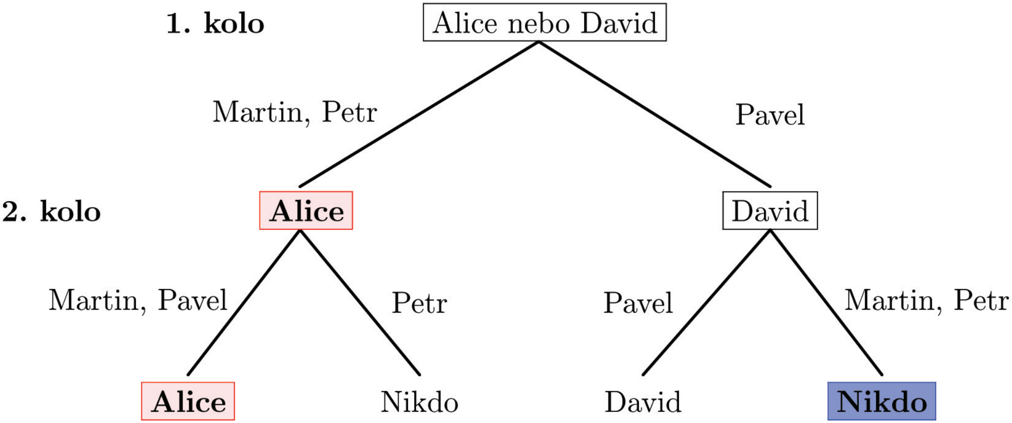
Zpětná indukce: na základě předvídání budoucího vývoje jsou vybírány nejvhodnější alternativy na začátku rozhodování

Příklad 4 – Dvoukolová volba do výboru

Martin, Petr a Pavel jsou členy výboru velmi exkluzivní Společnosti burzovních makléřů. Závěrečným bodem jednoho jejich dopoledního jednání je návrh, aby Alice byla přijata za nového člena. V návrhu chyběla zmínka o jiném možném kandidátovi, Davidovi, a tak se objevil pozměňovací návrh, aby Alice byla nahrazena Davidem. Podle jednacích pravidel je třeba hlasovat nejprve o pozměňovacím návrhu, tj. má-li David nahradit Alici. Potom se hlasuje o tom, zda bude vítěz přijat, či zda nebude přijat nikdo. Preference jednotlivých členů výboru jsou následující:

Pořadí	**Martin**	**Petr**	**Pavel**
1.	Alice	Nikdo	David
2.	Nikdo	Alice	Alice
3.	David	David	Nikdo

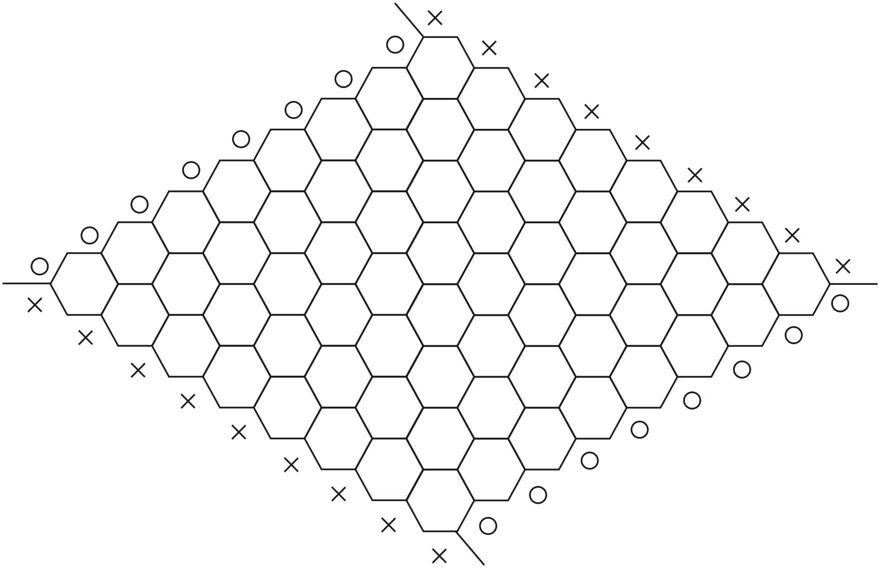
Pokud by všichni volili v obou kolech pouze podle svých preferencí, pak by volby proběhly takto: Při volbě mezi Alicí a Davidem by zvítězila Alice, protože jak Martin, tak Petr ji upřednostňují před Davidem – Pavel by tak byl přehlasován. V druhém kole by Alice získala hlasy od Martina a Pavla, neboť je v žebříčku jejich hodnot výše než „nikdo“, a stala by se tak vítězem voleb.



Bude-li však Petr prozíravý, zvolí v prvním kole Davida, protože vidí, že v druhém kole v tom případě zvítězí varianta „nikdo“, což je pro něj ta nejvítanější možnost. Pavel by ovšem mohl předvídat, že Petr bude tímto způsobem taktizovat, a mohl by rovněž volit strategicky: v prvním kole by místo Davida zvolil Alici, která by pak zvítězila, což Pavel preferuje více než variantu „nikdo“. Jinými slovy, z obrázku či ze zpětné indukce je patrné, že první kolo je v podstatě rozhodování mezi Alicí a nikým, kteří by zvítězili v druhém kole v jednotlivých případech. Protože Alice je před nikým preferována u Martina a Pavla, zvítězí.

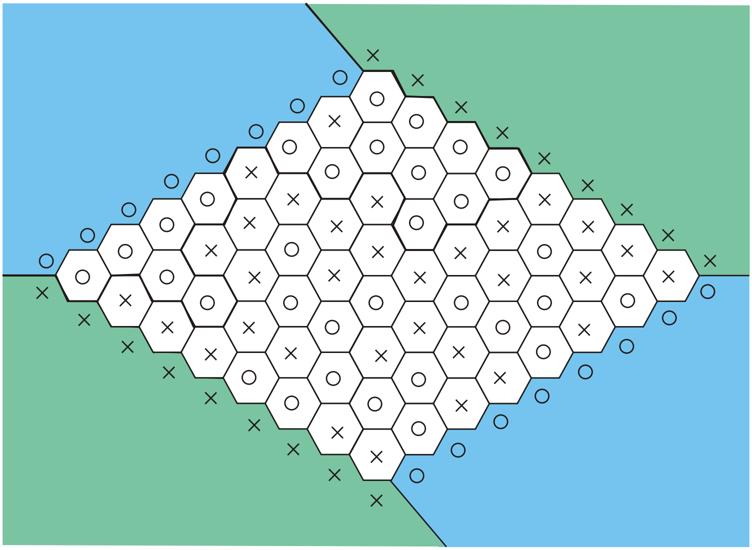
✒ ***Příklad 5*** – Hra Hex

Hra Hex se hraje na desce sestávající z n^2 šestiúhelníků uspořádaných do rovnoběžníka:

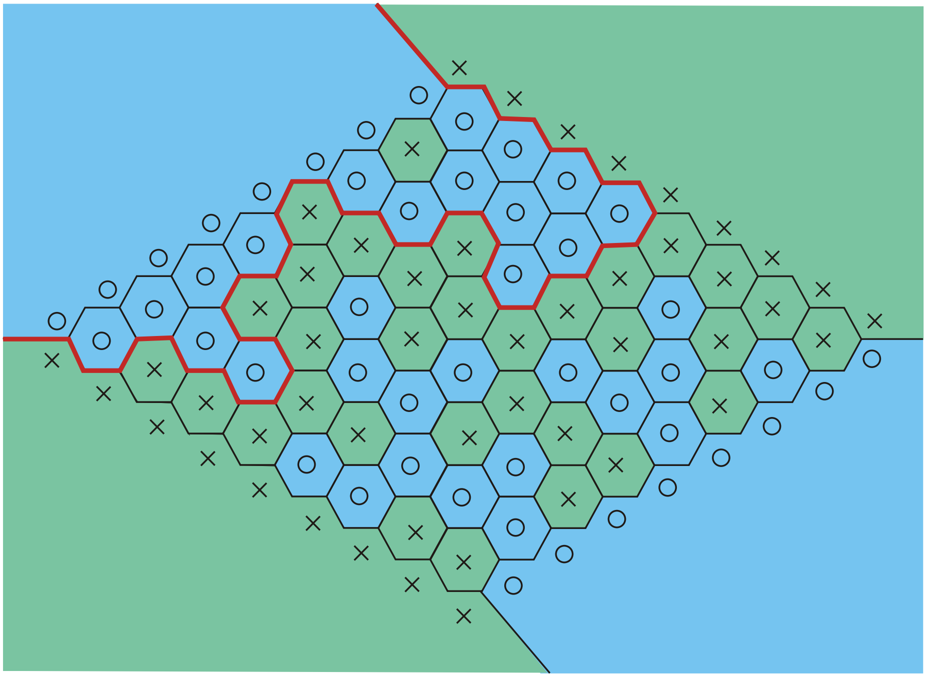


Hráči se střídají jeden po druhém. V každém tahu hráč označí volný šestiúhelník svým symbolem: hráč I kroužkem, hráč II křížkem. Označený šestiúhelník se stane „zabraným územím“ toho hráče, který jej označil. Na začátku sestávají teritoria obou hráčů vždy ze dvou protilehlých stran desky. Vítězem je ten, kdo jako první spojí své strany desky souvislým řetězem šestiúhelníků označenými vlastním symbolem.

Například na následujícím obrázku je vítězem hráč II:



Například na následujícím obrázku je vítězem hráč II:



Lze dokázat:

- **Hex nemůže skončit remízou**

  Je-li každý hexagon označen kroužkem nebo křížkem, pak lze dokázat, že jedna z dvojice protějších stran musí být spojena.

- **Hráč I má vítěznou strategii (ale není známo jakou)**

  Z Zermelovy věty lze vyvodit, že jeden z hráčů má vítěznou strategii, sporem pak dokážeme, že to nemůže být hráč II.

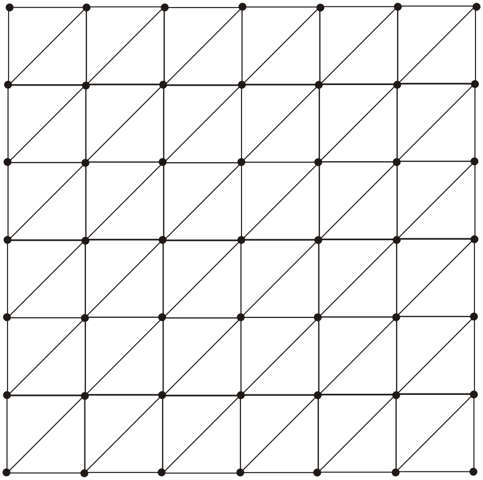
Věta (Zermelo). Nechť T je libovolná množina výsledků v konečné hře dvou hráčů s úplnou informací, bez náhodných tahů. Pak buď hráč I může zajistit výsledek z množiny T nebo hráč II může zajistit výsledek z doplňku $\sim T$.

☞ ***Příklad 6*** – Gangsteři ve městě

Herní deska představuje síť ulic v centru města. Hráči I, resp. II představuje gangsterský gang. Hráč I má pod kontrolou oblasti na severu a na jihu města, hráč II na východě a na západě. Uzly v plánu znázorňují křižovatky. Hráči se střídají v označování uzlů, které dosud nebyly označeny. Hráč I používá kroužky, hráč II křížky. Hráč, kterému se podaří označit oba konce ulice, má tuto ulici pod kontrolou. Hráč I vítězí, spojí-li sever a jih cestou, kterou má pod kontrolou.

Podobně hráč II vítězí,
spojí-li východ a západ.

Ukažte, že hra je ekvivalentní s hrou Hex.



✒ *Příklad 7*. Sofistikovaná volba v soudních systémech

Uvažujme tři právní systémy, v nichž vždy rozhodují tři soudci:

1. **Status quo** (používaný např. v USA):
   Nejprve se rozhoduje o vině či nevině obžalovaného, v případě viny se dále rozhoduje o trestu.

2. **Římská tradice:**
   Po předložení důkazů se začne s hlasováním sestupně od nejpřísnějšího trestu k nejmírnějšímu, popř. k propuštění (např. zda uložit trest smrti; pokud ne, zda doživotí, atd.).

3. **Mandatorní soud:**
   Nejprve se určí trest pro daný zločin, pak se určí, zda má být obžalovaný uznán vinným.

Uvažujme pro jednoduchost tři možné výsledky, trest smrti, doživotní vězení, propuštění, a následující preference jednotlivých soudců:

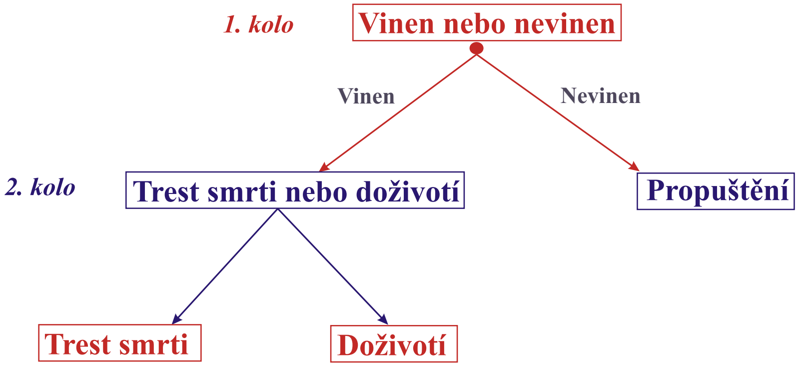
Pořadí	**Soudce *A***	**Soudce *B***	**Soudce *C***
1.	trest smrti	doživotí	propuštění
2.	doživotí	propuštění	trest smrti
3.	propuštění	trest smrti	doživotí

1. Status quo

V prvním kole se hlasuje o vině či nevině; při upřímném hlasování by zvítězilo „vinen“ (soudci A, B), v druhém kole, při rozhodování mezi trestem smrti a doživotím, by zvítězil trest smrti (soudci A, C). První kolo je tedy v podstatě hlasováním mezi propuštěním a trestem smrti – při sofistikované volbě, tedy budou-li soudci uvažovat racionálně a budou předvídat, co se stane v druhém kole, proto v prvním kole zvítězí **propuštění** (kromě soudce C dá v prvním kole hlas propuštění i B, neboť v opačném případě by druhé kolo vedlo k jeho nejméně preferované variantě).

1. Status Quo:

Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#



1. kolo

Vinen nebo nevinen

Vinen

Nevinen

2. kolo

Trest smrti nebo doživotí

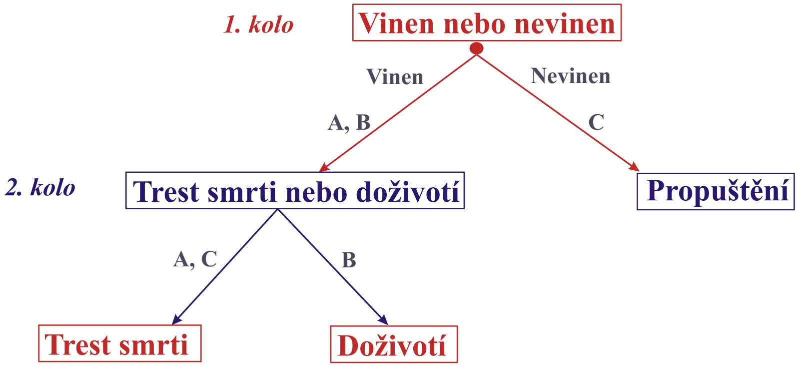
Propuštění

Trest smrti

Doživotí

1. Status Quo:

Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	❤
#	❤	+
❤	+	#



1. kolo

Vinen nebo nevinen

Vinen

A, B

Nevinen

C

2. kolo

Trest smrti nebo doživotí

Propuštění

A, C

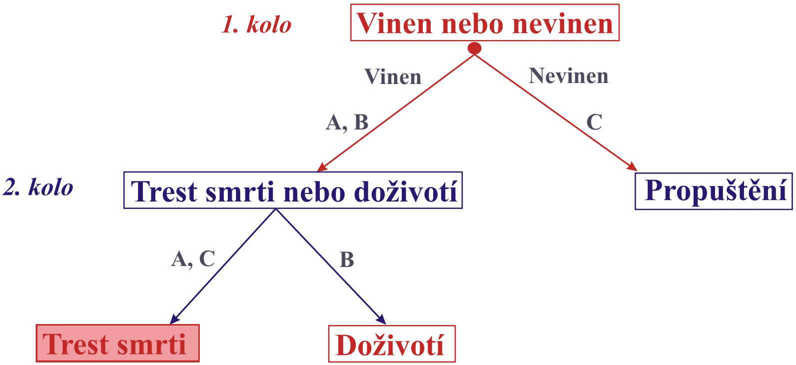
B

Trest smrti

Doživotí

1. Status Quo:

Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#



1. kolo

Vinen nebo nevinen

Vinen

Nevinen

A, B

C

2. kolo

Trest smrti nebo doživotí

Propuštění

A, C

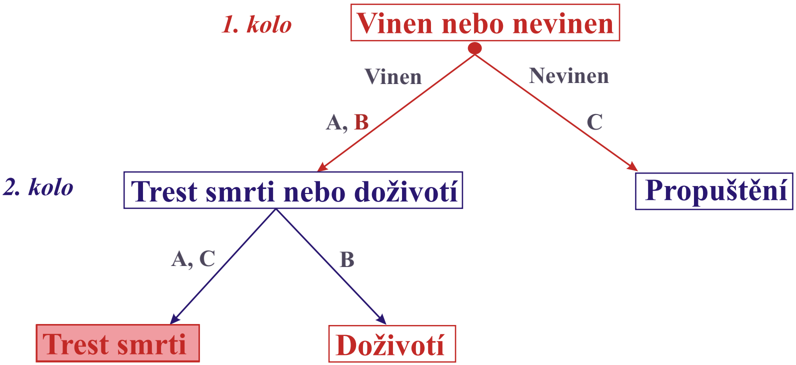
B

Trest smrti

Doživotí

1. Status Quo:

Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#



1. kolo

Vinen nebo nevinen

Vinen

A, B

Nevinen

C

2. kolo

Trest smrti nebo doživotí

Propuštění

A, C

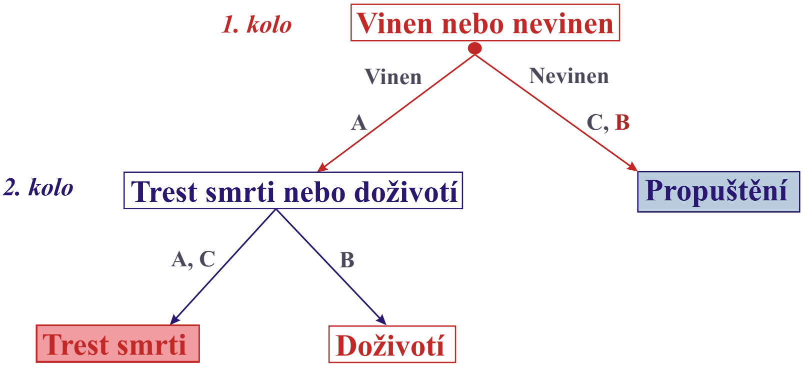
B

Trest smrti

Doživotí

1. Status Quo:

Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#



1. kolo

Vinen nebo nevinen

Vinen

Nevinen

A

C, B

2. kolo

Trest smrti nebo doživotí

Propuštění

A, C

B

Trest smrti

Doživotí

2. Římská tradice

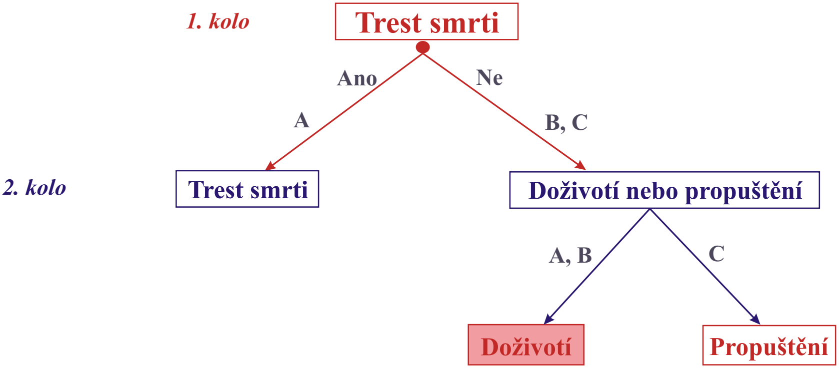
V prvním kole se hlasuje o nejpřísnějším trestu, tj. zda uložit trest smrti či nikoli. Pokud ano, je trest vykonán, pokud ne, nastane druhé kolo, v němž se bude hlasovat, zda doživotí či propuštění.

Protože v druhém kole by zvítězilo doživotí (soudci A, B), je první kolo v podstatě hlasováním mezi trestem smrti a doživotím – při sofistikované volbě proto v prvním kole zvítězí **trest smrti** (kromě soudce A dá v prvním kole hlas trestu smrti i C, neboť v opačném případě by druhé kolo vedlo k jeho nejméně preferované variantě).

2. Římská tradice:

Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#

Upřímná volba:


1. kolo

Trest smrti

Ano

Ne

A

B, C

2. kolo

Trest smrti

Doživotí nebo propuštění

A, B

C

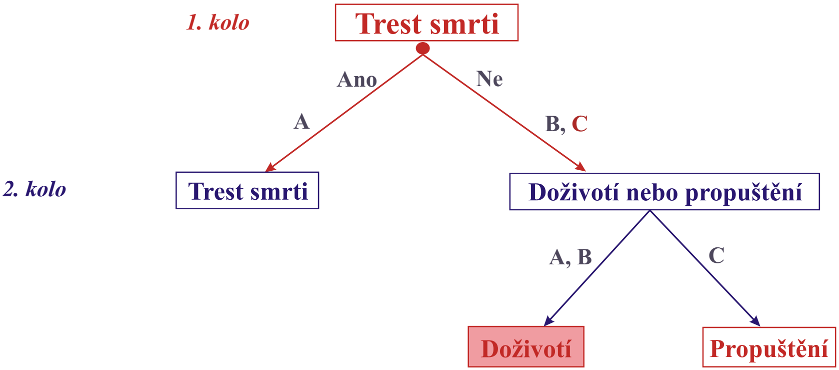
Doživotí

Propuštění

2. Římská tradice:

Sofistikovaná volba:

Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#



1. kolo

Trest smrti

Ano

Ne

A

B, C

2. kolo

Trest smrti

Doživotí nebo propuštění

A, B

C

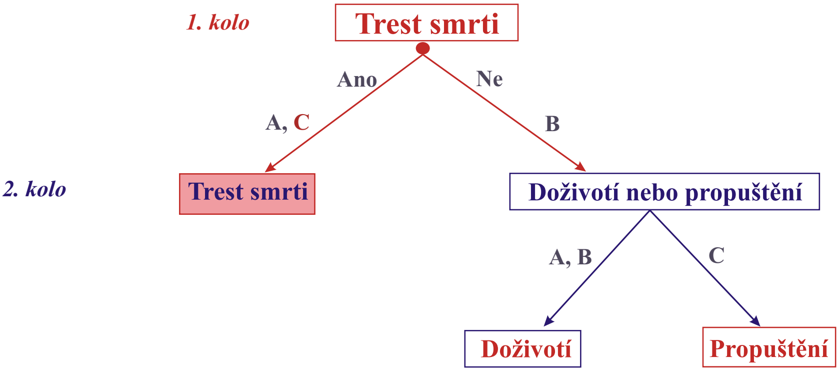
Doživotí

Propuštění

2. Římská tradice:

Sofistikovaná volba:

Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#



1. kolo

Trest smrti

Ano

Ne

A, C

B

2. kolo

Trest smrti

Doživotí nebo propuštění

A, B

C

Doživotí

Propuštění

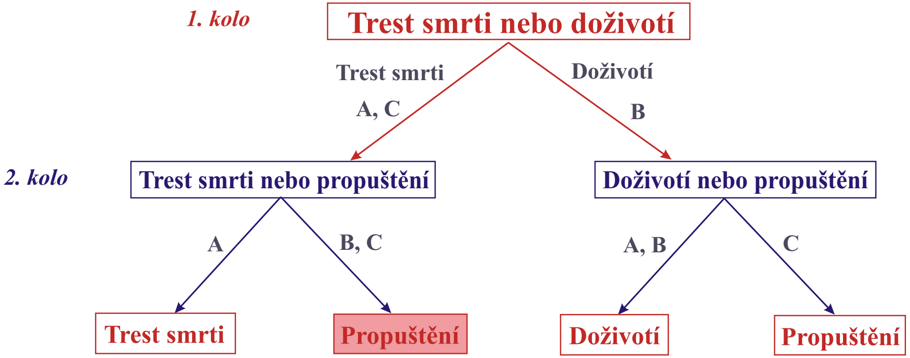
3. Mandatorní systém

V prvním kole se hlasuje o trestu za daný zločin, tj. zda uložit trest smrti či doživotí. V druhém kole se pak hlasuje o tom, zda daný trest uložit či nikoli (tj. propustit). Při rozhodování mezi trestem smrti a propuštěním by zvítězilo propuštění (B, C), při rozhodování mezi doživotím a propuštěním by zvítězilo doživotí (A, B). První kolo je tedy rozhodováním mezi propuštěním a doživotím, takže vězeň bude odsouzen na doživotí (A dá v prvním kole hlas raději doživotí, než aby byl propuštěn).

3. Mandatorní systém:

Upřímná volba:

Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#



1. kolo

Trest smrti nebo doživotí

Trest smrti

A, C

Doživotí

B

2. kolo

Trest smrti nebo propuštění

A

B, C

Doživotí nebo propuštění

A, B

C

Trest smrti

Propuštění

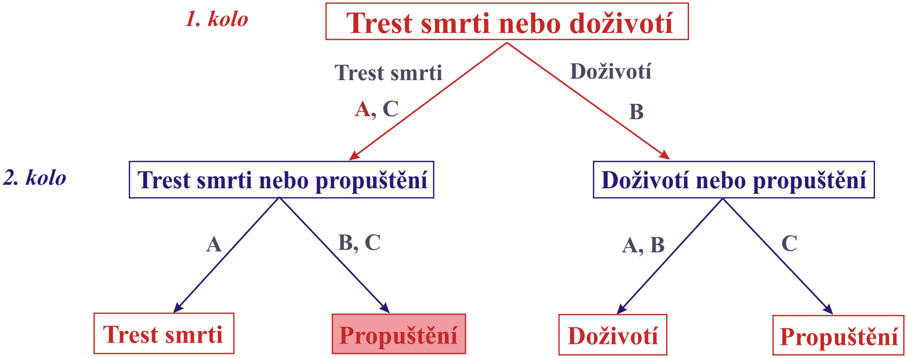
Doživotí

Propuštění

3. Mandatorní systém:

Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#

Sofistikovaná volba:



1. kolo

Trest smrti nebo doživotí

Trest smrti

A, C

Doživotí

B

2. kolo

Trest smrti nebo propuštění

Doživotí nebo propuštění

A

B, C

A, B

C

Trest smrti

Propuštění

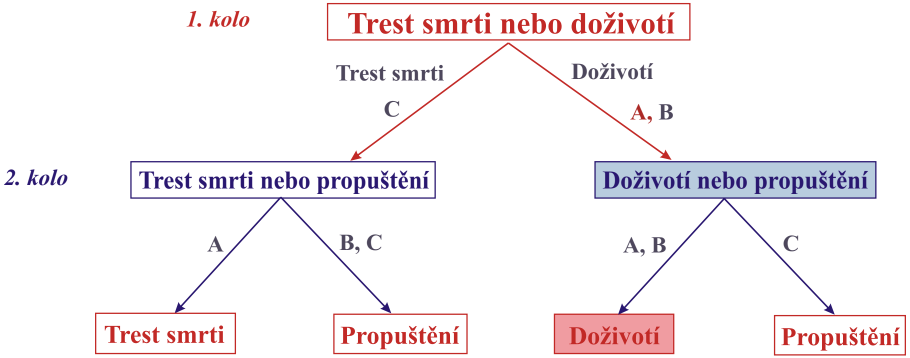
Doživotí

Propuštění

3. Mandatorní systém:

Sofistikovaná volba:

Soudce A	Soudce B	Soudce C
+	#	♥
#	♥	+
♥	+	#



1. kolo

Trest smrti nebo doživotí

Trest smrti

C

Doživotí

A, B

2. kolo

Trest smrti nebo propuštění

Doživotí nebo propuštění

A

B, C

A, B

C

Trest smrti

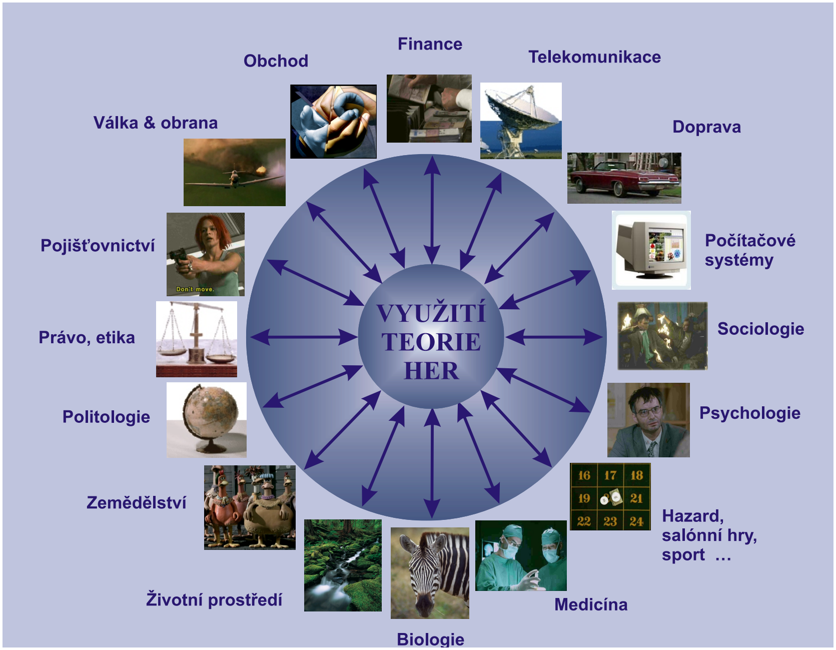
Propuštění

Doživotí

Propuštění

Tento příklad velmi názorně ilustruje, jak se pouhou změnou volebních pravidel může výsledek hlasování zcela zásadně změnit: při stejných preferencích soudců by byl obžalovaný v jednom systému propuštěn, v jiném popraven a v jiném odsouzen k doživotnímu žaláři.

3 HRA V NORMÁLNÍM TVARU



Hra v normálním tvaru

Definice 1. Nechť je dána konečná neprázdná n-prvková množina $Q = \{1, 2, \ldots, n\}$, n množin $S_1, S_2, \ldots, S_n$ a n reálných funkcí $u_1, u_2, \ldots, u_n$ definovaných na kartézském součinu $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$.

Hrou n hráčů v normálním tvaru (HNT) budeme rozumět uspořádanou $(2n+1)$-tici

$$\{Q;\ S_1, \ldots, S_n;\ u_1(s_1, \ldots, s_n), \ldots, u_n(s_1, \ldots, s_n)\}.$$

Množinu Q nazveme **množinou hráčů**, množinu S_i nazveme **prostorem strategií hráče** i, prvek $s_i \in S_i$ nazveme **strategií hráče** i a funkci $u_i(s_1, \ldots, s_n)$ nazveme **výplatní funkcí hráče** i. Je-li hodnota výplatní funkce pro daného hráče kladná, hovoříme o **zisku**, je-li záporná, hovoříme o **ztrátě**.

Pod toto označení spadá velmi mnoho věcí, cokoli od rulety po šach, od bakaratu po bridž. A nakonec každá událost – jsou-li dány vnější podmínky a účastníci situace (a ti se chovají dle svobodné vůle) – může být považována za společenskou hru, jestliže sledujeme účinek, jaký má na účastníky.

(John von Neumann, 1928)

> ***Pod toto označení spadá velmi mnoho věcí, cokoli od rulety po šach, od bakaratu po bridž. A nakonec každá událost – jsou-li dány vnější podmínky a účastníci situace (a ti se chovají dle svobodné vůle) – může být považována za společenskou hru, jestliže sledujeme účinek, jaký má na účastníky.***
>
> **(John von Neumann, 1928)**

. . . obchodní společnosti, vojenské jednotky, stihačky, ponorky, účastníci souboje, národy, politici, politické strany, samci v říji, geny, motoristé, uživatelé počítačové sítě, majitelé téhož pozemku, ctitelé téže dámy, věřitelé zbankrotovaného dlužníka, . . .

Příklad 1

Předpokládejme, že o dva trhy, A a B, se zajímají dvě firmy, 1 a 2. Na trhu A se očekávají zakázky představující zisk 150 milionů, na trhu B se očekávají zakázky představující zisk 90 milionů. Každá z firem má finanční prostředky buď na velkou propagační akci na kterémkoli z trhů, anebo na menší kampaň na obou trzích. Účinnost propagace obou firem je stejná a zakázky se rozdělují podle těchto pravidel:

1. Vede-li na trhu reklamní kampaň nábor pouze jedna firma, získá všechny zakázky tohoto trhu.
2. Vedou-li obě firmy na trhu akci téhož „typu“, popř. neprovádějí-li vůbec propagaci, získají obě firmy polovinu zakázek.
3. Vede-li jedna firma na trhu malou kampaň a druhá velkou, získá firma, která vede malou kampaň, 1/3 zakázek a konkurující firma 2/3 zakázek.

Obě firmy se musí rozhodnout ve stejnou dobu a nezávisle na sobě (například na konci roku objednat billboardy a vysílací časy na příští rok). Jaké jsou jejich optimální strategie?

Řešení.

Všechny možné kombinace strategií můžeme znázornit následující tabulkou, kde VA značí velkou kampaň na trhu A, VB značí velkou kampaň na trhu B a MAB značí malou kampaň na obou trzích; první z dvojice číselných hodnot vždy udává zisk první firmy, druhá udává zisk druhé firmy.

			Firma 2	
	Strategie	VA	VB	MAB
Firma 1	VA	$(120, 120)$	$(150, 90)$	$(100, 140)$
	VB	$(90, 150)$	$(120, 120)$	$(60, 180)$
	MAB	$(140, 100)$	$(180, 60)$	$(120, 120)$

Představme si, že jsme v pozici první firmy. Nevíme, jakou strategii zvolí druhá firma, tj. v jakém jsme sloupci; i tak ale můžeme porovnat jednotlivé řádky jako celek. Je zřejmé, že by nebylo příliš rozumné volit například druhý řádek, protože ať už konkurenční firma zvolí jakoukoli strategii, vždy bychom na tom byli hůř než v řádku posledním.

Druhý řádek proto můžeme rovnou škrtnout. Stejně tak není rozumné volit ani první řádek. Podobně pak může uvažovat i druhá firma.

		Firma 2		
	Strategie	VA	VB	MAB
	~~VA~~	~~$(120, 120)$~~	~~$(150, 90)$~~	~~$(100, 140)$~~
Firma 1	~~VB~~	~~$(150, 90)$~~	~~$(120, 120)$~~	~~$(60, 180)$~~
	MAB	~~$(140, 100)$~~	~~$(180, 60)$~~	$(120, 120)$

Nakonec nám zbyla jediná dvojice strategií, kdy obě firmy provádějí malou kampaň na obou trzích. Intuitivně, obě se tak pojistí proti tomu, že by konkurenční firma získala jeden z trhů ”zadarmo” (jen za malou kampaň) a k tomu ještě třetinu zbývajícího trhu.

Uvedené řešení má pak tu vlastnost, že při jednostranném odchýlení od doporučené strategie si žádná firma nepolepší. Takovému řešení se říká **rovnovážný bod**.

✒ *Příklad 2*

Nyní uvažujme hru dvou hráčů, popsanou následující tabulkou.

Hráč 2

$$\begin{array}{cc|ccc}
 & \text{Strategie} & t_1 & & t_2 \\ \hline
 & s_1 & \boxed{(\mathbf{2},\mathbf{0})} & \leftarrow & (2,-1) \\
\textbf{Hráč 1} & & \uparrow & & \downarrow \\
 & s_2 & (1,1) & \leftarrow & (3,-2)
\end{array}$$

Uvažujme například dvojici strategií (s_1, t_2). Kdyby první hráč věděl, že protivník zvolí strategii t_2, bylo by pro něj výhodnější zvolit nikoli s_1, ale strategii s_2. Podobně kdyby druhý hráč věděl, že protivník zvolí strategii s_1, bylo by pro něj výhodnější zvolit strategii t_1, atd. Jedinou dvojicí strategií, kdy ani pro jednoho hráče není výhodné se jednostranně odchýlit, je (s_1, t_1).

Jak bylo zmíněno výše, taková dvojice strategií se nazývá **rovnovážným bodem**.

☛ *Příklad 2*

Hráč 2

Hráč 1

$$\begin{array}{c|ccc} \text{Strategie} & t_1 & & t_2 \\ \hline s_1 & \boxed{(\mathbf{2},\mathbf{0})} & \leftarrow & (2,-1) \\ & \uparrow & & \downarrow \\ s_2 & (1,1) & \leftarrow & (3,-2) \end{array}$$

Definice 2. n-tice strategií $\boldsymbol{s}^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ se nazývá **rovnovážným bodem hry** (HNT), právě když pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a všechna $s_i \in S_i$ platí:

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \leq$$

$$\leq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*).$$

Strategie s_i^* se nazývá **rovnovážná strategie hráče** i.

☛ *Příklad 3*

Uvažujme hru dvou hráčů, která probíhá takto: oba hráči mají v ruce jednu korunu a jednu pětikorunu. Ve stejný okamžik musí na stůl položit jednu z mincí. Jsou-li hodnoty na vyložených mincích stejné, vyhraje první hráč, jsou-li různé, vyhraje druhý hráč.

Hru lze popsat například pomocí následujících hodnot:

Hráč 2

	Strategie	t_1	t_2
Hráč 1	s_1	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
	s_2	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

Snadno si můžeme odvodit, že rovnovážný bod v původních strategiích v tomto případě neexistuje.

☞ *Příklad 3*

Hráč 2

Hráč 1

$$\begin{array}{c|ccc} \text{Strategie} & t_1 & & t_2 \\ \hline s_1 & (1,-1) & \rightarrow & (-1,1) \\ & \uparrow & & \downarrow \\ s_2 & (-1,1) & \leftarrow & (1,-1) \end{array}$$

Představme si, že hru budeme hrát opakovaně, třeba celý večer. Je zřejmé, že bychom neměli stále používat jednu ze strategií, protože protivník by se tomu přizpůsobil a systematicky by nás obehrával. Proto by bylo lepší strategie nějakým způsobem střídat.

✐ *Příklad 3*

Hráč 2

Hráč 1

$$\begin{array}{c|ccc} \text{Strategie} & t_1 & & t_2 \\ \hline s_1 & (1,-1) & \rightarrow & (-1,1) \\ & \uparrow & & \downarrow \\ s_2 & (-1,1) & \leftarrow & (1,-1) \end{array}$$

Kdybychom však jednu ze strategií používali častěji než druhou, například bychom v roli prvního hráče na stůl kladli častěji korunu než pětikorunu, pak by druhý hráč mohl na stůl klást stále pětikorunu a častěji by vyhrál než prohrál. Jedinou pojistkou proti takovému ”zneužívání” je tedy používat obě strategie v průměru stejně často, avšak takovým způsobem, který se nedá předvídat: to znamená **náhodně**; korunu nebo pětikorunu bychom na stůl měli pokládat se stejnými pravděpodobnostmi. Dlouhodobě pak budeme přibližně stejně často vyhrávat jako prohrávat.

Jakmile se původní strategie kombinují s určitými pravděpodobnostmi dohromady, hovoří se v teorii her o **smíšené strategii**.

V našem případě označme pravděpodobnost, s níž první hráč zvolí první strategii, písmenem p; pravděpodobnost volby druhé strategie je pak $1-p$. Pro druhého hráče uvažujme pravděpodobnosti q a $1-q$.

Hráč 2

Hráč 1

$$\begin{array}{c|ccc c}
\text{Strategie} & t_1 & & t_2 & \\
\hline
s_1 & (1,-1) & \rightarrow & (-1,1) & p \\
 & \uparrow & & \downarrow & \\
s_2 & (-1,1) & \leftarrow & (1,-1) & 1-p \\
 & & & & \\
 & q & & 1-q &
\end{array}$$

✒ *Příklad 3*

Hráč 2

Hráč 1

$$\begin{array}{c|cccc}
\text{Strategie} & t_1 & & t_2 & \\ \hline
s_1 & (1,-1) & \rightarrow & (-1,1) & p \\
 & \uparrow & & \downarrow & \\
s_2 & (-1,1) & \leftarrow & (1,-1) & 1-p \\
 & & & & \\
 & q & & 1-q &
\end{array}$$

Smíšené strategie:

$$\{s_1, s_2\} \rightsquigarrow \{(p, 1-p), p \in \langle 0, 1\rangle\}$$

$$\{t_1, t_2\} \rightsquigarrow \{(q, 1-q), q \in \langle 0, 1\rangle\}$$

Výplatní funkce u_1, u_2 $\rightsquigarrow$ **očekávané výhry** π_1, π_2 :

$$\pi_1(p,q) = -1pq + 1(1-p)q + 1p(1-q) - 1(1-p)(1-q)$$

$$\pi_2(p,q) = \quad 1pq - 1(1-p)q - 1p(1-q) + 1(1-p)(1-q)$$

Konečná hra v normálním tvaru

Konečnou hrou se rozumí hra, v níž každý hráč má konečný prostor strategií, tj. **množiny** $S_1, S_2, \dots, S_n$ **jsou konečné.**

Definice 3. Uvažujme konečnou hru n hráčů v normálním tvaru. Počet prvků prostoru strategií S_i libovolného hráče i označme symbolem m_i. **Smíšenou strategií** hráče i se rozumí vektor pravděpodobností

$$\boldsymbol{p}^i = (p^i_1, p^i_2, \dots, p^i_{m_i}),$$

kde $p^i_j \geq 0$ pro všechna $1 \leq j \leq m_i$,

$$\sum_{j=1}^{m_i} p^i_j = 1.$$

Smíšená strategie je tedy pro každého hráče vektor, jehož j-tá složka udává pravděpodobnost, s níž hráč volí j-tou strategii ze svého prostoru strategií. Je to tedy opět jistá strategie, kterou bychom mohli popsat takto:

použij strategii $s_1^i \in S_i$ *s pravděpodobností* p_1^i

...

použij strategii $s_{m_i}^i \in S_i$ *s pravděpodobností* $p_{m_i}^i$

Pro odlišení se prvky prostoru strategií S_i nazývají **ryzí strategie**.

Věta 1. (J. Nash). *Ve smíšených strategiích má každá konečná hra aspoň jeden rovnovážný bod.*

Důkaz této věty pro případ dvou hráčů je uveden v kapitole 4 Dvojmaticové hry (klikněte pro odkaz)

HLEDÁNÍ ROVNOVÁHY – COURNOTŮV DUOPOL

Antoine Augustin Cournot (1801 – 1877)

1838 Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses

- S matematickou přesností zde Cournot popsal většinu dnešní teorie ekonomické soutěže, monopolu a oligopolu
- Podrobná analýza monopolu – pojem *nákladová funkce*, aj.
- Množství produkce, jaké má výrobce zvolit, aby maximalizoval svůj zisk
  (matematické odvození)
- Vliv různých forem daní a dalších poplatků,
  jejich vliv na příjem výrobce a zákazníků
- Model duopolu – řešení odpovídající Nashovu *rovnovážnému bodu* zavedenému o více 7než sto let později
- Model oligopolu

Cournotův model monopolu

Daný produkt vyrábí jediný výrobce – monopolista

Celková produkce: q výrobků

Nejvyšší cena, za kterou může prodávat jeden kus, aby celou produkci prodal:

$$p = M - q.$$

Protože nikdo jiný celkové vyrobené množství neovlivní, stojí monopolista před úlohou pouhé maximalizace zisku, tj. nalezení maxima funkce

$$u(q) = p \cdot q - c \cdot q = Mq - q^2 - cq = (M - q - c)q.$$

Pomocí první derivace: $u'(q) = M - c - 2q = 0$

$$q^*_{mon} = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}(M-c)}}$$

Maximální zisk při výrobě $q^*_{mon} = \frac{1}{2}(M-c)$ kusů:

$$u^*_{mon} = u(q^*_{mon}) = \left(M - \tfrac{1}{2}(M-c) - c\right)\tfrac{1}{2}(M-c) = \underline{\underline{\left[\tfrac{1}{2}(M-c)\right]^2}}$$

Odpovídající cena: $p^*_{mon} = \underline{\underline{\frac{1}{2}(M+c)}}$

Cournotův model duopolu

Daný produkt vyrábějí dva výrobci, z nichž každý přispívá nezanedbatelnou částí k celkovému množství výrobků na trhu.

Problém: každý z duopolistů ovlivňuje jen část celkového množství; cena, kterou za své výrobky utrží, závisí nejen na jeho vlastním rozhodnutí, ale také na rozhodnutí soupeře. Duopolisté se rozhodují současně a nezávisle jeden na druhém.

q_1, q_2 . . . množství vyráběná prvním a druhým duopolistou

Maximální cena, za kterou se výrobky prodají:

$$p = M - q_1 - q_2$$

Model pomocí hry v normálním tvaru:

hráči . . . duopolisté, z nichž každý volí číslo z intervalu $\langle 0, M \rangle$;

prostory strategií . . . $S_1 = S_2 = \langle 0, M \rangle$;

výplatní funkce . . . zisky duopolistů:

$$u_1(q_1, q_2) = (p - c)q_1 = (M - c - q_1 - q_2)q_1$$

$$u_2(q_1, q_2) = (p - c)q_2 = (M - c - q_1 - q_2)q_2$$

První duopolista:

Pro každou strategii soupeře q_2 hledá takové množství $q_1 = R_1(q_2)$, aby hodnota

$$u_1(q_1, q_2) = (M - c - q_1 - q_2)q_1$$

byla maximální (*nejlepší odpověď na* q_2).

Jinými slovy: pro každé pevné $q_2 \in S_2$ hledá první duopolista maximum funkce $u_1(q_1, q_2)$, která je funkcí jediné proměnné q_1 :

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = M - c - q_2 - 2q_1 = 0$$

$$R_1(q_2) = q_1 = \tfrac{1}{2}(M - c - q_2)$$

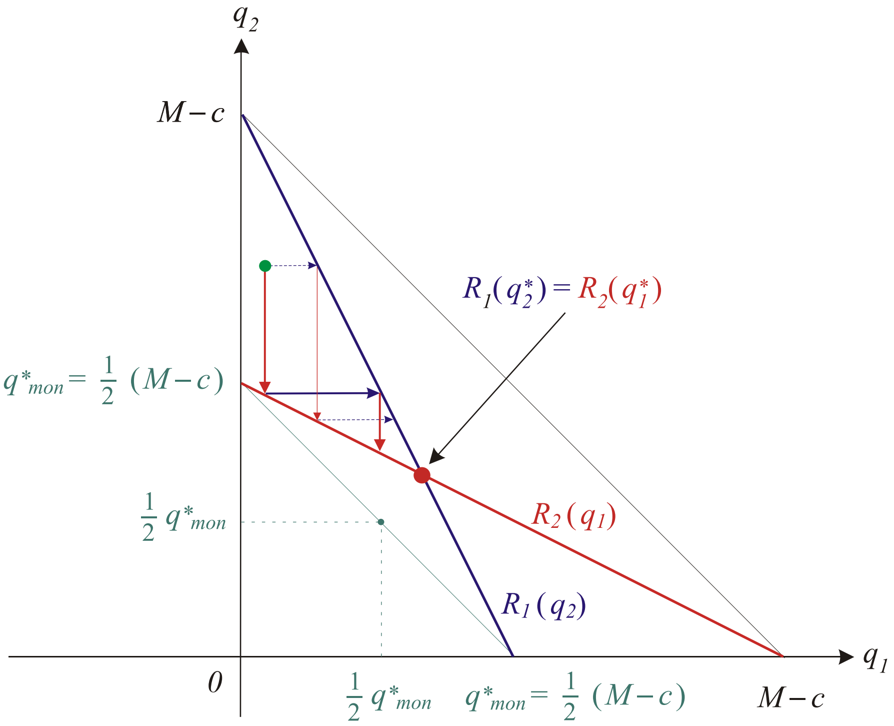
Druhý duopolista:

Pro každou strategii q_1 hledá *nejlepší odpověď* $q_2 = R_2(q_1)$, tj. takové množství, které pro dané q_1 maximalizuje zisk $u_2(q_1, q_2) = (M - c - q_1 - q_2)q_2$:

$$\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = M - c - q_1 - 2q_2 = 0$$

$$R_2(q_1) = q_2 = \tfrac{1}{2}(M - c - q_1)$$

Funkce $R_1(q_2)$ a $R_2(q_1)$ se nazývají **reakční křivky**


q_2
$M-c$
$R_1(q_2^*) = R_2(q_1^*)$
$q^*_{mon} = \frac{1}{2}(M-c)$
$R_2(q_1)$
$\frac{1}{2}q^*_{mon}$
$R_1(q_2)$
q_1
0
$\frac{1}{2}q^*_{mon}$
$q^*_{mon} = \frac{1}{2}(M-c)$
$M-c$

Z definice: (q_1^*, q_2^*) je rovnovážný bod, právě když $R_1(q_2^*) = R_2(q_1^*)$.
Rovnovážný bod je tedy průsečíkem reakčních křivek:

$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\tfrac{1}{3}(M-c), \tfrac{1}{3}(M-c)\right)$$

Cena, za kterou budou duopolisté prodávat:

$$p_D^* = M - \tfrac{2}{3}(M-c) = \tfrac{1}{3}M + \tfrac{2}{3}c$$

Příslušný zisk pro každého z duopolistů:

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = u_2(q_1^*, q_2^*) = \left[\tfrac{1}{3}(M-c)\right]^2$$

Celkový zisk:

$$u_1(q_1^*, q_2^*) + u_2(q_1^*, q_2^*) = \tfrac{2}{9}[(M-c)]^2 < \tfrac{1}{4}\,[(M-c)]^2 = u_{mon}^*$$

Celkové vyrobené množství:

$$q_1^* + q_2^* = \tfrac{2}{3}(M-c) > \tfrac{1}{2}(M-c) = q_{mon}^*$$

Duopolisté prodávají větší množství výrobků za nižší cenu než monopolista

Srovnáme-li výsledky pro monopol a duopol, je zřejmé, že pro duopolisty by bylo nejlepší uzavřít tajnou dohodu o tom, že budou vyrábět dohromady pouze

$$q_1 + q_2 = q^*_{mon} = \tfrac{1}{2}(M - c) \tag{3.1}$$

(takovéto body tvoří zelenou úsečku) a s ohledem na okolnosti si pak rozdělí vzniklý zisk – v symetrických situacích rovným dílem:

$$\left(\tfrac{1}{2}q^*_{mon}, \tfrac{1}{2}q^*_{mon}\right) = \left(\tfrac{1}{4}(M - c), \tfrac{1}{4}(M - c)\right).$$

Tento výstup je však **nestabilní**, neboť pro každého z duopolisů je výhodné se odchýlit ke své nejlepší odpovědi na soupeřovu volbu a získat pro sebe více.

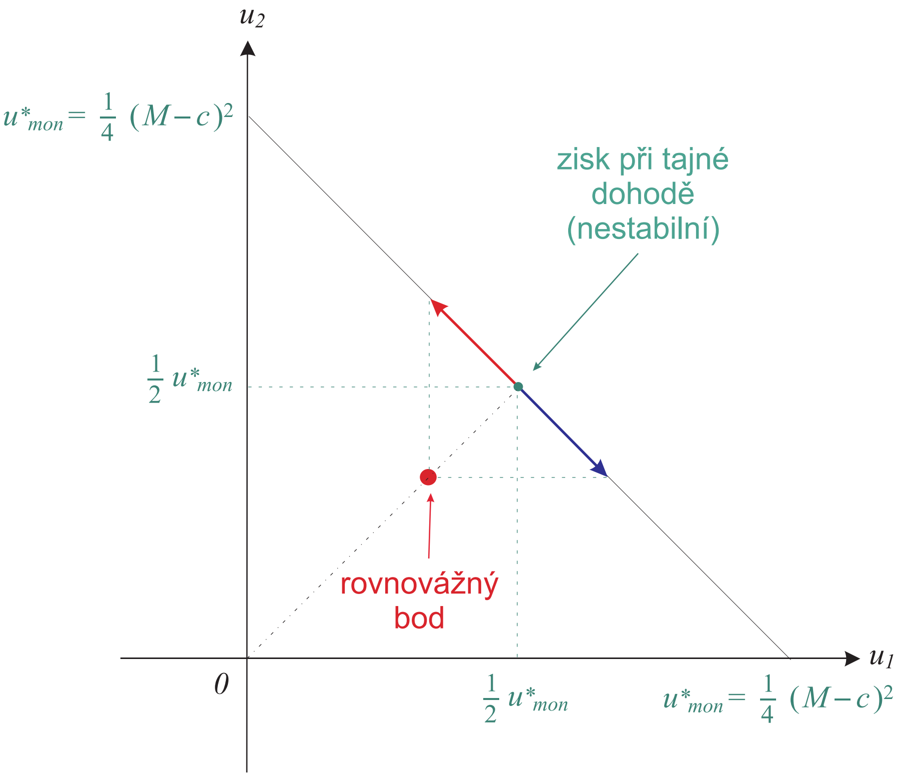
Problém spočívá v tom, že podobné dohody jsou tajné, vzhledem k antimonopolním opatřením zpravidla protizákonné – a tajná dohoda uzavřená v „zakouřené místnosti“ je laciná a legálními prostředky nevymahatelná.

Nakonec – naštěstí pro zákazníka (a k tomu slouží antimonopolní zákony) – jediná dohoda, při níž nemá ani jeden z duopolistů nutkání se odchýlit, je výše uvedený **rovnovážný bod**

$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\tfrac{2}{3}q^*_{mon}, \tfrac{2}{3}q^*_{mon}\right) = \left(\tfrac{1}{3}(M - c), \tfrac{1}{3}(M - c)\right).$$

Situace se ovšem radikálně změní při **opakování**, kdy se titíž dva duopolisté budou ve stejné situaci ocitat opakovaně: je-li v každém „kole“

velká pravděpodobnost, že nastane ještě kolo následující, může být pro každého ze zúčastněných výhodnější tajnou dohodu dodržet.



zisk při tajné dohodě (nestabilní)

rovnovážný bod

☞ *Příklad 4*. Cournotův model oligopolu.

Uvažujme n výrobců téhož produktu, z nichž každý přispívá nezanedbatelnou částí k celkovému množství výrobků na trhu. Nyní se jedná o hru n hráčů, z nichž každý hledá optimální množství q_i, které má vyrábět. Nalezněme rovnovážný bod v této hře.

Zisky jednotlivých oligopolistů jsou analogicky s předchozím příkladem následující:

$$
\begin{aligned}
u_1(q_1, q_2, \ldots, q_n) &= (p - c)q_1 = (M - c - q_1 - q_2 - \cdots - q_n)q_1 \\
u_2(q_1, q_2, \ldots, q_n) &= (p - c)q_2 = (M - c - q_1 - q_2 - \cdots - q_n)q_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_n(q_1, q_2, \ldots, q_n) &= (p - c)q_n = (M - c - q_1 - q_2 - \cdots - q_n)q_n
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Rovněž analogicky s případem duopolu lze nalézt rovnovážný bod.

Z podmínek

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial q_1} &= M - c - 2q_1 - q_2 - \cdots - q_n = 0 \\
\frac{\partial u_2}{\partial q_2} &= M - c - q_1 - 2q_2 - \cdots - q_n = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial u_n}{\partial q_n} &= M - c - q_1 - q_2 - \cdots - 2q_n = 0
\end{aligned}$$

obdržíme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{ccccccccc}
2q_1 & + & q_2 & + & \cdots & + & q_n & = & M - c \\
q_1 & + & 2q_2 & + & \cdots & + & q_n & = & M - c \\
\multicolumn{9}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
q_1 & + & q_2 & + & \cdots & + & 2q_n & = & M - c
\end{array}$$

Jejím řešením jsou hodnoty:

$$q_1^* = q_2^* = \cdots = q_n^* = \underline{\underline{\frac{M - c}{n + 1}}} \tag{3.3}$$

Oligopolisté tedy dohromady vyrobí množství

$$q^* = q_1^* + q_2^* + \cdots + q_n^* = n\frac{M - c}{n + 1} = \frac{n}{n + 1}(M - c) \tag{3.4}$$

Z výsledku je patrné, že s tím, jak roste počet výrobců, roste i množství výrobků a klesá cena p^* i celkový zisk u^* firem:

$$p^* = \underline{\underline{\frac{1}{n+1}M + \frac{n}{n+1}c}} \tag{3.5}$$

$$u^* = \underline{\underline{\frac{n}{(n+1)^2}(M-c)^2}} \tag{3.6}$$

Limitním případem oligopolu, kde $n \to \infty$, je **dokonalá soutěž**: zde se na celkové produkci podílí velké množství malých firem, které samy o sobě neovlivní celkové množství. Toto množství je nyní dáno vztahem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}(M-c) = \underline{\underline{(M-c)}}, \tag{3.7}$$

cena, za níž se výrobky budou prodávat, je rovna přímo výrobním nákladům c,

$$p^* = M - (M-c) = \underline{\underline{c}}, \tag{3.8}$$

a zisk jednotlivých firem je roven nule,

$$u^* = \underline{\underline{0}}. \tag{3.9}$$

Výsledky, k nimž jsme při diskusi Cournotových modelů dospěli, lze shrnout do následující tabulky:

	Celkové množství $\boldsymbol{q^*}$	**Cena za kus** $\boldsymbol{p^*}$	**Celkový zisk** $\boldsymbol{u^*}$
Monopol	$\frac{1}{2}(M-c)$	$\frac{1}{2}M+\frac{1}{2}c$	$\frac{1}{4}(M-c)^2$
Duopol	$\frac{2}{3}(M-c)$	$\frac{1}{3}M+\frac{2}{3}c$	$\frac{2}{9}(M-c)^2$
Oligopol	$\frac{n}{n+1}(M-c)$	$\frac{1}{n+1}M+\frac{n}{n+1}c$	$\frac{n}{(n+1)^2}(M-c)^2$
Dokonalá soutěž	$(M-c)$	c	0

Z tabulky je rovněž patrné, proč je pro firmy výhodné vytvářet velké kartely a chovat se jako monopolista (a také proč dokonalá soutěž zůstává jen v myšlenkách idealistů).

Joseph Louis Francois Bertrand (1822 – 1900)

1883 Theorie Mathematique de la Richesse Sociale

Odmítavá recenze Cournotovy práce

Bertrandův model duopolu

Duopolisté si současně určují **ceny**, za které budou své výrobky prodávat. Výrobky jsou nerozlišitelné, o prodeji rozhoduje pouze cena: pokud jeden výrobce prodává za nižší cenu, získá všechny zákazníky.

Problém: v případě Cournotova rovnovážného bodu, kde $p^* = \frac{1}{3}M + \frac{2}{3}c$, by mohl jeden duopolista nepatrně snížit cenu, získat všechny zákazníky a zdvojnásobit zisk

Rovnovážný bod v Bertrandově modelu duopolu:

$p_1 > p_2 > c$	pro prvního duopolistu by bylo výhodnější zvolit $p_1' < p_2$
$p_2 > p_1 > c$	podobně pro druhého duopolistu
$p_1 = p_2 > c$	pro libovolného duopolistu by bylo výhodnější zvolit nepatrně nižší hodnotu
$p_1 > p_2 = c$	pro druhého duopolistu by bylo výhodnější zvolit $c < p_2 < p_1$
$p_2 > p_1 = c$	podobně pro prvního
$p_2 = p_1 = c$	oba duopolisté mají nulový zisk, žádný si jednostranným odchýlením nepolepší $\Longrightarrow$ **rovnovážný bod**

Heinrich von Stackelberg (1905 – 1946)

1934 Marktform und Gleichgewicht

Stackelbergův model duopolu: vůdce – následovník

Jeden duopolista, se rozhoduje jako první o množství výrobků, druhý, pozoruje rozhodnutí prvního a teprve pak se sám rozhodne.

Strategie vůdce .... hodnota $q_1 \in \langle 0, M \rangle$

Strategie následovníka .... funkce $f : \langle 0, M \rangle \to \langle 0, M \rangle$

Optimální strategie následovníka nejlepší odpověď $R_2(q_1) = \frac{1}{2}(M - c - q_1)$

Optimální strategie vůdce .... hodnota $q_1^\heartsuit$ maximalizující $u_1(q_1, R_2(q_1))$

$$u_1(q_1, R_2(q_1)) = (M - c - q_1 - R_2(q_1))q_1 = \tfrac{1}{2}(M - c - q_1)q_1 = \tfrac{1}{2}u_{mon}(q_1)$$

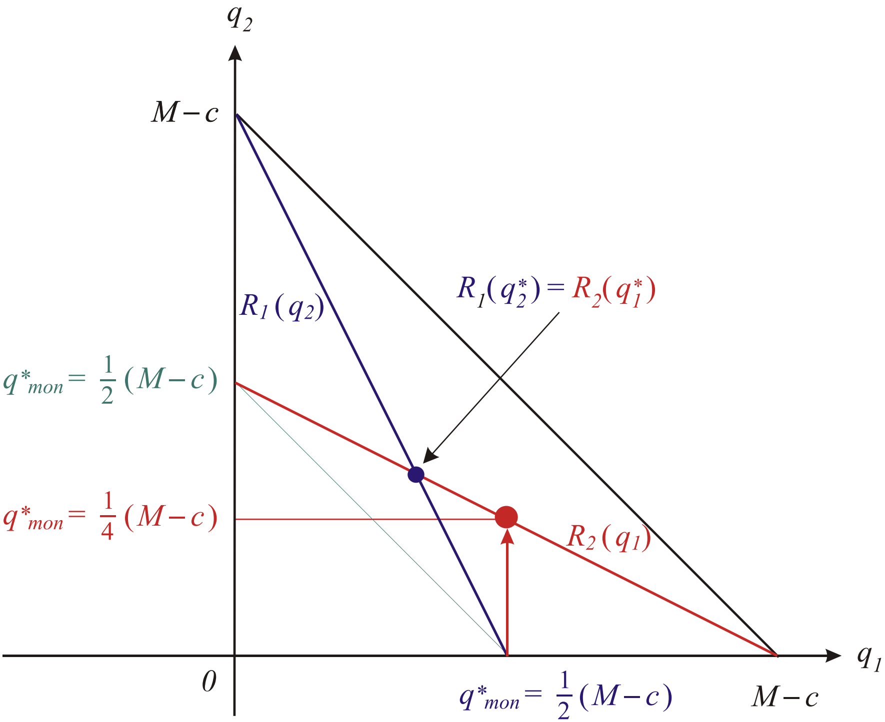
$\rightsquigarrow$ jako monopolista: $q_1^\heartsuit = q_{mon}^* = \frac{1}{2}(M - c)$

Nejlepší odpověď následovníka ... $q_2^\heartsuit = R_2(q_1^\heartsuit) = \frac{1}{4}(M - c)$

Celková produkce .... $q_1^\heartsuit + q_2^\heartsuit = \frac{3}{4}(M - c)$

Cena .... $p^\heartsuit = M - \frac{3}{4}(M - c) = \frac{1}{4}M + \frac{3}{4}c$

Pro zákazníka výhodnější než Cournotův duopol


q_2
$M-c$
$R_1(q_2)$
$R_1(q_2^*) = R_2(q_1^*)$
$q^*_{mon} = \frac{1}{2}(M-c)$
$q^*_{mon} = \frac{1}{4}(M-c)$
$R_2(q_1)$
q_1
0
$q^*_{mon} = \frac{1}{2}(M-c)$
$M-c$

Hra v normálním tvaru, kde prostory strategií jsou otevřené intervaly

Věta 2 – ROVNOVÁŽNÝ TEST.
Nechť G *je hra v normálním tvaru, kde prostory strategií* S_i *jednotlivých hráčů* $1, 2, \ldots, n$ *jsou otevřené intervaly a výplatní funkce jsou dvakrát diferencovatelné. Předpokládejme, že* n*-tice strategií* $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ *splňuje podmínky:*

1) $$\frac{\partial u_i(s_1^*, \ldots, s_n^*)}{\partial s_i} = 0 \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \ldots, n.$$

2) *Každé* s_i^* *je jediným stacionárním bodem funkce*

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*), \quad s_i \in S_i.$$

3) $$\frac{\partial^2 u_i(s_1^*, \ldots, s_n^*)}{\partial s_i^2} < 0 \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \ldots, n.$$

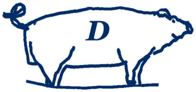
Potom je $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ *rovnovážným bodem hry* G*.*

Poznámka. V praxi se obvykle nalezne řešení soustavy rovnic

$$\frac{\partial u_i(s_1^*, \ldots, s_n^*)}{\partial s_i} = 0 \qquad \text{pro každé } i = 1, 2, \ldots, n$$

a pak se použijí jiné (například ekonomické) úvahy k ověření, že se skutečně jedná o rovnovážný bod.

4 DVOJMATICOVÉ HRY



Strategie	Stiskni páku		Seď u koryta
Stiskni páku	$(8,-2)$	→	$\boxed{(5,3)}$
Seď u koryta	$(10,-2)$	→	$(0,0)$

DVOJMATICOVÁ HRA

Je-li speciálně množina hráčů $Q = \{1, 2\}$ a prostory strategií S_1, S_2 jsou konečné množiny, hovoříme o **dvojmaticové hře**. Přestože se jedná jen o speciální případ, uvádíme zde základní definice z předchozí části znovu.

Definice 1. Dvojmaticovou hrou budeme rozumět hru dvou hráčů v normálním tvaru, kde

- Hráč 1 má konečnou množinu strategií $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$
- Hráč 2 má konečnou množinu strategií $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$
- Při volbě strategií (s_i, t_j) je výhra prvního hráče $a_{ij} = u_1(s_i, t_j)$ a výhra druhého hráče $b_{ij} = u_2(s_i, t_j)$; u_1, u_2 se nazývají **výplatní funkce**.

Hráč 2

	Strategie	t_1	t_2	$\dots$	t_n
	s_1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	$\dots$	(a_{1n}, b_{1n})
Hráč 1	s_2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	$\dots$	(a_{2n}, b_{2n})
	$\vdots$	$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$			
	s_m	(a_{m1}, b_{m1})	(a_{m2}, b_{m2})	$\dots$	(a_{mn}, b_{mn})

Hodnoty výplatních funkcí můžeme znázornit zvlášť pro jednotlivé hráče:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matice A se nazývá **matice hry hráče 1**, matice B se nazývá **matice hry hráče 2**.

Definice 2. Dvojice strategií (s^*, t^*) se nazývá **rovnovážný bod**, právě když platí:

$$u_1(s, t^*) \leq u_1(s^*, t^*) \qquad \text{pro každé } s \in S$$

a zároveň (4.1)

$$u_2(s^*, t) \leq u_2(s^*, t^*) \qquad \text{pro každé } t \in T.$$

Snadno se ověří, že je-li (s^*, t^*) rovnovážný bod, pak pro $a_{ij} = u_1(s^*, t^*)$, $b_{ij} = u_2(s^*, t^*)$ platí:

- a_{ij} je **největší prvek ve sloupci** j matice $A: a_{ij} = \max\limits_{1 \leq k \leq m} a_{kj}$
- b_{ij} je **největší prvek v řádku** i matice $B: b_{ij} = \max\limits_{1 \leq k \leq m} b_{kj}$

☛ ***Příklad 1***. Uvažujme hru určenou dvojmaticí:

Hráč 2

	Strategie	t_1	t_2
Hráč 1	s_1	$\boxed{\mathbf{(2,0)}}$	$(2,-1)$
	s_2	$(1,1)$	$(3,-2)$

Bod (s_1, t_1) je zřejmě rovnovážný, protože pokud by druhý hráč zvolil svou první strategii t_1 a první hráč se od strategie s_1 odchýlil, tj. zvolil by strategii s_2, pak by si nepolepšil: získal by 1 místo 2. Pokud by naopak první hráč zvolil strategii s_1 a druhý hráč se od t_1 odchýlil, pak by si nepolepšil: obdržel by -1 místo 0.

Bohužel, ne v každé hře existuje rovnovážný bod přímo v ryzích strategiích:

☞ ***Příklad 2***. Uvažujme hru určenou dvojmaticí:

		Hráč 2	
	Strategie	t_1	t_2
Hráč 1	s_1	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
	s_2	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

Žádný bod v této hře není rovnovážný (prověřte jednotlivé dvojice).

Tento problém odstraní tzv. **smíšené strategie**, které udávají **pravděpodobnosti**, s nimiž hráči volí své jednotlivé ryzí strategie, tj. prvky množin S, T.

Definice 3. **Smíšené strategie** hráčů 1 a 2 jsou vektory pravděpodobností $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$, pro které platí:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= (p_1, p_2, \dots p_m); \quad p_i \geq 0, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1, \\ \boldsymbol{q} &= (q_1, q_2, \dots q_n); \quad q_i \geq 0, \quad q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Smíšená strategie je tedy pro každého hráče vektor, jehož i-tá složka udává pravděpodobnost, s níž hráč volí i-tou strategii ze svého prostoru strategií. Je to tedy opět jistá strategie, kterou bychom mohli pro prvního hráče popsat takto:

„použij strategii $s_1 \in S$ *s pravděpodobností* p_1,
. . . . . .
použij strategii $s_m \in S$ *s pravděpodobností* p_m.“

Podobně pro druhého hráče.

Uvědomme si, že ryzí strategie odpovídají smíšeným strategiím

$$(1, 0, \dots, 0), \ (0, 1, \dots, 0), \ \dots \ (0, 0, \dots, 1).$$

Strategie	t_1	$\dots$	t_j	$\dots$	t_n	
s_1	(a_{11}, b_{11})	$\dots$	(a_{1j}, b_{1j})	$\dots$	(a_{1n}, b_{1n})	p_1
$\vdots$	....					
s_i	(a_{i1}, b_{i1})	$\dots$	(a_{ij}, b_{ij})	$\dots$	(a_{in}, b_{in})	p_i
$\vdots$	....					
s_m	(a_{m1}, b_{m1})	$\dots$	(a_{mj}, b_{mj})	$\dots$	(a_{mn}, b_{mn})	p_m
	q_1	$\dots$	q_j	$\dots$	q_n	

Definice 4. Očekávané hodnoty výhry jsou definovány vztahy:

$$\begin{aligned} &\text{Hráč 1:} \quad && \pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij} \\ &\text{Hráč 2:} \quad && \pi_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j b_{ij} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Věta 1 (Nash). *Ve smíšených strategiích má každá konečná hra aspoň jeden rovnovážný bod* $(p^*, \boldsymbol{q}^*)$, *tj. pro všechny smíšené strategie* $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ *platí následující nerovnosti:*

$$\pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}^*) \leq \pi_1(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) \qquad \text{a} \qquad \pi_2(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}) \leq \pi_2(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*).$$

Důkaz.

Pro libovolnou dvojici smíšených strategií $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ definujme

$$p'_i = \frac{p_i + c_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})}{1 + \sum_k c_k(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})}, \qquad q'_j = \frac{q_j + d_j(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})}{1 + \sum_k d_k(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})},$$

kde

$$c_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \max\{\pi_1(s_i, \boldsymbol{q}) - \pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), 0\}, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$d_j(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \max\{\pi_2(\boldsymbol{p}, t_j) - \pi_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), 0\}, \quad j = 1, \ldots, n$$

Zřejmě platí:
$\sum_k p'_i = 1$, $p'_i \geq 0$ pro všechna i; $\sum_k q'_j = 1$, $q'_j \geq 0$ všechna j.

$T(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{p}', \boldsymbol{q}')$:

$$p_i' = \frac{p_i + c_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})}{1 + \sum_k c_k(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})}, \qquad q_j' = \frac{q_j + d_j(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})}{1 + \sum_k d_k(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})},$$

kde

$$c_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \max\{\pi_1(s_i, \boldsymbol{q}) - \pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), 0\}, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$d_j(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \max\{\pi_2(\boldsymbol{p}, t_j) - \pi_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), 0\}, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$T : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1].$$

Dokážeme:

$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ **je rovnovážný bod** $\Leftrightarrow T(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$

$\Longrightarrow$

$\boldsymbol{p}$ je rovnovážná strategie $\Rightarrow \forall i : c_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}$

$\boldsymbol{q}$ je rovnovážná strategie $\Rightarrow \forall j : d_j(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{q}' = \boldsymbol{q}$

$\Longleftarrow$ Předpokládejme, že (p, q) je pevný bod zobrazení T.

Ukážeme:

$$\exists i : p_i > 0, \quad c_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \max\{\pi_1(s_i, \boldsymbol{q}) - \pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), 0\} = 0.$$

Sporem:

Jestliže $\forall i$, kde $p_i > 0$, platí $\pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) < \pi_1(s_i, \boldsymbol{q})$, pak

$$\sum_i p_i \pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) < \sum_i p_i \pi_1(s_i, \boldsymbol{q}), \text{ tj.}$$

$$\pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) < \sum_i p_i \pi_1(s_i, \boldsymbol{q}),$$

ale z definice očekávané výplaty plyne

$$\pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_i p_i \pi_1(s_i, \boldsymbol{q}).$$

Proto musí existovat takové i, že $\pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \geq \pi_1(s_i, \boldsymbol{q})$, a tedy $c_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 0$.

$\Longleftarrow$ **Předpokládejme, že (p, q) je pevný bod T.**

Již jsme ukázali:

$$\exists i : p_i > 0, \quad c_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \max\{\pi_1(s_i, \boldsymbol{q}) - \pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), 0\} = 0.$$

Pro toto i je

$$p_i' = \frac{p_i + 0}{1 + \sum_k c_k(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})}$$

$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ pevný bod $\Rightarrow \; p_i' = p_i \; \Rightarrow \sum_k c_k(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 0.$

$$\forall k : c_k \geq 0 \Rightarrow \forall k : c_k = 0$$

$$\Rightarrow \forall k : \pi_1(s_k, \boldsymbol{q}) \leq \pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{p}$ **je rovnovážná strategie**

Podobně: $\boldsymbol{q}$ **je rovnovážná strategie**

$\Longleftarrow$ **Předpokládejme, že (p, q) je pevný bod T.**

Již jsme ukázali:

$$\exists i : p_i > 0, \quad c_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \max\{\pi_1(s_i, \boldsymbol{q}) - \pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), 0\} = 0.$$

Pro toto i je

$$p_i' = \frac{p_i + 0}{1 + \sum_k c_k(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})}$$

$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ pevný bod $\Rightarrow \; p_i' = p_i \; \Rightarrow \sum_k c_k(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 0.$

$$\forall k : c_k \geq 0 \Rightarrow \forall k : c_k = 0$$

$$\Rightarrow \forall k : \pi_1(s_k, \boldsymbol{q}) \leq \pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$$

$\Rightarrow$ **$\boldsymbol{p}$ je rovnovážná strategie**

Podobně: **$\boldsymbol{q}$ je rovnovážná strategie**

Poslední krok: **Dokázat existenci pevného bodu.**

$\longrightarrow$ **Brouwerova věta o pevném bodě**

Hledání rovnovážných strategií

Při hledání rovnovážných strategií lze u dvojmaticových her v některých případech eliminovat zjevně nevýhodné, tzv. dominované strategie:

Definice 5. Strategie $s_i \in S$ hráče 1 se nazývá **dominovaná** jinou strategií $s_k \in S$, jestliže pro každou strategii $t \in T$ hráče 2 platí:

$$u_1(s_k, t) \geq u_1(s_i, t);$$

Analogicky pro druhého hráče.

Postupná eliminace dominovaných strategií

V některých případech existují v dvojmatici dominované strategie. Zbude-li po jejich vyškrtání v dvojmatici jediný prvek, jedná se o rovnovážný bod. Zbude-li více prvků, získali jsme alespoň jednodušší dvojmatici.

☛ ***Příklad 3***. Uvažujme dvojmaticovou hru určenou dvojmaticí:

			Hráč 2	
	Strategie	t_1	t_2	t_3
	s_1	$(1,0)$	$(1,3)$	$(3,0)$
Hráč 1	s_2	$(0,2)$	$(0,1)$	$(3,0)$
	s_3	$(0,2)$	$(2,4)$	$(5,3)$

Strategie s_2 prvního hráče je dominovaná strategií $s_3,$ neboť pro každou strategii druhého hráče získá první hráč více při volbě strategie s_3 než při volbě s_2. Stejně tak je strategie t_3 druhého hráče dominována strategií t_2. Protože racionální hráč 1 určitě nebude volit dominovanou strategii s_2 a racionální hráč 2 určitě nebude volit dominovanou strategii $t_3,$ zredukovalo se rozhodování takto:

		Hráč 2	
	Strategie	t_1	t_2
Hráč 1	s_1	$(1,0)$	$(1,3)$
	s_3	$(0,2)$	$\boxed{(2,4)}$

Strategie t_1 je dominovaná strategií t_2, druhý hráč tedy zvolí t_2. První hráč se nyní rozhoduje mezi hodnotami ve druhém sloupci dvojmatice, a protože $1 < 2$, zvolí strategii s_3. Rovnovážný bod v dané hře je proto (s_3, t_2) – rozmyslete si, že v původní dvojmatici skutečně jednostranné odchýlení od rovnovážné strategie nepřinese výhodu tomu, kdo se odchýlil.

☛ ***Příklad 4***. Investor chce vybudovat dva hotely. Jeden nazveme Velký (zkratka V); ze získání zakázky na něj se očekává zisk ve výši 15 milionů. Druhý nazveme Malý (zkratka M); ze získání zakázky na něj se očekává zisk ve výši 9 milionů. O získání zakázek se ucházejí dvě firmy, které označíme jako 1 a 2. Žádná z firem nemá kapacitní možnosti na vybudování obou hotelů v plném rozsahu. Každá z firem se může u investora ucházet buď o stavbu jednoho z hotelů nebo nabídnout kooperaci na obou. Investor musí prostřednictvím obou firem stavbu hotelů realizovat a podle došlých nabídek rozdělí zakázky takto:

1. Jestliže se o jeden hotel uchází pouze jedna firma, získá celou tuto zakázku.
2. Jestliže se o jeden hotel ucházejí obě firmy a o druhý žádná, nabídne investor kooperaci oběma firmám na obou hotelech s tím, že se o provedení prací i o zisky budou dělit stejným dílem.
3. Jestliže se jedna z firem uchází o stavbu celého hotelu a druhá nabízí kooperaci na obou, získá firma, která nabízí realizaci celé stavby 60% a druhá 40%, jde-li o V. Jde-li o M, získá firma, která nabízí celou realizaci, 80% a druhá 20%. Na zbývajícím hotelu pak firmy kooperují stejným dílem a o zisk se dělí napůl.

Ať se firmy rozhodnou jakkoli, bude mezi ně vždy rozdělen celý potenciální zisk 15+9=24 milionů. Jaké nabídky je výhodné investorovi učinit, aby byl maximalizován celkový zisk ze zakázek?

Řešení

Výsledky při jednotlivých volbách strategií lze vystihnout pomocí dvojmatice:

			Firma 2	
	Strategie	Velký	Malý	Kooperace
Firma 1	Velký	$\boxed{(12, 12)}$	$(15, 9)$	$(13,5; 10,5)$
	Malý	$(9, 15)$	$(12, 12)$	$(14,7; 9,3)$
	Kooperace	$(10,5; 13,5)$	$(9,3; 14,7)$	$(12, 12)$

Strategie „kooperace“ je pro obě firmy dominovaná strategií „velký“, můžeme proto vyškrtnout třetí řádek a třetí sloupec – pro firmu je výhodnější v každé situaci, ať už se protivník zachová jakkoli, zvolit první strategii. K rozhodování nyní zbývá pouze dvojmatice se dvěma řádky a dvěma sloupci (strategie „velký“ a „malý“). Zde je strategie „malý“ dominovaná strategií „velký“ a může být proto také vyškrtnuta. Pro obě firmy tak zbyde strategie „velký“ – skutečně lze snadno ověřit, že se jedná o rovnovážný bod.

Vzájemně nejlepší odpovědi

Rovnovážné strategie s^*, t^* tvořící rovnovážný bod (s^*, t^*) jsou podle definice vždy nejlepší odpovědí jedna na druhou v tom smyslu, že zvolí-li první hráč svou rovnovážnou strategii s^*, pak si druhý hráč odchýlením od t^* nemůže polepšit, podobně první si nemůže polepšit odchýlením od s^*, zvolí-li druhý strategii t^*.

Přesněji řečeno:

Definice 6. **Nejlepší odpovědí hráče 1 na strategii** t **hráče 2** se rozumí množina

$$R_1(t) = \{s^* \in S;\ u_1(s^*, t) \geq u_1(s, t) \text{ pro každé } s \in S\}\,.$$

Podobně **nejlepší odpovědí hráče 2 na strategii** s **hráče 1** se rozumí množina

$$R_2(s) = \{t^* \in T;\ u_2(s, t^*) \geq u_2(s, t) \text{ pro každé } t \in T\}\,.$$

Má-li každý z hráčů na výběr pouze dvě strategie, představují množiny R_1 a R_2 křivky v rovině – tzv. **reakční křivky**.

Věta 2. (s^*, t^*) *je rovnovážný bod, právě když platí:*

$$s^* = R_1(t^*) \qquad \text{a zároveň} \qquad t^* = R_2(s^*).$$

Důkaz. Podle definice je $s^* = R_1(t^*)$ právě když pro každé $s \in S$ platí:

$$u_1(s^*, t^*) \geq u_1(s, t^*),$$

podobně $t^* = R_2(s^*)$ právě když pro každé $t \in T$ platí:

$$u_2(s^*, t^*) \geq u_1(s^*, t).$$

Dohromady tak získáme přesně podmínku pro rovnovážný bod.
□

Hledáme-li rovnovážný bod, můžeme postupovat tak, že sestrojíme **reakční křivky** a nalezneme jejich **průsečík**.

☛ ***Příklad 5***. Pro hru

Hráč 2

	Strategie	t_1	t_2
Hráč 1	s_1	$\boxed{\mathbf{(2,0)}}$	$(2,-1)$
	s_2	$(1,1)$	$(3,-2)$

je nejlepší odpovědí hráče 1 na strategii t_1 hráče 2 strategie s_1, tj. $R_1(t_1) = s_1$, podobně nejlepší odpovědí hráče 1 na strategii t_2 je strategie s_2, tj. $R_1(t_2) = s_2$.

Podobně pro druhého hráče:

$$R_2(s_1) = t_1, \qquad R_2(s_2) = t_1.$$

Dvojici strategií, které jsou navzájem nejlepšími odpověďmi, se v tomto případě podaří nalézt: je to (s_1, t_1) a jak jsme viděli výše, jedná se o rovnovážný bod.

☛ ***Příklad 6***. Pro hru

Hráč 2

	Strategie	t_1	t_2
Hráč 1	s_1	$(1,-1)$	$(-1,1)$
	s_2	$(-1,1)$	$(1,-1)$

je

$$R_1(t_1) = s_1, \quad R_1(t_2) = s_2.$$

$$R_2(s_1) = t_2, \quad R_2(s_2) = t_1.$$

Žádná dvojice strategií není v tomto případě nejlepší odpovědí jedna na druhou a jak již bylo zmíněno, je třeba uvažovat smíšené strategie.

Hráč 2

Hráč 1

Strategie	t_1	t_2	
s_1	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$\ldots\ldots\ \boldsymbol{p}$
s_2	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$\ldots\ldots\ \boldsymbol{1-p}$
	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{1-q}$	

Očekávané hodnoty výhry jednotlivých hráčů jsou následující:

$$
\begin{aligned}
\pi_1(p,q) &= 1\cdot p\cdot q - 1\cdot p\cdot(1-q) - 1\cdot(1-p)\cdot q + 1\cdot(1-p)\cdot(1-q)\\
&= pq - p + pq - q + pq + 1 - p - q + pq = 4pq - 2p - 2q + 1\\
&= p(4q-2) - 2q + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi_2(p,q) &= -1\cdot p\cdot q + 1\cdot p\cdot(1-q) + 1\cdot(1-p)\cdot q - 1\cdot(1-p)\cdot(1-q)\\
&= -pq + p - pq + q - pq - 1 + p + q - pq = -4pq + 2q + 2p - 1\\
&= q(-4p+2) + 2p - 1
\end{aligned}
$$

Hledejme nejlepší odpovědi hráče 1 na různé hodnoty q :

Je-li $\boxed{0 \leq q < \frac{1}{2},}$ pak $\pi_1(p, q)$ je pro pevnou hodnotu q lineární funkce se zápornou směrnicí, která je **klesající**. Největší hodnoty proto bude nabývat pro nejmenší možnou hodnotu p, tedy pro $p = 0$; v tomto případě platí: $R_1(q) = 0$.

Je-li $\boxed{q = \frac{1}{2},}$ pak $\pi_1(p, \frac{1}{2}) = 0$ je **konstantní funkce**, pro kterou je každá hodnota zároveň největší i nejmenší – hráč 1 je proto indiferentní mezi oběma strategiemi, $R_1(\frac{1}{2}) = \langle 0, 1 \rangle$.

Je-li $\boxed{\frac{1}{2} < q \leq 1,}$ pak $\pi_1(p, q)$ je pro pevnou hodnotu q lineární funkce s kladnou směrnicí, která je **rostoucí**. Největší hodnoty proto bude nabývat pro největší možnou hodnotu p, tedy pro $p = 1$; v tomto případě platí: $R_1(q) = 1$.

Celkem tedy:

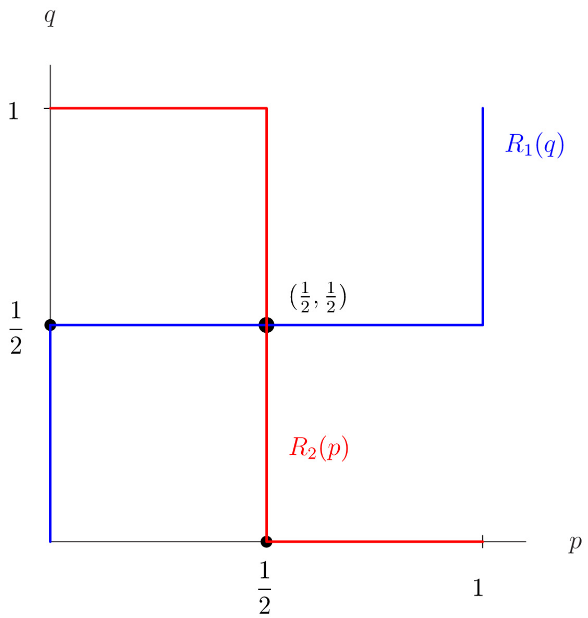
$$\pi_1(p,q) = p(4q-2) - 2q + 1, \qquad \pi_2(p,q) = q(-4p+2) + 2p - 1$$

$$R_1(q) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad 0 \le q < \frac{1}{2} \\ \langle 0, 1 \rangle & \text{pro} \quad q = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{pro} \quad \frac{1}{2} < q \le 1 \end{cases}$$

Podobně pro druhého hráče:

$$R_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad 0 \le p \le \frac{1}{2} \\ \langle 0, 1 \rangle & \text{pro} \quad p = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pro} \quad \frac{1}{2} \le p \le 1 \end{cases}$$

Křivky můžeme znázornit v rovině takto:



Rovnovážný bod je tedy

$$\left(\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right), \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right).$$

Budou-li se hráči držet těchto strategií, bude očekávaná výhra každého z nich rovna nule.

Užitečný princip při smíšených strategiích:

Smíšená strategie $s^* = (p_1, \ldots, p_m)$ *je nejlepší odpovědí na* t^*, *právě když každá z ryzích strategií, jimž* s^* *přiřazuje nenulovou pravděpodobnost, je nejlepší odpovědí na* t^*.
Hráč, který optimalizuje použitím smíšené strategie, je proto indiferentní mezi všemi ryzími strategiemi, jimž daná smíšená strategie přiřazuje nenulovou pravděpodobnost.

(Uvědomme si, že kdyby byla například ryzí strategie s_1 v dané situaci výhodnější než s_2, pak kdykoli bychom se chystali použít s_2, bylo by lepší použít s_1 – nejednalo by se tedy o rovnovážný bod.)

☛ *Příklad 7*.

Hráč 2

Hráč 1

Strategie	t_1	t_2
s_1	$(4, -4)$	$(-1, -1)$
s_2	$(0, 1)$	$(1, 0)$

Očekávané výhry:

$$\begin{aligned}\pi_1(p,q) &= 4pq - p(1-q) + 0 + (1-p)(1-q)\\ &= p(6q-2) - q + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2(p,q) &= -4pq - p(1-q) + (1-p)q + 0\\ &= q(-4p+1) - p\end{aligned}$$

Hledejme nejlepší odpovědi hráče 1 na různé volby pravděpodobností q hráče 2:

Je-li $\boxed{0 \le q < \frac{1}{3},}$ pak $\pi_1(p, q)$ je pro pevnou hodnotu q lineární funkce se zápornou směrnicí, která je **klesající**. Největší hodnoty proto bude nabývat pro nejmenší možnou hodnotu p, tedy pro $p = 0$; v tomto případě platí: $R_1(q) = 0$.

Je-li $\boxed{q = \frac{1}{3},}$ pak $\pi_1(p, \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$; je to tedy **konstantní funkce**, pro kterou je každá hodnota zároveň největší i nejmenší – hráč 1 je proto indiferentní mezi oběma strategiemi, $R_1(\frac{1}{3}) = \langle 0, 1 \rangle$.

Je-li $\boxed{\frac{1}{3} < q \le 1,}$ pak $\pi_1(p, q)$ je pro pevnou hodnotu q lineární funkce s kladnou směrnicí, která je **rostoucí**. Největší hodnoty proto bude nabývat pro největší možnou hodnotu p, tedy pro $p = 1$; v tomto případě platí: $R_1(q) = 1$.

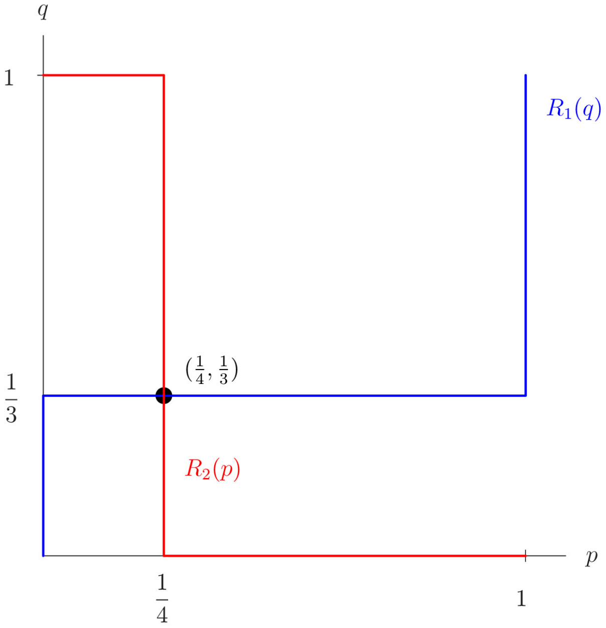
Celkem tedy:

$$R_1(q) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad 0 \leq q < \frac{1}{3} \\ \langle 0, 1 \rangle & \text{pro} \quad q = \frac{1}{3} \\ 1 & \text{pro} \quad \frac{1}{3} < q \leq 1 \end{cases}$$

Podobně pro druhého hráče bude:

$$R_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad 0 \leq p \leq \frac{1}{4} \\ \langle 0, 1 \rangle & \text{pro} \quad p = \frac{1}{4} \\ 0 & \text{pro} \quad \frac{1}{4} \leq p \leq 1 \end{cases}$$

Křivky můžeme znázornit v rovině takto:



Rovnovážný bod je tedy

$$\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right).$$

Budou-li se hráči držet těchto strategií, bude očekávaná výhra prvního hráče $\frac{2}{3}$ a druhého $-\frac{1}{4}$.

Na základě principu, že hráč, který optimalizuje použitím smíšené strategie, je indiferentní mezi všemi ryzími strategiemi, jimž daná smíšená strategie přiřazuje nenulovou pravděpodobnost, lze hledání rovnovážného bodu podstatně zjednodušit (reakční křivky nám však slouží pro lepší pochopení, proč uvedený princip funguje):

Má-li být q rovnovážnou strategií hráče 2, musí být hráč 1 indiferentní mezi svými ryzími strategiemi s_1, s_2. Očekávaná hodnota výhry proto musí být stejná pro obě ryzí strategie hráče 1 při smíšené strategii $(q, 1-q)$ hráče 2:

$$\pi_1(1, q) = 4q - (1-q) = 0 + (1-q) = \pi_1(0, q)$$

$$6q = 2 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{3}$$

Podobně má-li být p rovnovážnou strategií hráče 1, musí být hráč 2 indiferentní mezi svými ryzími strategiemi t_1, t_2. Očekávaná hodnota výhry proto musí být stejná pro obě ryzí strategie hráče 2 při smíšené strategii $(p, 1-p)$ hráče 1:

$$\pi_2(p, 1) = -4p + (1-p) = -p + 0 = \pi_2(p, 0)$$

$$1 = 4p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{4}$$

Opět jsme došli k témuž rovnovážnému bodu $\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$.

Obecný návod pro nalezení smíšeného rovnovážného bodu:

- *Uvažujme dvojmaticovou hru G s maticemi A, B.*
- *Očekávané hodnoty výplatních funkcí zavedené vztahem (4.3) lze vyjádřit jako funkce proměnných $p_1, p_2, \dots p_{m-1}; q_1, q_2, \dots q_{n-1}$, a to na základě vztahů $p_m = 1 - (p_1 + p_2 + \cdots + p_{m-1})$, $q_n = 1 - (q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1})$.*
- *Uvažujme soustavu rovnic:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial p_i} &= 0 \quad \text{pro všechna } i = 1, 2, \dots, m-1 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q_j} &= 0 \quad \text{pro všechna } j = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Potom každé řešení soustavy (4.4), $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$; $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, kde

$$p_i \geq 0, \qquad q_j \geq 0 \qquad \text{pro všechna } i, j$$

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m-1} \leq 1, \qquad q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1} \leq 1,$$

představuje **rovnovážný bod hry ve smíšených strategiích***.*

☛ ***Příklad 8***. Nalezněme rovnovážné strategie ve hře „kámen-nůžky-papír“:

Hráč 2

		Kámen	Nůžky	Papír	
	Kámen	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)	p_1
Hráč 1	Nůžky	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)	p_2
	Papír	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)	$1 - p_1 - p_2$
		q_1	q_2	$1 - q_1 - q_2$	

Očekávané hodnoty výhry:

$$\pi_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = p_1q_2 - p_1(1-q_1-q_2) - p_2q_1 + p_2(1-q_1-q_2) + (1-p_1-p_2)q_1 - (1-p_1-p_2)q_2$$

$$\begin{aligned} \pi_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) &= \ \ 3p_1q_2 - 3p_2q_1 - p_1 + p_2 + q_1 - q_2 \\ \pi_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) &= -3p_1q_2 + 3p_2q_1 + p_1 + p_2 - q_1 + q_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = \ \ 3q_2 - 1 = 0 \qquad \frac{\partial \pi_2}{\partial q_1} = \ \ 3p_2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_2} = -3q_1 + 1 = 0 \qquad \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = -3p_1 + 1$$

Řešení: $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$, proto

$$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \big((\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}),\ (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})\big)$$

Hry s více rovnovážnými body

Zatím jsme se setkávali s příklady, kdy existoval právě jeden rovnovážný bod, ať již v ryzích strategiích či ve strategiích smíšených. Často však existuje více rovnovážných bodů a objevuje se otázka, který z nich uvažovat jako optimální.

Začněme několika definicemi.

Definice 7. Nechť $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ je rovnovážný bod dvojmaticové hry G, pro který platí:

$$\pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \geq \pi_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) \qquad \text{a zároveň} \qquad \pi_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \geq \pi_2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$$

pro libovolný rovnovážný bod $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ hry G. Potom se $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ nazývá **dominujícím rovnovážným bodem hry** G.

Existuje-li ve hře jediný rovnovážný bod, je zřejmě dominující (viz příklady výše).

☛ ***Příklad 9***. Uvažujme hru danou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} \underline{(3,2)} & (-1,1) \\ (-2,0) & \boxed{(6,5)} \end{pmatrix}$$

Existují dva rovnovážné body v ryzích strategiích, a to (s_1, t_1) a (s_2, t_2). Druhý z nich dominuje prvnímu, neboť pro hodnoty výplatních funkcí platí: $6 > 3$ a $5 > 2$. Pro oba hráče je nejvýhodnější zvolit druhou strategii.

☞ ***Příklad 10***. Uvažujme hru danou dvojmaticí

Hráč 2

		t_1	t_2	t_3
Hráč 1	s_1	(-2,-2)	(-1,0)	$\boxed{(8,6)}$
	s_2	(0,-1)	$\underline{(5,5)}$	(0,0)
	s_3	$\boxed{(8,6)}$	(0,-1)	(-2,-2)

V této hře existují tři ryzí rovnovážné body: $(s_1, t_3), (s_2, t_2), (s_3, t_1)$. První a poslední z této trojice jsou dominující. Protože však hráči nemají možnost se domluvit, mohlo by se stát, že i při nejlepší vůli by zvolili strategie (s_1, t_1) nebo (s_3, t_3) a dosáhli by tak těch nejhorších možných výsledků.

Definice 8. Nechť $(\boldsymbol{p}^{(j)}, \boldsymbol{q}^{(j)})$, $j \in J$, jsou rovnovážné body dvojmaticové hry G. Tyto body se nazývají **záměnné**, jestliže se hodnota výplatních funkcí $\pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ a $\pi_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ nezmění, dosadíme-li za $\boldsymbol{p}$ libovolné $\boldsymbol{p}^{(j)}$, $j \in J$ a za $\boldsymbol{q}$ libovolné $\boldsymbol{q}^{(j)}$, $j \in J$.

✒ ***Příklad 11***. Pozměňme dvojmatici z předchozího příkladu:

Hráč 2

		t_1	t_2	t_3
	s_1	$\boxed{(8,6)}$	(-1,0)	$\boxed{(8,6)}$
Hráč 1	s_2	(0,-1)	$\underline{(5,5)}$	(0,0)
	s_3	$\boxed{(8,6)}$	(0,-1)	$\boxed{(8,6)}$

Nyní jsou všechny dominující rovnovážné body (s_1, t_1), (s_1, t_3), (s_3, t_1) a (s_3, t_3) záměnné a nemůže nastat nepříjemnost z předchozího příkladu.

Tato skutečnost motivuje následující definici.

Definice 9. Optimálními body hry G se nazývají všechny záměnné dominující rovnovážné body dané hry G. Existují-li v dané hře tyto body, nazývá se hra **řešitelná**.

☛ ***Příklad 12*** – **Konflikt typu manželský spor.**

Představme si manželský pár, v němž mají partneři poněkud odlišné názory na nejlepší využití volného večera: žena dává přednost návštěvě boxu, muž fotbalu. Půjdou-li na box, přinese to větší užitek ženě a menší muži, půjdou-li na fotbal, bude tomu naopak. Půjde-li však každý jinam, bude výsledkem celkové rozladění a užitek bude pro každého z nich menší, než by tomu bylo v případě návštěvy méně preferované akce. Situaci si můžeme znázornit například následující dvojmaticí popisující užitek pro ženu a muže při jednotlivých kombinacích trávení volného večera:

$$\begin{array}{cc|ccc} & & & \text{Pepíček} & \\ & \text{Strategie} & \text{Box} & & \text{Balet} \\ \hline & \text{Box} & \boxed{(\mathbf{2},\mathbf{1})} & \leftarrow & (0,0) \\ \text{Maruška} & & \uparrow & & \downarrow \\ & \text{Balet} & (0,0) & \rightarrow & \boxed{(1,2)} \end{array}$$

Rovnovážné body v ryzích strategiích: (Box, Box), (Balet, Balet)

Rovnovážný bod ve smíšených strategiích:

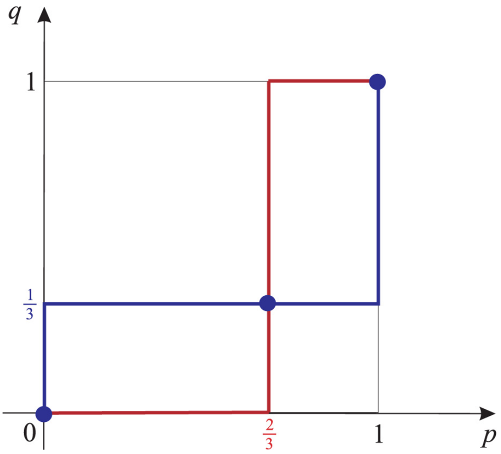
$$\pi_1(p,q) = 2pq + 1(1-p)(1-q) = 3pq - p - q + 1$$

$$\pi_2(p,q) = 1pq + 2(1-p)(1-q) = 3pq - 2p - 2q + 1$$

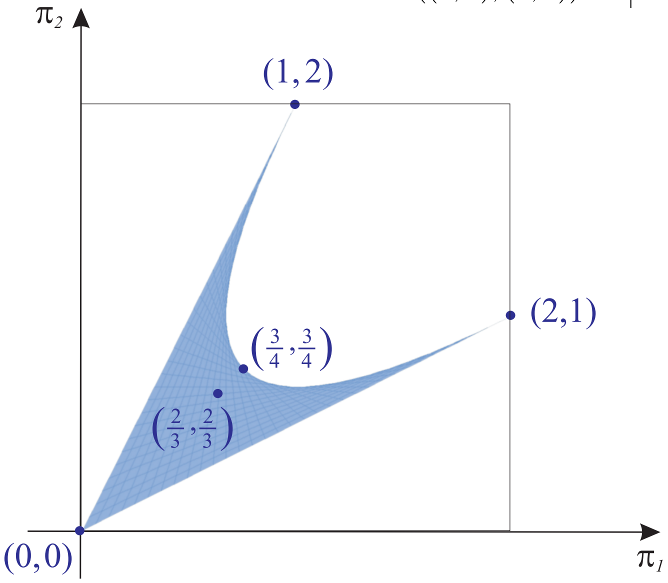
$$\pi_1(p,q) = p(3q-1) - q + 1, \qquad \pi_2(p,q) = q(3p-2) - 2p + 1$$

Reakční křivky:

$$R_1(q) = \begin{cases} 0 & \dots\ q \in \langle 0, \frac{1}{3}) \\ \langle 0, 1 \rangle & \dots\ q = \frac{1}{3} \\ 1 & \dots\ q \in (\frac{1}{3}, 1\rangle \end{cases} \qquad R_2(p) = \begin{cases} 0 & \dots\ p \in \langle 0, \frac{2}{3}) \\ \langle 0, 1 \rangle & \dots\ p = \frac{2}{3} \\ 1 & \dots\ p \in (\frac{2}{3}, 1\rangle \end{cases}$$



Rovnovážný bod	**Očekávaná výhra**
$((1,0),(1,0))$	$(2,1)$
$((\frac{1}{3},\frac{2}{3}),(\frac{2}{3},\frac{1}{3}))$	$(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$
$((0,1),(0,1))$	$(2,1)$



Tato hra není řešitelná ve smyslu definice 8, neboť žádný z rovnovážných bodů není dominující.

☛ *Příklad 13* – Samaritánovo dilema

Představme si, že Ministerstvo práce a sociálních věcí řeší problém, do jaké míry podporovat nezaměstnané. Jestliže se dotyčný snaží najít práci, pak je výhodnější jej podpořit, aby se mohl například rekvalifikovat a získat lépe placené místo – státu pak odvede vyšší daně. Jestliže se však nikterak nesnaží, je výhodnější jej nepodpořit (nepočítáme-li případný nárůst kriminality). Z hlediska nezaměstnaného je výhodné hledat práci jen tehdy, když nemůže být na státní podpoře.

Uvažujme například následující hodnoty odpovídající jednotlivým situacím:

$$
\begin{array}{ll|ccc}
 & & & \textbf{Nezaměstnaný} & \\
 & \text{Strategie} & \text{Snažit se} & & \text{Flákat se} \\
\hline
 & \text{Podpořit} & (\mathbf{3},\mathbf{2}) & \rightarrow & (-1,3) \\
\textbf{Ministerstvo} & & \uparrow & & \downarrow \\
 & \text{Nepodpořit} & (-1,1) & \leftarrow & (0,0)
\end{array}
$$

Uvědomme si, že podobný problém známe i na ”soukromé” úrovni: rodiče se například někdy rozhodují, do jaké míry mají pomoci lenošnému dítěti.

Řešení.

Nezaměstnaný

	Strategie	Snažit se		Flákat se
	Podpořit	$(\mathbf{3},\mathbf{2})$	$\rightarrow$	$(-1, 3)$
Ministerstvo		$\uparrow$		$\downarrow$
	Nepodpořit	$(-1, 1)$	$\leftarrow$	$(0, 0)$

Snadno ověříme, že ve hře neexistují ryzí rovnovážné strategie.

Budeme proto hledat strategie smíšené. Označíme-li jako obvykle p pravděpodobnost, s níž ministerstvo zvolí strategii *podpořit*, a q pravděpodobnost, s níž nezaměstnaný zvolí strategii *flákat se*, pak jsou očekávané výhry jednotlivých účastníků následující:

$$\pi_1(p,q) = q(5p-1) - q, \qquad \pi_2(p,q) = q(-2p+1) + 3p$$

Rovnovážné strategie jsou pak

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

☛ *Příklad 14* – Boj pohlaví

Samička

	Strategie	Zdrženlivá		Nevázaná
Sameček	Věrný	$(\mathbf{2}, \mathbf{2})$	→	$(5, 5)$
		↑		↓
	Záletník	$(0, 0)$	←	$(15, -5)$

Řešení.

Rovnovážné strategie:

$$\left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right), \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right).$$

Tato hra je podrobněji diskutována v kapitole 7 Evoluční teorie her (klikněte pro odkaz)

✒ *Příklad 15* – Bitva o Bismarckovo moře

Jižní Pacifik, 1943: Generál Imamura má za úkol transport japonského vojska přes Bismarckovo moře do Nové Guinei, generál Kenney chce transporty bombardovat. Imamura si musí vybrat mezi kratší severní trasou a delší trasou jižní, Kenney musí rozhodnout, kam má poslat letadla, aby hledala Japonce.

Situaci lze popsat následující dvojmaticí:

$$\begin{array}{cc|ccc}
 & & & \textbf{Imamura} & \\
 & \text{Strategie} & \text{Severní (kratší)} & & \text{Jižní (delší)} \\ \hline
 & \text{Severní} & (2,\ -2) & \leftrightarrow & (2,\ -2) \\
\textbf{Kenney} & & \uparrow & & \downarrow \\
 & \text{Jižní} & (1, -1) & \leftarrow & (3, -3)
\end{array}$$

Řešení.
Rovnovážný bod: severní trasa pro oba

5 ANTAGONISTICKÉ HRY

Antagonistický konflikt je rozhodovací situace, v níž vystupují dva inteligentní rozhodovatelé, kteří se po volbě svých rozhodnutí rozdělí o pevnou částku, jejíž výše nezávisí na tom, jaká rozhodnutí zvolili.

Matematickým modelem antagonistického konfliktu je **hra v normálním tvaru s konstantním součtem**:

$$\{Q = \{1, 2\}; S, T; u_1(s, t), u_2(s, t)\}$$

$$u_1(s, t) + u_2(s, t) = \text{konst.} \quad \text{pro každé } (s, t) \in S \times T$$

Definice 1. Strategie s^*, t^* se nazývají **rovnovážné** ve hře (5), platí-li pro každé $s \in S$ a každé $t \in T$:

$$u_1(s, t^*) \leq u_1(s^*, t^*) \quad \text{a zároveň} \quad u_2(s^*, t) \leq u_2(s^*, t^*)$$

Je-li speciálně součet ve hře **nulový**, budeme používat značení

$$u_1(s, t) = u_2(s, t) = u(s, t);$$

model tedy bude vypadat takto:

$$\{Q = \{1, 2\}; S, T; u(s, t)\} \tag{5.1}$$

Pro **rovnovážné strategie** s^*, t^* ve hře s nulovým součtem musí platit:

$$u(s, t^*) \leq u(s^*, t^*) \leq u(s^*, t) \qquad \text{pro všechna } s \in S,\ t \in T. \tag{5.2}$$

Hodnota $u(s^*, t^*)$ se nazývá **cena hry**.

Lze dokázat, že ke každé hře tvaru (5) s konstantním součtem lze přiřadit hru v normálním tvaru s **nulovým součtem**, která je s původní hrou **strategicky ekvivalentní**, tj. každá dvojice strategií s, t, které jsou rovnovážné v původní hře, představuje dvojici rovnovážných strategií i v příslušné hře s nulovým součtem a naopak. Přesněji:

Věta 1. *Nechť (5) je hra s konstantním součtem rovným K. Potom s^*, t^* jsou rovnovážné strategie ve hře (5) tehdy a jen tehdy, jsou-li s^*, t^* rovnovážné strategie ve hře s nulovým součtem (5.1), kde*

$$u(s,t) = u_1(s,t) - u_2(s,t).$$

MATICOVÉ HRY

Hru dvou hráčů s nulovým součtem a konečnými prostory strategií

$$S = \{s_1, s_2, \dots s_m\}, \quad T = \{t_1, t_2, \dots t_n\} \tag{5.3}$$

lze zadat pomocí **matice** $A =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(s_1, t_1) & u_1(s_1, t_2) & \dots & u_1(s_1, t_l) \\ u_1(s_2, t_1) & u_1(s_2, t_2) & \dots & u_1(s_2, t_l) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1(s_k, t_1) & u_1(s_k, t_2) & \dots & u_1(s_k, t_l) \end{pmatrix}$$

jejíž prvky udávají hodnoty výplatní funkce prvního hráče (výplatní funkce druhého hráče má vždy opačnou hodnotu): prvek a_{ij} je roven hodnotě výplatní funkce prvního hráče, zvolil-li strategii s_i a protivník zvolil strategii t_j. Pro takto zadané hry se používá označení **maticové hry**.

Rovnovážné strategie v maticové hře

První hráč pro každou svou strategii s_i, tj. pro každý řádek $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ matice, nalezne **minimální prvek**, který pro danou strategii představuje **minimální zaručenou výhru** bez ohledu na volbu protivníka. Pak vybere tu strategii, neboli ten řádek, kde je toto minimum nejvyšší a tím i nejvyšší zaručená výhra – „nejmenší zlo“.

Podobně postupuje druhý hráč. Pro něj je nejhorší možností ta nejvyšší hodnota výhry prvního hráče; proto pro každou svou strategii t_i, tj. pro každý sloupec $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ matice, nalezne **maximální prvek**, který pro danou strategii představuje **maximální zaručenou prohru** bez ohledu na volbu protivníka. Potom vybere tu strategii, neboli ten sloupec, kde je toto maximum nejmenší, neboli kde je maximální prohra co nejnižší.

Hráč 2

Hráč 1

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & \dots & t_l \end{array} \\
\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_k \end{array} & \begin{pmatrix} u_1(s_1,t_1) & u_1(s_1,t_2) & \dots & u_1(s_1,t_l) \\ u_1(s_2,t_1) & u_1(s_2,t_2) & \dots & u_1(s_2,t_l) \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ u_1(s_k,t_1) & u_1(s_k,t_2) & \dots & u_1(s_k,t_l) \end{pmatrix}
\end{array}$$

Hráč 1: $\min_{t_j} u_1(s_i,t_j)$ $\rightsquigarrow$ **MAX**

Hráč 2: $\max_{s_i} u_1(s_i,t_j)$ $\rightsquigarrow$ **MIN**

Zřejmě platí:

$$\max_{s_i}\min_{t_j} u_1(s_i,t_j) \le \min_{t_j}\max_{s_i} u_1(s_i,t_j) \qquad (5.4)$$

Platí-li ve vztahu (5.4) rovnost, pak společná hodnota

$$u(s^*, t^*) = \max_{s_i} \min_{t_j} u_1(s_i, t_j) = \min_{t_j} \max_{s_i} u_1(s_i, t_j) \tag{5.5}$$

představuje **cenu hry** a dvojice strategií (s^*, t^*) je rovnovážným bodem.

Prvek $u(s^*, t^*)$ má tu vlastnost, že je **současně nejmenší na řádku a největší ve sloupci**, proto se nazývá **sedlový prvek matice**.

✒ ***Příklad 1***. Uvažujme hru s maticí

Hráč 2

$$\begin{array}{cccc}
 & & \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} & \\
\textbf{Hráč 1} & \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_k \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 4 & \boxed{4} & 5 \\ -4 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & 8 & -1 & 8 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boxed{4} \\ -4 \\ -1 \end{array} \quad \text{min} \\
 & \text{max:} & \begin{array}{cccc} 7 & 8 & \boxed{4} & 9 \end{array} &
\end{array}$$

$$\max_{\boldsymbol{s}} \min_{\boldsymbol{t}} u_1(s_i, t_j) = 4 = \min_{\boldsymbol{t}} \max_{\boldsymbol{s}} u_1(s_i, t_j) = u_1(s_1, t_3)$$

Dvojice strategií (s_1, t_3) je rovnovážným bodem hry.

Bohužel, ne vždy sedlový prvek existuje:

☞ ***Příklad 2***.

Hráč 2

Hráč 1

$$\begin{array}{c|ccc|c} & t_1 & t_2 & t_3 & \text{min} \\ \hline s_1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ s_2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ s_k & 1 & -1 & 0 & -1 \\ \hline \text{max:} & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$\max_{\boldsymbol{s}} \min_{\boldsymbol{t}} u_1(s_i, t_j) = -1 < \min_{\boldsymbol{t}} \max_{\boldsymbol{s}} u_1(s_i, t_j) = 1$$

Podobně pro matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -5/2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

V těchto případech nezbyde než zavést smíšené strategie. Uvažujme nový model dané rozhodovací situace, původně popsané maticovou hrou s maticí (5):

Definice 2. Mějme maticovou hru s prostory strategií (5.8) a maticí hry (5). Hru dvou hráčů s nulovým součtem s prostory strategií

$$S^s = \{\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{p} = (p_1, \ldots p_m),\ p_1 + \cdots + p_m = 1,\ \boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{o}\}$$

$$T^s = \{\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{q} = (q_1, \ldots q_n),\ q_1 + \cdots + q_n = 1,\ \boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{o}\} \tag{5.7}$$

a s výplatní funkcí

$$\pi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j = \boldsymbol{p} A \boldsymbol{q}^T \tag{5.8}$$

nazveme **smíšeným rozšířením** původní maticové hry.

Prvky původních prostorů strategií S, T se nazývají **ryzí strategie**, prvky prostorů S^s, T^s, které udávají rozdělení pravděpodobností na prostoru ryzích strategií, se nazývají **smíšené strategie**.

Věta 2. Základní věta maticových her.
Smíšené rozšíření každé maticové hry má řešení v rovnovážných strategiích.

Tj. pro každou matici A existují vektory $\boldsymbol{p}^* \in S^s, \boldsymbol{q}^* \in T^s$:

$$\boldsymbol{p}A\boldsymbol{q}^{*T} \leq \boldsymbol{p}^*A\boldsymbol{q}^{*T} \leq \boldsymbol{p}^*A\boldsymbol{q}^T \qquad \text{pro všechna } \boldsymbol{p} \in S^s,\ \boldsymbol{q} \in T^s. \tag{5.9}$$

Ještě jinak:

Věta. Vždy existují smíšené strategie $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$, pro které

$$\pi(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) = \max_{\boldsymbol{p}} \min_{\boldsymbol{q}} \pi(s_i, t_j) = \min_{\boldsymbol{q}} \max_{\boldsymbol{p}} \pi(s_i, t_j)$$

Věta 3. *Rovnovážné strategie smíšeného rozšíření maticové hry se nemění, přičteme-li ke každému prvku matice hry totéž kladné nebo záporné číslo* c. *Cena hry s takto pozměněnou maticí je* $v + c$, *kde* v *je cena původní hry.*

GRAFICKÉ ŘEŠENÍ MATICOVÝCH HER PRO MATICE TYPU $(2, n)$

Střední hodnoty výhry hráče 1 při smíšené strategii $(p, 1-p)$ a při ryzích strategiích hráče 2:

$$g_j(p) = pa_{1j} + (1-p)a_{2j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.10}$$

Hledáme

$$p^* := \arg \max_{p \in \langle 0,1 \rangle} \min_{j=1,2,\ldots,n} g_j(p). \tag{5.11}$$

Nejprve budeme uvažovat funkci

$$\varphi(p) := \min_{j=1,2,\ldots,n} g_j(p). \tag{5.12}$$

Tato funkce je konkávní, po částech lineární, snadno nalezneme bod jejího maxima. Hledaná cena hry je potom rovna

$$v = \varphi(p^*) := \max_{p \in \langle 0,1 \rangle} \varphi(p) \tag{5.13}$$

a hledaná smíšená rovnovážná strategie hráče 1 je $(p^*, 1-p^*)$.

Nastává-li extrém v bodě p^*, kde $g_j(p^*) = g_k(p^*) = v$ pro jednoznačně určené strategie j, k pak složky smíšené rovnovážné strategie hráče 2 s indexy různými od j, k jsou rovny nule. Složky, které mohou být nenulové, získáme vyřešením soustavy

$$a_{1j}q_j + a_{1k}q_k = v, \qquad q_j + q_k = 1, \quad q_j \geq 0, \quad q_k \geq 0,$$

nebo

$$a_{2j}q_j + a_{2k}q_k = v, \qquad q_j + q_k = 1, \quad q_j \geq 0, \quad q_k \geq 0.$$

☛ ***Příklad 3***. Určení rovnovážných strategií pro hru s maticí

$$\begin{pmatrix} 5 & 5/2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} g_1(p) &= 5p + 4(1-p) = p + 4 \\ g_2(p) &= \frac{5}{2}p + 8(1-p) = -\frac{11}{2}p + 8 \\ g_3(p) &= 3p + 6(1-p) = -3p + 6 \end{aligned}$$

$\varphi(p)$ nabývá maxima v bodě $p = \frac{1}{2}$, hodnota tohoto maxima je

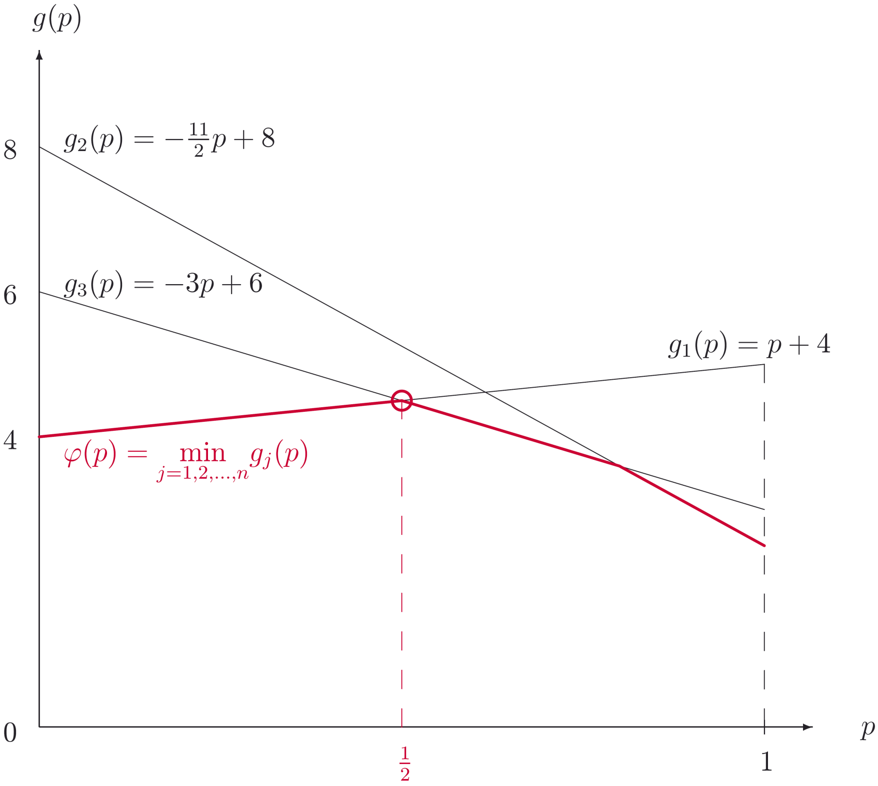
$$v(M) = 4.5.$$

Vyřešením soustavy rovnic

$$5q_1 + 3q_3 = 4.5, \qquad q_1 + q_3 = 1, \quad q_1 \geq 0, \quad q_3 \geq 0,$$

získáme $q_1 = 0.75$, $q_2 = 0.25$.

Rovnovážný bod je tedy $\boldsymbol{p}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \boldsymbol{q}^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right).$


$g(p)$
8
6
4
0
$g_2(p) = -\frac{11}{2}p + 8$
$g_3(p) = -3p + 6$
$g_1(p) = p + 4$
$\varphi(p) = \min_{j=1,2,\ldots,n} g_j(p)$
p
$\frac{1}{2}$
1

OBECNÉ ŘEŠENÍ MATICOVÝCH HER – LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

Uvažujme maticovou hru s maticí

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (5.14)$$

a smíšené strategie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= (p_1, \dots, p_m), \quad p_1 + \dots + p_m = 1, \quad p_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \\ \boldsymbol{q} &= (q_1, \dots, q_n), \quad\;\; q_1 + \dots + q_n = 1, \quad q_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Předpokládejme, že všechny prvky matice A jsou kladné (Pokud by nebyly, mohli bychom ke všem prvkům matice přičíst dostatečně vysokou kladnou konstantu c, čímž se podle věty 3 z hlediska strategií nic nezmění).

Postup je podobný, jako v případě hledání ryzích rovnovážných strategií. První hráč hledá pro libovolné, ale v tuto chvíli pevné $\boldsymbol{p}$ svou **minimální zaručenou výhru** h. Uvažujme

$$h = \min_{\forall j}\{a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \cdots + a_{mj}p_m\}\,. \qquad (5.15)$$

Zřejmě je

$$h \leq a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \cdots + a_{mj}p_m \ \text{ pro všechna } \ j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

$$\begin{array}{rcl}
q_1\, h & \leq & q_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m) \\
q_2\, h & \leq & q_2(a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m) \\
\multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
q_n\, h & \leq & q_n(a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m) \\
\hline
\underbrace{(q_1 + q_2 + \cdots + q_n)}_{1}\, h & \leq & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j = \pi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \\
h & \leq & \pi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})
\end{array}$$

Hodnota h je proto minimální zaručenou výhrou hráče 1, ať již jeho protivník zvolí jakoukoli ryzí či smíšenou strategii (vzhledem k (5.15) je h největší číslo splňující poslední nerovnost).

Nerovnosti

$$h \leq a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \cdots + a_{mj}p_m \quad \text{pro všechna} \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

vydělme hodnotou h

$$1 \leq a_{1j}\frac{p_1}{h} + a_{2j}\frac{p_2}{h} + \cdots + a_{mj}\frac{p_m}{h}$$

a označme

$$y_i = \frac{p_i}{h} \; ; \qquad \text{zřejmě platí:} \quad y_1 + y_2 + \cdots + y_m = \frac{1}{h} \; .$$

Obdržíme nerovnost

$$1 \leq a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \; . \tag{5.16}$$

Maximalizovat minimální zaručenou výhru znamená maximalizovat h, tj.

Minimalizovat

$$\frac{1}{h} = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$$

při omezeních

$$1 \leq a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \;, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \;. \tag{5.17}$$

To je přesně **duální úloha lineárního programování,** která nám jako výsledek poskytne příslušnou strategii $\boldsymbol{p}$.

Pro druhého hráče je postup analogický. Hledá h a $\boldsymbol{q}$ tak, aby

$$h \geq a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \cdots + a_{in}q_n \qquad \text{pro všechna } \ i \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

přičemž opět $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1, q_j \geq 0$ pro všechna $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Vydělme nerovnost hodnotou h

$$1 \geq a_{i1}\frac{q_1}{h} + a_{i2}\frac{q_2}{h} + \cdots + a_{in}\frac{q_n}{h}$$

a označme

$$x_j = \frac{q_j}{h}\ ; \qquad \text{zřejmě platí:} \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{h}\ .$$

Obdržíme nerovnost

$$1 \geq a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n\ . \tag{5.18}$$

Minimalizovat h tedy znamená:

maximalizovat

$$\frac{1}{h} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

při omezeních

$$1 \geq a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n\ , \qquad i = 1, 2, \ldots, m\ . \tag{5.19}$$

To je odpovídající **primární úloha lineárního programování** (aby h byla cena hry, je třeba, aby to v obou případech bylo totéž číslo).

Příklad 4 – Penalty

Střelba penalt může být považována za antagonistickou hru s následující maticí, která udává pravděpodobnost gólu pro různé strategie střelce (1. hráč) a brankáře (2. hráč). Budeme hledat rovnovážný bod v ryzích nebo smíšených strategiích.

Strategie	skoč vlevo	skoč vpravo	čekej uprostřed
Střílej vlevo	$0,6$	$0,7$	1
Střílej vpravo	1	$0,8$	$0,7$

Řešení.

$$\begin{aligned} g_1(p) &= 0,6+1-p = 1-0,4p \\ g_2(p) &= 0,7p+0,8(1-p) = 0,8-0,1p \\ g_3(p) &= p+0,7(1-p) = 0,7+0,3p \end{aligned}$$

Nejvyšší zaručená výhra pro střelce: $g_2(p) = g_3(p) \;\Leftarrow\; p = \frac{1}{4}$

Rovnovážný bod: $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, cena hry: $v = 0,775$

Správnost řešení maticových her si můžete zkontrolovat pomocí appletu, který naleznete zde.

Následující příklad ilustruje přechod od sedlového prvku k rovnovážnému bodu. Pro hry s nulovým a konstantním součtem se oba pojmy shodují, pro hry s nekonstantním součtem už tomu tak být nemusí:

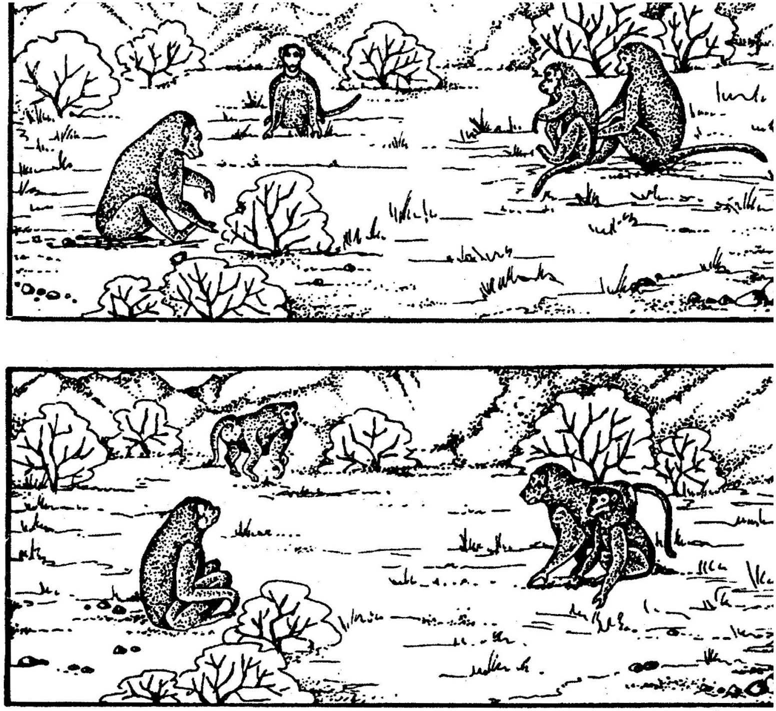
$$\begin{pmatrix} (3,-3) & \boxed{(\mathbf{2},\mathbf{-2})} \\ (0,0) & (1,-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (3,3) & \boxed{(\mathbf{2},\mathbf{4})} \\ (0,6) & (1,5) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{tikzcd} (3,3) \arrow[r] & \boxed{(\mathbf{2},\mathbf{4})} \arrow[d] \\ (0,2) \arrow[u] \arrow[r] & \underline{\underline{(\mathbf{4},\mathbf{5})}} \end{tikzcd}\right)$$

$(4,5)$ **. . . vzájemně nejlepší odpovědi – rovnovážný bod**

6 OPAKOVANÉ HRY



VĚZŇOVO DILEMA

Píší se třicátá léta dvacátého století. V tehdejším Sovětském svazu cestuje jistý dirigent vlakem do Moskvy, kde jej večer čeká koncert se symfonickým orchestrem. Pročítá si partituru a soustředí se na náročné představení. Při této činnosti jej pozorují dva agenti KGB, kteří si ve své nevzdělanosti myslí, že partitura je jakási tajná šifra. Dirigentova snaha o vysvětlení, že je to přece Čajkovskij, je zcela marná – je zatčen a uvězněn. Druhý den jej navštíví naše dvojice agentů se slovy: „Raději byste měl všechno přiznat. Našli jsme toho vašeho kamaráda Čajkovského a ten už mluví . . . “

Dva nevinní lidé, jeden proto, že studoval partituru, a druhý proto, že se shodou okolností jmenoval Čajkovskij, se tak ocitnou ve vězení, postaveni před následující problém: pokud by oba statečně zapírali, navzdory fyzickému a psychickému týrání, putovali by oba na tři roky do Gulagu, pak by byli propuštěni. Pokud by se jeden z nich k fiktivnímu zločinu špionáže doznal a udal zároveň toho druhého, který by zapíral, bylo by mu to přičteno jako polehčující okolnost a dostal by jen jeden rok, zatímco druhý by byl odsouzen na 25 let. Pokud by se doznali oba, byli by posláni do Gulagu na 10 let.

Situaci lze znázornit dvojmaticí:

		Hráč 1	
		Zapírat	Přiznat
Hráč 2	Zapírat	$(-3, -3)$	$(-25, -1)$
	Přiznat	$(-1, -25)$	$\boxed{(-10, -10)}$

Dilema se této situaci říká z toho důvodu, že všeobecně nejvýhodnější by bylo, kdyby oba zapírali a dostali tak 3 roky vězení; problém je však jednak v tom, že se nemohou domluvit, jednak v tom, že i kdyby se domluvili, stále je zde velké pokušení promluvit a vyváznout s pouhým jedním rokem. A i kdyby byl každý z nich solidární, může si o svém kolegovi myslet, že podlehne pokušení či mučení a dozná se – pak by mu hrozilo 25 let, což je ještě mnohem horší než 10 let. Každý proto raději zvolí svou druhou strategii a dozná se.

Skutečně, strategie **přiznat** dominuje strategii **zapírat** a dvojice **(přiznat, přiznat)** je jediným rovnovážným bodem ve hře.

☛ ***Příklad 1.*** Vězňovo dilema 2

Obecněji se vězňovým dilematem rozumí každá situace typu

Hráč 1

		Spolupráce	Zrada
Hráč 2	Spolupráce	(*odměna*, *odměna*)	(*oškubání*, *pokušení*)
	Zrada	(*pokušení*, *oškubání*)	(*trest*, *trest*)

kde

$$\textit{oškubání} < \textit{trest} < \textit{odměna} < \textit{pokušení}.$$

Pod spoluprací si můžeme představit prakticky cokoli – dvojice strategií (*spolupráce, spolupráce*) odpovídá vzájemně solidárnímu jednání; hráč 1 například pomůže hráči 2 postavit dům, hráč 2 mu to vzápětí oplatí a oba získají jistou hodnotu ve výši *odměna*. Dvojice (*spolupráce, zrada*) odpovídá situaci, kdy hráč 1 pomůže hráči 2, ten však podlehne *pokušení* a první hráč skončí *oškubán*. Dvojice (*zrada, zrada*) představuje stav, kdy hráči navzájem nespolupracují, popř. se přímo navzájem poškozují a jsou za to *potrestáni*.

Kde se například vězňovo dilema objevuje

- **Budování čističky odpadních vod** (dva velké hotely u jednoho jezera):
  - *Spolupráce* = vybudovat čističku
  - *Zrada* = nevybudovat čističku
  - *Odměna* = čistá voda přitáhne turisty – zákazníky, zvýší se zisky, museli jsme však investovat jistou částku
  - *Pokušení* = využít zlepšení způsobené vybudováním čističky u druhého hotelu, ale přitom ušetřit na investici
  - *Trest* = špinavá voda odláká turisty, kteří raději pojedou jinam, zisk klesne na nulu

- **Duopolisté:**
  - *Spolupráce* = dohodnout se na optimálním množství výroby (odpovídajícím monopolu)
  - *Zrada* = porušit dohodu
  - *Odměna* = největší zisk pro obě strany
  - *Pokušení* = vyrábět o něco více a získat více na úkor druhého duopolisty
  - *Trest* = celkově menší zisk pro oba

- **Vybírání čmelíků:**
  - *Spolupráce* = vzájemné vybírání
  - *Zrada* = nechat si vybrat čmelíky, ale neoplatit to
  - *Odměna* = zbavím se čmelíků, nicméně za to zaplatím vybráním Vašich
  - *Pokušení* = zbavím se čmelíků a přitom mne to nestojí žádnou námahu
  - *Trest* = čmelíků se nezbavím a trápení s nimi je horší než trocha námahy s vybíráním Vašich

- **Veřejná doprava:**
  - *Spolupráce* = poctivě platit
  - *Zrada* = neplatit
  - *Odměna* = veřejná doprava funguje, mohu ji využívat, jistou částku měsíčně však za to zaplatím
  - *Pokušení* = využívat, ale neplatit
  - *Trest* = (téměř) nikdo neplatí, doprava je zrušena, musím si platit taxi, což je mnohem dražší než původní poplatek za veřejnou dopravu

- **Koncesionářské poplatky:**
  - *Spolupráce* = platit
  - *Zrada* = neplatit
  - *Odměna* = veřejnoprávní rozhlasové či televizní vysílání funguje, mohu jej sledovat, ale něco málo mne to stojí
  - *Pokušení* = neplatit, ale sledovat
  - *Trest* = (téměř) nikdo neplatí, vysílání je zrušeno

- **Bitva:**
  - *Spolupráce* = bojovat
  - *Zrada* = schovat se
  - *Odměna* = vítězství, ovšem také riziko zranění
  - *Pokušení* = vítězství bez rizika zranění
  - *Trest* = nepřítel zvítězí bez boje

- **Nukleární zbrojení:**
  - *Spolupráce* = odzbrojit
  - *Zrada* = zbrojit
  - *Odměna* = svět bez jaderného nebezpečí
  - *Pokušení* = být jako jediný vyzbrojen
  - *Trest* = všichni zbrojí, platí za to velké částky a navíc hrozí nebezpečí

Opakované vězňovo dilema

Jak jsme viděli dříve, uskuteční-li se hra jednou a není možné dopředu uzavřít skutečně závaznou dohodu, zvolí racionální hráč dominující strategii *zrada*. Ocitá-li se však daná dvojice hráčů ve stejné situaci opakovaně, v nekonečném či neurčitém časovém horizontu, pak *spolupráce* není nutně iracionální:

☞ ***Příklad 2***: Vězňovo dilema 3

Uvažujme následující modifikaci vězňova dilematu:

		Hráč 1	
		Spolupráce	Zrada
Hráč 2	Spolupráce	$(3,3)$	$(0,5)$
	Zrada	$(5,0)$	$(1,1)$

Představme si, že hra se bude opakovat, přičemž v každém kole je pravděpodobnost, že se uskuteční ještě i kolo následující, rovna $2/3$.

Budou-li dva hráči spolupracovat, pak očekávaná hodnota výhry je pro oba rovna

$$\pi_S = 3 + 3 \cdot \tfrac{2}{3} + 3 \cdot (\tfrac{2}{3})^2 + 3 \cdot (\tfrac{2}{3})^3 + \cdots + 3 \cdot (\tfrac{2}{3})^n + \cdots$$

Uvědomme si, že pravděpodobnost, že nastane druhé kolo, je

$$\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = (\tfrac{2}{3})^2,$$

pravděpodobnost, že nastane třetí kolo, je

$$(\tfrac{2}{3})^2 \cdot \tfrac{2}{3} = (\tfrac{2}{3})^3,$$

atd.

Strategie v opakované hře je kompletní plán, jak se hráč zachová v průběhu celé hry ve všech možných situacích, v nichž se může ocitnout.

Uvažujme například strategii **nevraživec**:

Spolupracuj, dokud Tě druhý nezradí, pak vždy zraď.

Setkají-li se dva nevraživci, budou navždy spolupracovat – dokud bude hra trvat – a každý získá hodnotu π_S.
Snadno lze dokonce ukázat, že dvojice strategií

(*nevraživec, nevraživec*)

je **rovnovážný bod** dané hry.

Představme si, že jeden z hráčů se od strategie *nevraživec* odchýlí, tj. zvolí jinou strategii, kterou si označíme jako *deviant*. V některém kole tedy tento *deviant* zradí, přestože protihráč dosud spolupracoval (toto kolo může být i první). Nechť k této odchylce došlo poprvé v kole $n + 1$. Protože *deviant* hraje s *nevraživcem*, v dalším kole bude protivník volit strategii *zrada* a již u ní zůstane. *Deviant* tedy nemůže získat více než

$$\pi_D = 3 + 3 \cdot \tfrac{2}{3} + 3 \cdot (\tfrac{2}{3})^2 + 3 \cdot (\tfrac{2}{3})^3 + \cdots + 3 \cdot (\tfrac{2}{3})^{n-1} +$$

$$+5 \cdot (\tfrac{2}{3})^n + 1 \cdot (\tfrac{2}{3})^{n+1} + \cdots$$

(mohl by získat ještě méně, kdyby v některém z následujících kol volil *spolupráci*).

Protože

$$\begin{aligned}
\pi_N - \pi_D &= (3-5) \cdot (\tfrac{2}{3})^n + (3-1) \cdot (\tfrac{2}{3})^{n+1} + \cdots + (3-1) \cdot (\tfrac{2}{3})^{n+k} + \cdots \\
&= -2 \cdot (\tfrac{2}{3})^n + 2 \cdot (\tfrac{2}{3})^{n+1} + \cdots + 2 \cdot (\tfrac{2}{3})^{n+k} + \cdots \\
&= (\tfrac{2}{3})^n \left(-2 + 2 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) = (\tfrac{2}{3})^n \cdot 2 > 0,
\end{aligned}$$

nevyplatí se odchýlit.

Podobně můžeme uvažovat strategii *půjčka za oplátku*, která začne spoluprací a pak v každém kole vždy opakuje předchozí tah protivníka. Dvojice

(*půjčka za oplátku, půjčka za oplátku*)

rovněž představuje rovnovážný bod.

Příklady strategií v opakovaném vězňově dilematu

Vždy spolupracuje (Always Cooperates)

Vždy zradí (Always Defects)

Nevraživec (Grudger, Spiteful): Spolupracuje, dokud jej protihráč nezradí, pak navždy zrazuje (neodpouští).

Půjčka za oplátku (Tit for Tat): V prvním tahu spolupracuje, v dalších opakuje tah protihráče (zradí-li v jednom kole protihráč, v kole následujícím půjčka za oplátku zradí, na spoupráci odpoví v následujícím kole spoluprací).

Podezíravá půjčka za oplátku (Mistrust): V prvním kole zradí, v dalších se chová jako půjčka za oplátku – opakuje předchozí tah protihráče.

Naivní pokušitel (Naive Prober): Jako půjčka za oplátku, ale občas, zradí (např. náhodně, v průměru jednou za 10 tahů).

Kajícný pokušitel (Remorseful Prober): Jako naivní pokušitel, ale snaží se o ukončení cyklu S–Z způsobeného vlastní zradou: na zradu, která následuje jako odpověď na jeho vlastní nespravedlivou zradu, jednou zareaguje spoluprací

Nelítostná půjčka za oplátku (Hard Tit for Tat): Spolupracuje s výjimkou situace, kdy protivník zradil aspoň jednou v posledních dvou kolech.

Postupná (Gradual): Spolupracuje, dokud protivník nezradí. Potom po první zradě jednou zradí a dvakrát spolupracuje, po druhé zradě dvakrát po sobě zradí a dvakrát spolupracuje, . . . , po n-té zradě n-krát po sobě zradí a dvakrát spolupracuje, atd.

Postupný zabiják (Gradual Killer): V prvních pěti kolech zradí, pak dvakrát spolupracuje. Jestliže protivník v 6. a 7. kole zradí, pak postupný zabiják zůstane navždy u zrady, v opačném případě navždy spolupracuje.

Nelítostná půjčka za dvě oplátky (Hard Tit for 2 Tats): Spolupracuje kromě případu, kdy protivník zradil aspoň dvakrát po sobě v posledních třech kolech.

Něžná půjčka za dvě oplátky (Soft Tit for 2 Tats): Spolupracuje kromě případu, kdy protivník zradil ve dvou po sobě jdoucích kolech.

Pomalá půjčka za oplátku (Slow Tit for Tat): Hraje S–S, potom pokud protivník hrál dvakrát po sobě stejný tah, hraje tah opačný.

Periodicky ZZS (Periodically DDC): Hraje periodicky Zrada–Zrada–Spolupráce

Periodicky SSZ (Per. CCD): Hraje periodicky Spolupráce–Spolupráce–Zrada

Něžná většinová (Soft Majority): Spolupracuje, pak použije strategii, kterou protivník použil nejčastěji; jsou-li četnosti obou protivníkových strategií stejné, pak spolupracuje.

Krutá většinová (Hard Majority): Spolupracuje, pak použije strategii, kterou protivník použil nejčastěji; jsou-li četnosti obou protivníkových strategií stejné, pak zradí.

Pavlov: Spolupracuje právě tehdy, když v předchozím kole zvolili oba hráči stejnou strategii, jinak zradí.

Pavlov P_n: Přizpůsobuje pravděpodobnost splupráce v jednotkách $1/n$ podle toho, jak si vedla v předchozím kole: Jestliže v předchozím kole spolupracovala s pravděpodobností p, pak v následujícím spolupracuje s pravděpodobností

$p \oplus \frac{1}{n} = \min(p + \frac{1}{n}, 1)$, získala-li Od;

$p \ominus \frac{1}{n} = \max(0, p - \frac{1}{n})$, získala-li T;

$p \oplus \frac{2}{n}$, získala-li P;

$p \ominus \frac{2}{n}$, získala-li Os.

Náhodná (Random): Spolupracuje s pravděpodobností $1/2$.

Nelítostná Joss (Hard Joss): Hraje jako půjčka za oplátku, ale spolupracuje jen s pravděpodobností 0,9 (Joss – čínská modla).

Něžná Joss (Soft Joss): Hraje jako půjčka za oplátku, ale zradí jen s pravděpodobností 0,9.

Velkorysá půjčka za oplátku (Generous Tit for Tat): Hraje jako půjčka za oplátku, ale po zradě spolupracuje s pravděpodobností

$$g(Od, T, P, Os) = \min\left(1 - \frac{P - Od}{Od - Os}, \frac{Od - T}{P - T}\right).$$

Lepší a lepší (Better and Better) Zradí s pravděpodobností $(1000 -$ pořadí kola$)/1000$, tedy s pravděpodobností menší a menší.

Horší a horší (Worse and Worse): Zradí s pravděpodobností pořadí kola$/1000$, tedy s pravděpodobností větší a větší.

Axelrodův turnaj

V roce 1981 uspořádal Robert Axelrod počítačový turnaj, v němž se 15 různých strategií pro opakované vězňovo dilema, zaslaných předními herními teoretiky, utkaly každá s každou v zápasech o 200 tazích (celkem 15×15 zápasů). Sčítaly se vždy body získané na základě matice

		Hráč 1	
		Spolupráce	Zrada
Hráč 2	Spolupráce	$(3, 3)$	$(0, 5)$
	Zrada	$(5, 0)$	$(1, 1)$

Ke značnému překvapení všech zúčastněných získala nejvíce bodů velmi jednoduchá strategie: *půjčka za oplátku*, kterou do soutěže zaslal Anatol Rapoport, psycholog a odborník na teorii her.

V rozboru turnaje Axelrod rozlišil následující kategorie strategií:

- **Milá strategie** – nikdy nezradí jako první (jen v odvetě),

  Podlá strategie – aspoň někdy zradí jako první.

V soutěži bylo 8 milých strategiích a obsadily prvních 8 míst (nejúspěšnější získala 504,5 bodů, což odpovídá 84% standardu 600 bodů, další milé získaly 83,4%–78,6%; nejúspěšnější z podlých získala 66,3%).

- **Odpouštějící strategie** – může odplácet, ale má krátkou paměť, zapomíná staré křivdy,

  Neodpouštějící strategie – staré křivdy nikdy nezapomene, nevymaní se z cyklu vzájemných odvet ani proti smířlivému protivníkovi.

- **Nezávistivá strategie** – jde jí o vlastní zisk, ne o porážku soupeře,

  Závistivá strategie

- **Vyprovokovatelná strategie** – nenechá se „oškubat“ nemilými strategiemi,

  Nevyprovokovatelná strategie

Druhý turnaj

V druhém Axelrodově turnaji, který následoval nedlouho po prvním, nebyl pevně stanoven počet kol, ale turnaj probíhal analogicky s evolucí přírodním výběrem: všem strategiím byla přiřazena výhra určující počet potomků (při stálém celkovém počtu jedinců) – úspěšnější strategie se množily na úkor méně úspěšných, asi po 1000 generacích bylo dosaženo stability. I zde zvítězila *půjčka za oplátku*.

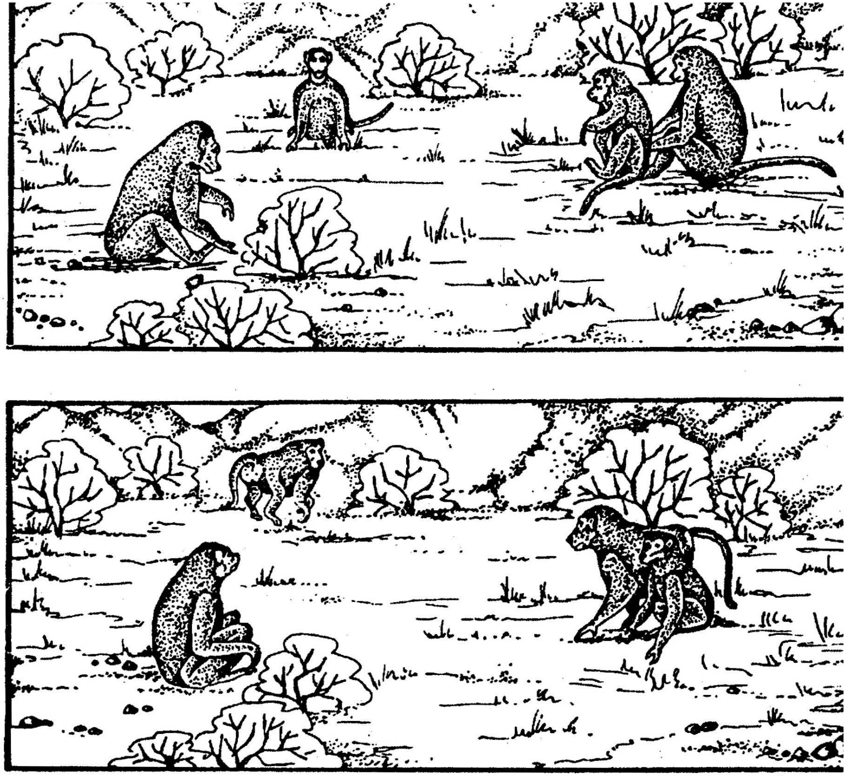
Výskyt opakovaného vězňova dilematu

(další příklady)

- **Válečná fronta – žij a nech žít:**
  - *Spolupráce* = žít a nechat žít
  - *Zrada* = zabít každého, kdo k tomu dá příležitost
  - *Odměna* = přežití dlouhých válečných let
  - *Pokušení* = zneužít toho, že protivník je snadnou kořistí, a dopomoci si například k vyznamenání – přeci jen je lepší se nepřítele zbavit
  - *Trest* = všichni stále ve střehu, dokonale krytí,. . .

- **Výpomoc samců paviána anubiho:**
  - *Spolupráce* = pomoci druhému samečkovi při páření zahánět nepřítele
  - *Zrada* = neoplatit pomoc
  - *Odměna* = úspěšné páření, mláďata
  - *Pokušení* = využít pomoc, ale neoplatit ji a tím ušetřit čas a námahu
  - *Trest* = méně mláďat

  V přírodě: čím častěji sameček A podporuje samečka B, tím častěji i B podporuje A.



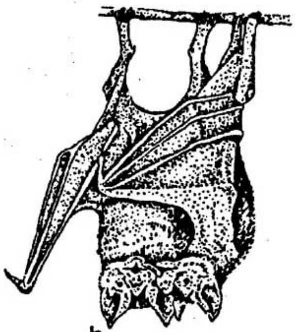
- **Fíkovník a vosičky chalcidky:**
  - *Spolupráce* = vyvážený poměr mezi květy, které chalcidka uvnitř fíku opyluje, a květy, do nichž naklade vajíčka
  - *Zrada* = naklást vajíčka do více květů
  - *Odměna* = šíření genů
  - *Pokušení* = naklást vajíčka do více květů a tím zvýšit počet potomků
  - *Trest* = fík i s celou „zrádnou rodinou“ schozen, rodina vymírá

- **Střídání pohlavních rolí u hermafrodita kanice:**
  - *Spolupráce* = jsem-li nyní sameček, stanu se příště samičkou
  - *Zrada* = po samečkovi se opět stát samečkem
  - *Odměna* = harmonické soužití, mnoho potomků
  - *Pokušení* = zopakovat si snadnou úlohu samečka
  - *Trest* = vztah se rozpadne

- **Upír Desmodus rotundus (netopýr sající krev savců) – krmení hladových jedinců:**
  - *Spolupráce* = po úspěšném lovu nakrmit neúspěšné „kolegy“
  - *Zrada* = nechat si vše pro sebe
  - *Odměna* = dlouhodobé úspěšné přežívání
  - *Pokušení* = v případě nouze se nechat nakrmit, o svůj úlovek se však nedělit
  - *Trest* = v případě neúspěšného lovu smrt vyhladověním

    V přírodě: Jedinci, kteří se vrátili z neúspěšného lovu, jsou úspěšnými, a to i nepříbuznými, krmeni; poznají se.

a



b

Definice 1. Úplný rovnovážný bod – subgame perfect equilibrium (Selten, 1975)

rovnovážný bod pro každou podhru původní hry; tj. dané strategií jsou nejlepší odpovědí jedna na druhou bez ohledu na to, kterého uzlu ve stromu hry bylo dosaženo

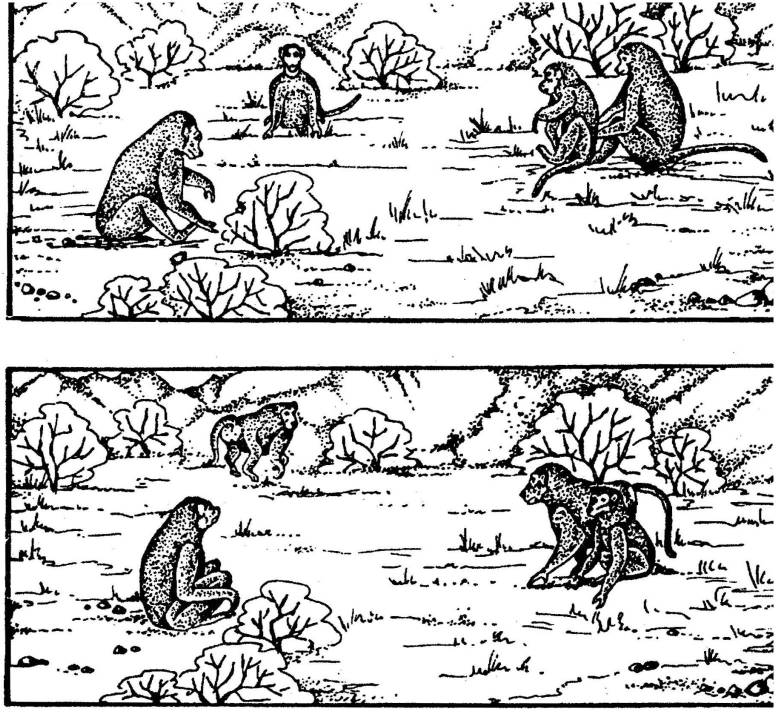
✒ ***Příklad 3***.

Vždy zraď – úplný rovnovážný bod

Půjčka za oplátku – rovnovážný bod, ale ne úplný

Tvrzení. Pro každé $p;\ 0 \leq p \leq 1,$ existuje rovnovážný bod, v němž se p objevuje jako zlomek času, kdy dochází ke vzájemné spolupráci

7 EVOLUČNÍ TEORIE HER



MEZE:

Základní předpoklady při aplikaci teorie kooperativních a nekooperativních her:

- neomezená racionalita
- úplná informace

MEZE:

Základní předpoklady při aplikaci teorie kooperativních a nekooperativních her:

- **neomezená racionalita**
  složité dopravní nebo počítačové sítě:
  omezené výpočetní možnosti
- **úplná informace**

MEZE:

Základní předpoklady při aplikaci teorie kooperativních a nekooperativních her:

- **neomezená racionalita**
  složité dopravní nebo počítačové sítě:
  omezené výpočetní možnosti
- **úplná informace**
  není vždy k dispozici úplná informace o povaze ostatních hráčů, o jejich možných strategiích a preferencích

MEZE:

Základní předpoklady při aplikaci teorie kooperativních a nekooperativních her:

- ➥ **neomezená racionalita**
  složité dopravní nebo počítačové sítě:
  omezené výpočetní možnosti
- ➥ **úplná informace**
  není vždy k dispozici úplná informace o povaze ostatních hráčů, o jejich možných strategiích a preferencích

⇝ **hráči se „učí“ volit optimální strategie v opakovaných hrách**

MEZE:

Základní předpoklady při aplikaci teorie kooperativních a nekooperativních her:

- **neomezená racionalita**
  složité dopravní nebo počítačové sítě:
  omezené výpočetní možnosti
- **úplná informace**
  není vždy k dispozici úplná informace o povaze ostatních hráčů, o jejich možných strategiích a preferencích

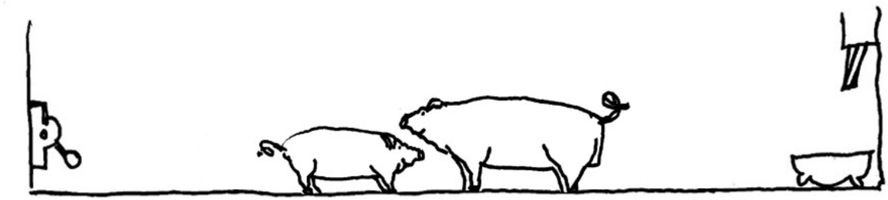
⇝ **hráči se „učí“ volit optimální strategie v opakovaných hrách**

⇝ **EVOLUČNÍ TEORIE HER**

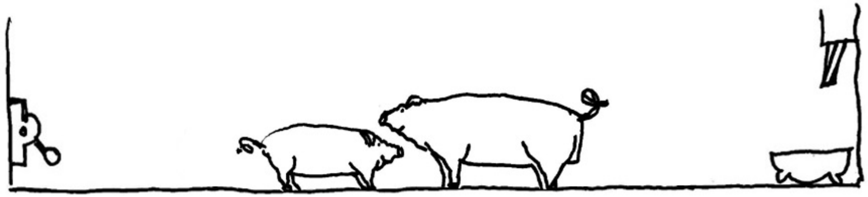
1979 B. A. Baldwin, G. B. Meese: Skinnerův chlívek

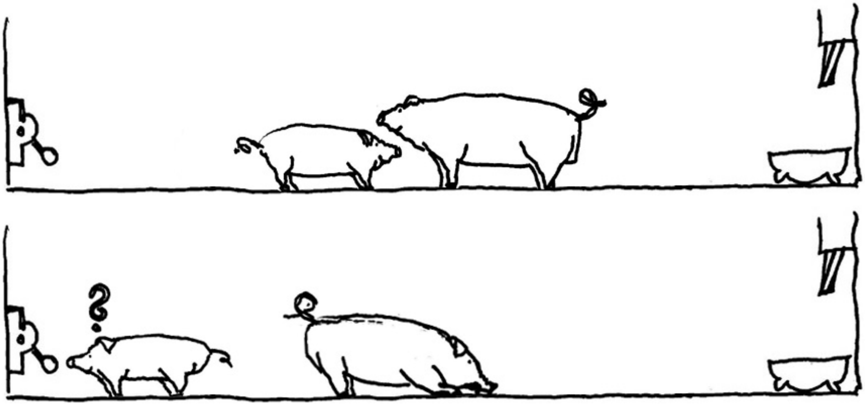
Názornou analogií toho, co se děje v dlouhém časovém horizontu na úrovni genů v evoluci, je učení se jedince, který se opakovaně ocitá ve stejné rozhodovací situaci, v krátkém časovém horizontu jeho života. Snad nejzajímavějším a přitom velmi jednoduchým příkladem je pokus, který v roce 1979 provedli B. A. Baldwin a G. B. Meese s dvojicí prasat ve speciálně upraveném Skinnerově boxu (či spíše chlívku): na jedné straně boxu je páka, jejíž stisknutí uvede do chodu násypku s potravou umístěnou na druhém konci boxu. Ponechá-li se v boxu jedno prase, naučí se, že stisknutí páky způsobí sypání určité dávky potravy, a bude postupně přebíhat mezi pákou a korýtkem u násypky. Ovšem Baldwin a Meese do chlívku umístili *dvě prasata* a vytvořili tak možnost, aby jedno prase vykořisťovalo druhé – stálo u korýtka a cpalo se, zatímco druhé by ovládalo páku a běhalo ke korýtku.

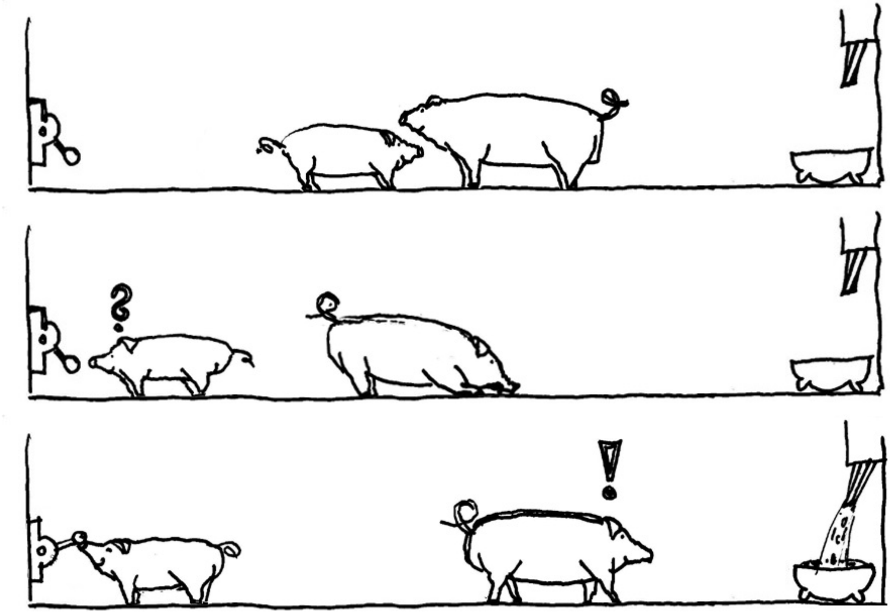
Mezi dvojicí prasat se vždy ustanoví hierarchie *dominantní – submisivní*; kdo však v našem pokusu bude stát u korýtka a čekat a kdo bude mačkat páku a běhat? Donutí dominantní prase submisivní k obsluze páky? Situace je schematicky znázorněna na následujícím obrázku (dominantní prase je znázorněno jako velké, submisivní jako malé):

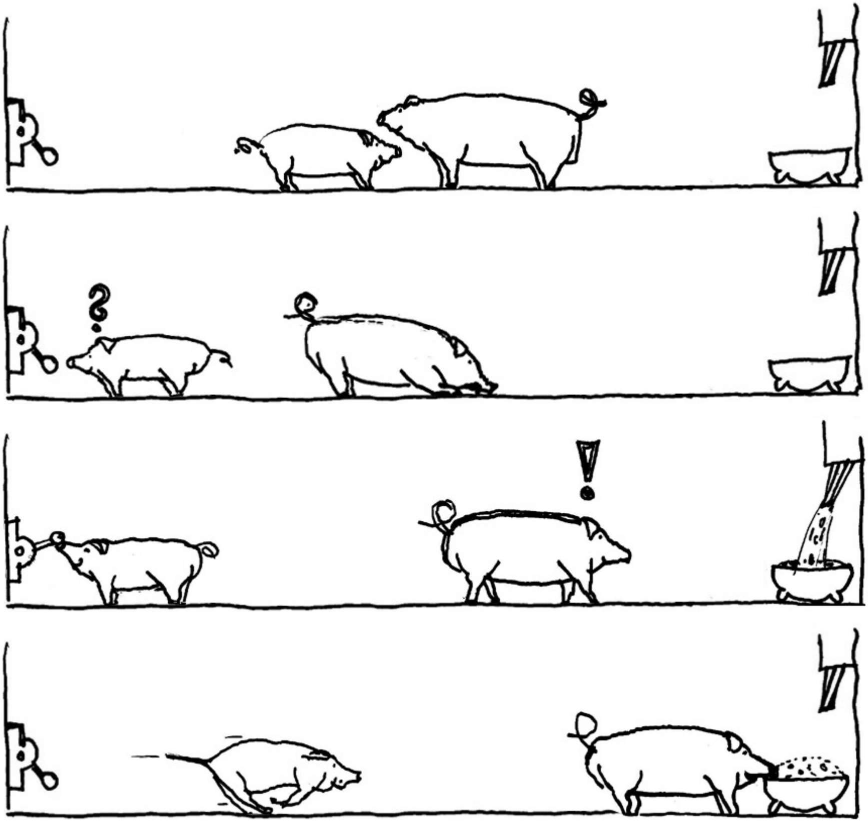


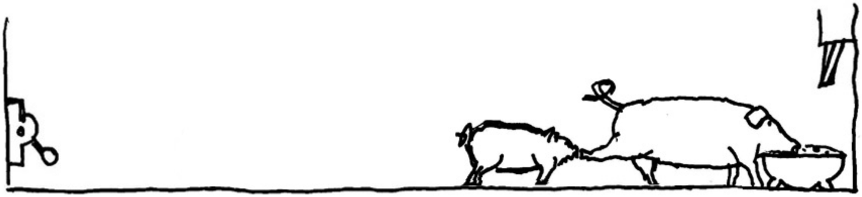
Další obrázky pak ilustrují, jak experiment dopadl.

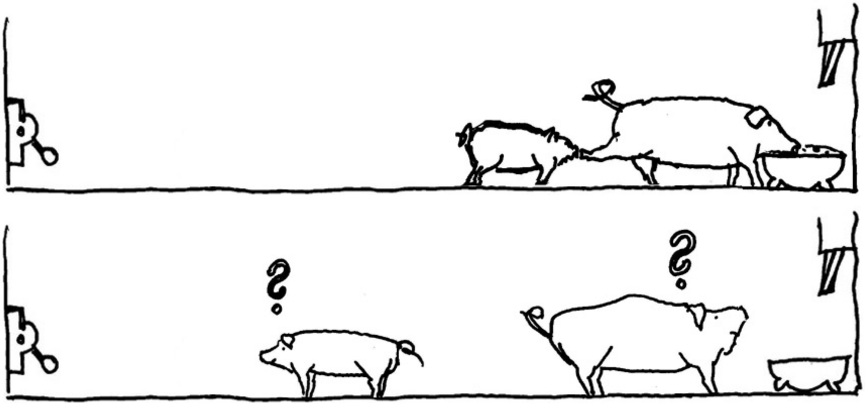


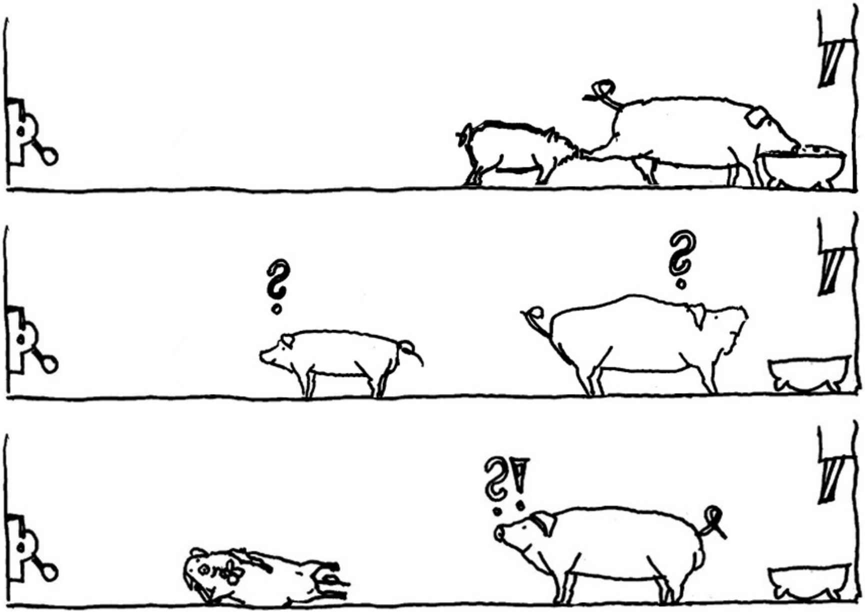


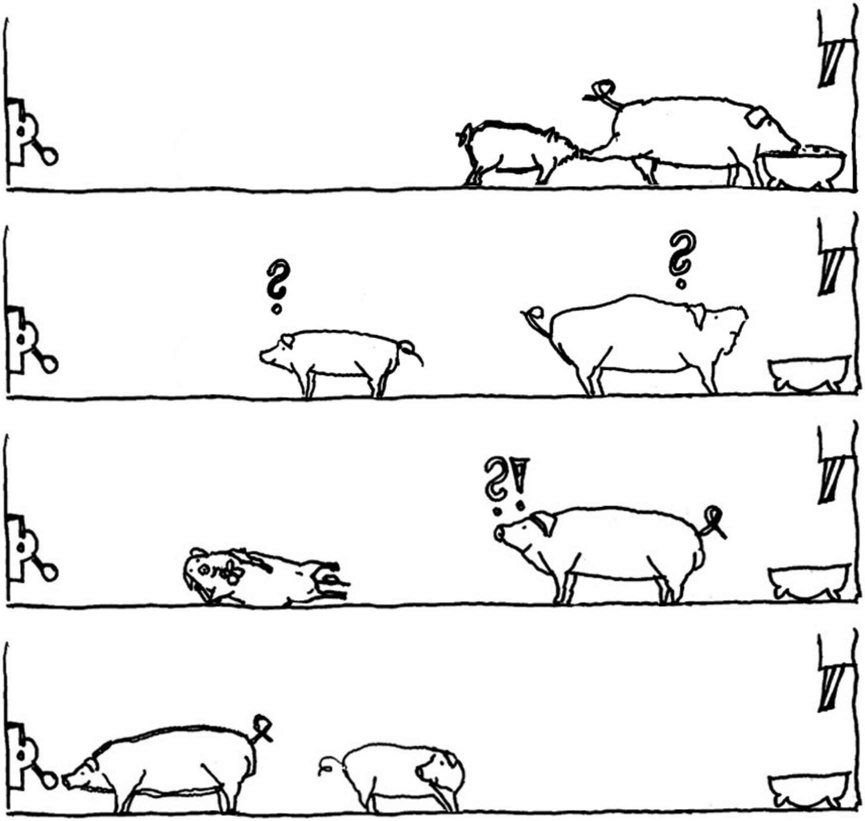


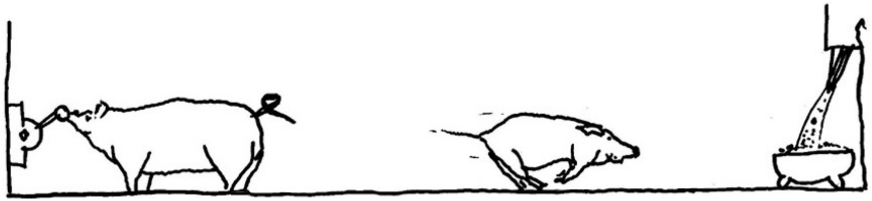


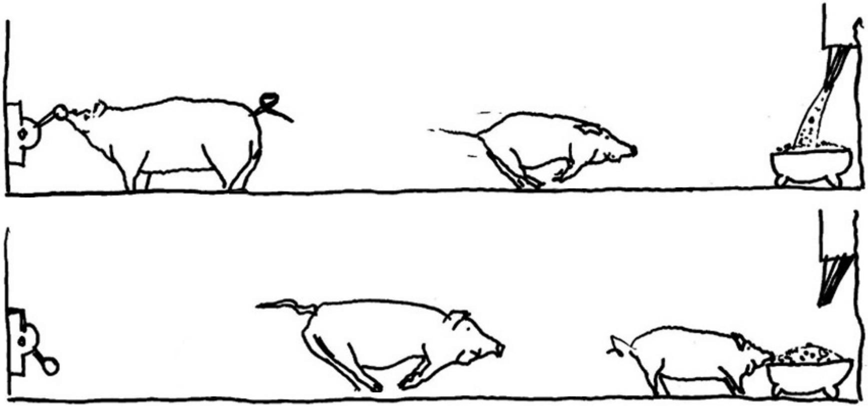


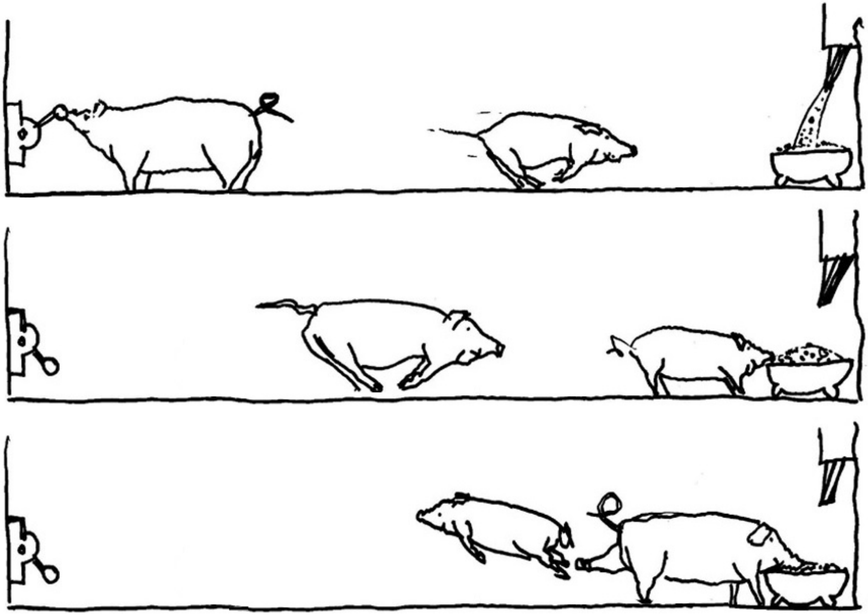


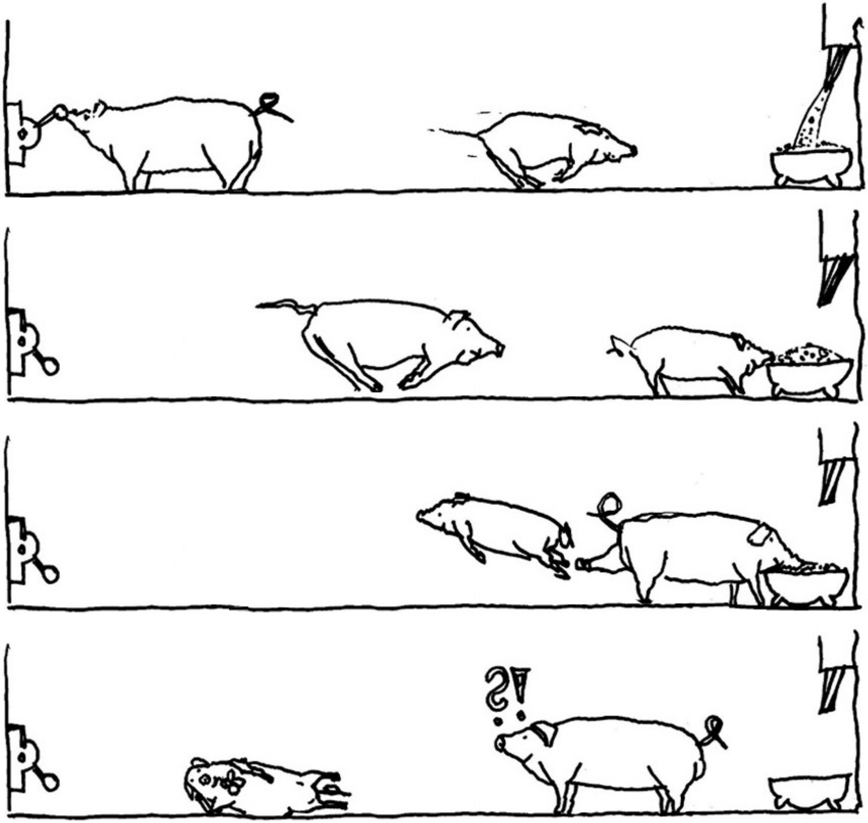






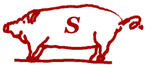


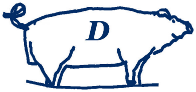




Strategie *jsi-li dominantní, seď u koryta, jsi-li submisivní, mačkej páku* vypadá na první pohled rozumně, není však rovnovážná: submisivní prasátko by běhalo od páky ke korýtku, nikdy by však za svou námahu nebylo odměněno, protože dominantní prase by je k potravě nepustilo; výhodnější by pro něj bylo nic nedělat, protože by aspoň neztrácelo energii. Brzy proto s touto zbytečnou snahou skončí a dominantnímu praseti nezbude, než mačkat páku samo. Nakonec tedy bude submisivní prasátko čekat u korýtka a velké bude mačkat páku a pak se vždy vyřítí přes celý chlívek ke korýtku, odstrčí submisivní prasátko, které zatím stačilo aspoň něco pojíst, a dojí zbytek. Pokus skutečně takto dopadl, a to dokonce i v případě, že dávka potravy byla tak malá, že submisivní prasátko stačilo sníst více potravy než dominantní. Dvojice strategií (*mačkej páku*, *seď u koryta*) pro dominantní a submisivní prase je *rovnovážným bodem* ve smyslu výše uvedené definice.

Pokud bychom se na stejnou situaci podívali čistě matematicky z pohledu teorie her, pak bychom si sestavili model pomocí dvojmaticové hry, který by vypadal například takto:





Strategie	Stiskni páku		Seď u koryta
Stiskni páku	$(8, -2)$	→	$\boxed{(5, 3)}$
Seď u koryta	$(10, -2)$	→	$(0, 0)$

V modelu jsme uvažovali zisk z celé dávky potravy v hodnotě 10 jednotek užitku, ztrátu danou námahou spojenou s mačkáním páky a běháním v hodnotě -2 jednotek a množství potravy, které submisivní prasátko stačí pojíst, než je odstrčeno dominantním, v hodnotě 4 jednotek (tyto hodnoty byly zvoleny náhodně a laskavý čtenář si je může libovolně změnit; ze strategického hlediska se nic nezmění, ohodnotíme-li námahu libovolným záporným číslem, získá-li čekající submisivní prasátko nezáporný počet jednotek a nezáporný počet jednotek zbude na prase dominantní).

Racionálně uvažující hráči by dospěli k rovnovážným strategiím následujícím způsobem. Z pohledu druhého hráče – submisivního prasátka – je první strategie dominována druhou a může být proto rovnou eliminována. První hráč – dominantní prase – předpokládá racionalitu svého protivníka a uvědomí si, že bude volit svou druhou strategii; rozhoduje se tedy mezi ziskem 0 a 6 jednotek, což jej dovede k volbě první strategie. Postupným eliminováním dominovaných strategií tak racionální rozhodovatelé došli ke stejnému závěru jako naše pokusná zvířata – ke dvojici rovnovážných strategií (*mačkej páku*, *seď u koryta*). Snadno se nahlédne, že tato dvojice strategií splňuje podmínku pro rovnovážné strategie.

ROVNOVÁŽNÉ STRATEGIE V BIOLOGII

Aplikace související s bojem, kooperací a komunikací živočichů, koexistencí různých rysů, způsoby páření, konflikty mezi pohlavími, počtem a poměrem pohlaví potomků, rozdělením jedinců v jejich výskytišti; otázky klíčení a rozptýlení semen, konkurence kořenů, produkce nektaru, velikosti květů, aj.

R. A. Fisher: *The Genetical Theory of Natural Selection*, 1930
– poměr pohlaví, výběr partnerů pro páření

Historický mezník:

J. Maynard Smith, G. R. Price: *The Logic of Animal Conflict*, 1973

J. Maynard Smith: *Evolution and the Theory of Games*, 1982

Brzy se ukázalo nejen to, že principy chování živočichů i rostlin při vzájemných interakcích i celou evoluční teorii lze zatím nejuspokojivěji objasnit z pohledu teorie her, ale dokonce i to, že nejslibnější aplikace teorie her jsou *právě* v biologii! Na jedné straně je zcela pochopitelné, že problematika konfliktu či spolupráce různých živých organismů do teorie her svým obsahem patří, neboť právě to je jejím předmětem, na druhé straně si člověk těžko dokáže představit, že si třeba štěnice či dokonce fíkovník sestaví matematický model rozhodovací situace, v níž se ocitl, vytvoří si přehled možných strategií, ocení si možné výstupy a pak pomocí aparátu teorie her určí optimální strategii. Ovšem ukazuje se, že dokonce čím méně vyvinutá je schopnost organismu přemýšlet, tím lépe se teorie her jeví fungovat!

Hra genů

Ač se nám to může na první pohled zdát nemožné, vysvětlení je zcela jednoduché: jako *hráče* stačí uvažovat *geny*, které řídí chování organismu, tj. volí pro organismus *strategie* v konkrétních situacích; genem přitom budeme rozumět část chromozomu, dostatečně malou na to, aby přežila v mnoha generacích a byla rozšířena v populaci v mnoha kopiích. *Strategií* bude behaviorální fenotyp, tj. chování „předprogramované“ geny – specifikace toho, co bude jedinec dělat v jakékoli situaci, v níž se může ocitnout; konečně *výplatní funkcí* bude reprodukční „zdatnost“, tj. schopnost genu zachovat se a šířit v genotypu populace (*genotypem* se rozumí soubor všech genů, které má organismus k dispozici pro zajištění svých biochemických, fyziologických a morfologických vlastností a znaků; *fenotyp* je soubor všech pozorovatelných vlastností a znaků organismu.)

Ani kudlanka, ani její geny samozřejmě nic „nepočítají“, stejně jako světelný paprsek nepočítá svou trajektorii mezi dvěma body po lomu či odrazu a nehledá, kterou trasu urazí v nejkratším čase – jeho trajektorie je jednoduchým důsledkem fyzikálních zákonů. Podobně může být jednoduchým důsledkem zákonů populační genetiky, že v rovnovážném stavu jsou maximalizovány jisté veličiny; nic se přitom neříká o záměru či úmyslu.

Hra genů

hráči = geny, které řídí chování organismu, tj. volí pro organismus **strategie** v konkrétních situacích

gen = část chromozomu, dostatečně malá na to, aby přežila v mnoha generacích a byla rozšířena v populaci v mnoha kopiích.

strategie = behaviorální fenotyp, tj. chování „předprogramované“ geny – specifikace toho, co bude jedinec dělat v jakékoli situaci, v níž se může ocitnout

výplatní funkce = reprodukční „zdatnost“, tj. schopnost genu zachovat se a šířit v genotypu populace.

genotyp = soubor všech genů, které má organismus k dispozici pro zajištění svých biochemických, fyziologických a morfologických vlastností a znaků

fenotyp = soubor všech pozorovatelných vlastností a znaků organismu.

Zjednodušeně řečeno, k pochopení základních principů evoluce si stačí představit, že kdysi dávno, před čtyřmi miliardami let, vznikla – třeba náhodou – molekula schopná replikace, výroby svých vlastních kopií, a začala se množit. Při replikaci občas došlo k chybám čili *mutacím*, z nichž pravděpodobně většina byla pro svou nositelku nevýhodná a vedla k jejímu brzkému zániku bez možnosti dalšího rozmnožování, některé vedly k molekulám schopným další replikace a některé byly pro své nositelky dokonce výhodou; vedle sebe se tak množily různé replikující se molekuly a s rostoucím počtem mezi sebou musely začít soupeřit o stavební jednotky pro replikaci. Ty méně úspěšné se pak množily méně, případně časem zanikly, úspěšnější se začaly množit více a šířit v prostředí. Chyby v replikaci vedoucí k větší stabilitě či snižující stabilitu ostatních replikátorů byly tímto způsobem uchovávány a množeny. Některé „dravé“ replikátory mohly připadnout na způsob, jak štěpit molekuly jiných a použít vzniklé stavební jednotky na stavbu vlastních kopií, jiné se mohly začít chránit pomocí různých schránek. Dále přežívaly a množily se replikátory, které měly lepší a účinnější *nástroje na přežití*. Tyto nástroje se postupně vylepšovaly miliardy let, ze vzájemných soutěží vždy vítězně vycházely ty úspěšnější replikátory, které zvolily vhodnější *strategii* (ať již doslova vzorec chování či třeba morfologickou vlastnost). Těžko překonatelnými slovy R. Dawkinse:

Jaké podivné nástroje sebezachování přinesla následující tisíciletí? Co mělo být osudem prastarých replikátorů za 4 miliardy let? Nevymřely, neboť jsou dávnými mistry v umění přežít. Nečekejte však, že je uvidíte volně plavat v moři. Této dobrodružné svobody se dávno vzdaly. Dnes se hemží ve velkých koloniích, bezpečně usazeny v gigantických nemotorných robotech, odděleny od okolního světa, s nímž komunikují složitými nepřímými cestami a manipulují prostřednictvím dálkového ovládání. Jsou přítomny ve vás i ve mně, stvořily nás, tělo i mysl, a jejich zachování je konečným důvodem naší existence. Udělaly velký pokrok, tyto replikátory. Dnes se jim říká geny a my jsme jejich nástroje přežití.

Generaci za generací se „schránky genů“, tj. živé organismy řízené geny, utkávají ve vzájemných soutěžích, geny, které svým nositelům zvolily nejlepší strategii a umožnily jim přežití a rozmnožování, se dále šíří a postupně tak dochází k jejich „učení“. Výsledkem je, že se jejich nositelé chovají tak, jako by vědomě hledali optimální strategie a tak, jak by jim předepsala teorie her; místo výpočtu však geny k rovnovážné strategii dospěly uvedeným postupným přizpůsobováním se a přírodním výběrem.

Evolučně stabilní strategie

Evolučně stabilní strategie = strategie, kterou – je-li přijata všemi členy populace – nemůže překonat žádná jiná v tom smyslu, že mutant, který by ji používal, by byl méně úspěšný v reprodukci.

☛ **Speciální případ:** populace s nekonečně mnoha členy, kteří se množí asexuálně a navzájem se střetávají vždy po dvojicích (tyto konflikty můžeme modelovat pomocí hry dvou hráčů v normálním tvaru s výplatními funkcemi u_1, u_2)

strategie I je evolučně stabilní, jestliže pro každou strategii $J \neq I$ platí:

$$u_1(I, I) > u_1(J, I)$$

$$\text{nebo} \quad u_1(I, I) = u_1(J, I) \quad \text{a zároveň} \quad u_1(I, J) > u_1(J, J)$$

I evolučně stabilní strategie $\Rightarrow$ (I, I) rovnovážný bod

✑ Jestřábi a hrdličky

Základní model, který je sice velmi zjednodušený, avšak který ukazuje podstatu věci, je následující. Uvažujme populaci jednoho druhu, která při boji staví pouze na dvou různých strategiích; nazvěme je strategie *jestřába* a strategie *hrdličky*. Pojmenování je obrazné a pouze vystihuje způsob chování: jestřáb bojuje vždy tvrdě a nesmlouvavě a vzdává se jen tehdy, je-li vážně zraněn (či zabit), hrdlička se uchyluje pouze k symbolické hrozbě a při přímém útoku prchá nezraněna. Předmětem boje může být například výhodné teritorium, které vede ke zvýšení „zdatnosti“ jeho uživatele (a tím i jeho genů) o hodnotu V; celková zdatnost poraženého přitom nemusí být nulová – jedinec jen zůstává v horším teritoriu. Ztrátu ze zranění oceňme hodnotou C. Budeme předpokládat, že všichni jestřábi jsou stejně schopní bojovníci, takže při vzájemném střetnutí každý z nich s pravděpodobností $1/2$ zvítězí a se stejnou pravděpodobností bude zraněn a poražen. Při střetnutí dvou hrdliček bude teritorium sdíleno rovným dílem; jedná-li se o nedělitelný zdroj, budeme opět uvažovat náhodné rozdělení mezi obě soupeřky. Příslušná dvojmaticová hra pro libovolnou dvojici členů populace vypadá takto:

Strategie	Jestřáb	Hrdlička
Jestřáb	$\left(\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2}\right)$	$(V, 0)$
Hrdlička	$(0, V)$	$\left(\frac{V}{2}, \frac{V}{2}\right)$

Strategie	Jestřáb	Hrdlička
Jestřáb	$\left(\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2}\right)$	$(V, 0)$
Hrdlička	$(0, V)$	$\left(\frac{V}{2}, \frac{V}{2}\right)$

Strategie **hrdlička** není nikdy evolučně stabilní, protože populace hrdliček může být napadena jestřábím mutantem, jemuž se v populaci hrdliček daří lépe než hrdličkám samotným.

Je-li $V > C$, pak evolučně stabilní strategií je **jestřáb**.

Rypouš sloní: je cena za vítězství ohromná: téměř úplný monopol nad harémem samic; souboje také bývají velmi zuřivé.

Je-li $V < C$, pak není ani jedna z ryzích strategií evolučně stabilní (hra nemá ani žádný rovnovážný bod). Rovnovážnou strategií je smíšená strategie obsahující strategii *jestřáb* s pravděpodobností $p = V/C$; tato strategie je evolučně stabilní.

Hru „na hrdličky a jestřáby“ je možné komplikovat přidáváním libovolného množství dalších strategií, zaváděním různých asymetrií apod.

Rypouš sloní: $V >> C$

☛ *Příklad 1* – Souboj pohlaví

Uvažujme dvojici partnerů. Cílem každého z nich je, aby co nejvíce jejich potomků přežilo. Ovšem čím méně musí investovat do každého mláděte, tím více mláďat může mít – toho může nejjednodušeji dosáhnout tím, že donutí partnera, aby do každého mláděte investoval více prostředků, a sám bude mít další potomky s jinými partnery. Takovýmto partnerem bývá většinou otec: například u savců se plod vyvíjí v těle matky, matka také produkuje mléko a nese břemeno výchovy a ochrany mláděte a celkem tak do potomka investuje více než otec; to začíná už tím, že vajíčko je podstatně větší než spermie. Kdyby mládě opustila, hrozí, že by se otec zachoval stejně a mládě by zemřelo. Pro samičku je pak mnohem nákladnější přivést na svět dalšího potomka, než pro otce.

Jak může samička snížit míru, do jaké ji sameček využívá? Jakmile dojde k páření, již své velké vajíčko plné živin obětovala, samec získal výživu pro své potomky a nic jej nedrží. Jediná šance tedy je, přimět samečka k určitým výdajům či obětem předem, tedy odmítat kopulaci, dokud sameček například nepostaví hnízdo, neshromáždí dostatek potravy a podobně. Tím samečka ”otestuje” – jestliže sameček nebude mít dostatek trpělivosti, aby vše podstoupil, lze předpokládat, že nebude ani příliš věrný; ten, kdo vytrvá, prokáže určitou věrnost a vytrvalost předem. Navíc čím delší budou námluvy a čím náročnější budou úkoly, které musí sameček splnit, tím méně se mu bude chtít samičku posléze opustit, protože by musel toto všechno podstupovat znovu.

Kdyby se všechny samičky chovaly takto, neměl by ”záletný” sameček, který by nechtěl před pářením podstoupit náročné námluvy, šanci se rozmnožit. V populaci pak budou samí věrní samečkové. Kdyby se však v této situaci objevila samička (říkejme jí ”nevázaná”), která by žádné úkoly nevyžadovala, ušetřila by čas vyplýtvaný prodlouženými námluvami a ještě by o ni byl veliký zájem. Její geny by se začaly šířit rychleji než geny ”zdrženlivých” samiček. Ovšem v populaci, kde většina samiček je ”nevázaných”, by byl v ohromné výhodě sameček, který by hned po kopulaci samičku opustil a začal by se pářit s jinou. V takovém případě by pak ”nevázaná” samička musela vše zajistit sama a byla by na tom hůře než samička ”zdrženlivá”, jejíž geny by se zase začaly šířit v populaci.

Matematicky můžeme situaci vyjádřit například takto: Uvažujme dvě různé strategie (tj. nevědomé programy chování) samiček: *zdrženlivá* a *nevázaná*, a dvě strategie samečka: *věrný* a *záletník*. *Zdrženlivá* samička nepřistoupí na kouplaci, dokud samec nepodstoupí dlouhé a nákladné námluvy, trvající několik týdnů. *Nevázané* samičky se budou pářit ihned s kýmkoli. *Věrný* sameček je připraven na dlouhé dvoření a po kopulaci zůstává se samičkou a pomáhá jí s výchovou mláďat. *Záletník*, pokud se s ním samička nechce hned pářit, ztrácí trpělivost a hledá si jinou samičku; po kopulaci se nezdržuje a vyrazí za další samičkou. Uvažujme namátkově zvolené hodnoty pro výdaje a prospěch, které vyjadřují ”zisk” z úspěšně vychovaného mláděte (+15 bodů pro každého rodiče), výdaje na výchovu, potravu, čas strávený hlídáním, ochranu apod (-20 bodů pro toho, kdo vychovává - tj. buď celkem pro oba, nebo jen pro opuštěnou samičku), čas vyplýtvaný prodlouženými námluvami (-3 body):

Strategie	Věrný	Záletník
Zdrženlivá	$(2, 2)$	$(0, 0)$
Nevázaná	$(5, 5)$	$(-5, 15)$

I když se v přírodě setkáváme spíše s tzv. genetickým polymorfismem, kdy určitá část populace používá jednu strategii a zbytek druhou, jsou druhy, které používají skutečné smíšené strategie, například vosa *severoamerická kutilka*. Každá samice se stará sama o sebe, svůj život zasvěcuje shánění přístřeší a potravy pro své larvální potomstvo: vyhloubí tunelovou noru s komůrkou na dně, vyrazí na lov sarančete, svou oběť paralyzuje a odtáhne do nory; když nashromáždí čtyři až pět sarančat, položí na hromadu vajíčko a chodbu uzavře. Larva pak v komůrce, dokud nedospěje, pojídá paralyzovaná (avšak živá a tedy čerstvá) sarančata.

Každá kutilka má přitom k dispozici dvě možné strategie: hloubit vlastní noru, anebo obsadit noru cizí, již vyhloubenou (to však v sobě nese riziko, že nora může být obsazená, což vosa zvenku nepozná). Snadno si představíme, že v případě, že by byla příliš často používána druhá strategie, nebylo by co obsazovat a vyplatilo by se hloubit vlastní hnízdo, velká dostupnost chodeb by naopak upřednostňovala obsazování.

J. Brockmannová, R. Dawkins a A. Grafen studovali časové a energetické výdaje a reprodukční zisky kutilek a ukázali, že na základě pozorování a kvantitativních měření je jednak skutečně možné určit konkrétní a reálné hodnoty *výplatních funkcí*, jednak ukázali, že kutilky používají „opravdové“ smíšené strategie: každá kutilka někdy kope, někdy obsazuje cizí hnízdo. Pravděpodobnosti vypočítané z modelu přitom odpovídaly terénním pozorováním.

Více se na toto téma lze dočíst například v mimořádně zajímavých knížkách Richarda Dawkinse:

Dawkins, R.: *The Selfish Gene.* Oxford, Oxford University Press, 1976 (český překlad V. Kopského *Sobecký gen*, Praha, Mladá Fronta).

Dawkins, R.: *The Blind Watchmaker.* Harlow, Longman, 1986 (český překlad T. Grima *Slepý hodinář*, Praha, Paseka, 2002).

Evoluční teorie her

Obecně je evoluční hra popsána následujícím modelem:

$x(0)$	...	počáteční vektor populace
A	...	matice hry
x_i	...	část hráčů používajících strategii i
$(Ax^T)_i$	...	očekávaná výplata agenta hrajícího strategii i proti oponentovi náhodně vybranému z populace x
xAx^T	...	průměrná výplata v populaci
$\lambda(x)$	...	funkce nabývající kladných hodnot

Začátek: Každému hráči je přiřazena ryzí strategie

$\leadsto$ V každém časovém okamžiku hráč hraje proti náhodně vybranému oponentovi, pozoruje svou a oponentovu výplatu, načež mění svou strategii s pravděpodobností úměrnou rozdílu výplat:

$$\frac{\dot{x}_i}{x_i} = \lambda(x) \cdot ((Ax^T)_i - xAx^T),$$

tj.

$$\dot{x}_i = \lambda(x) \cdot x_i \cdot ((Ax^T)_i - xAx^T),$$

$\lambda(x) = 1$ **... replikátorová dynamika**

Simon Fischer, Berthold Vöcking, 2005:

On the Evolution of Selfish Routing

Početná „populace agentů“ v síti, každý agent volí jednu z možných cest.

- ➥ **Dynamika sobeckého směrování**

$$\dot{x}_p = \lambda(x) \cdot x_p \cdot (\bar{l}(x) - l_p(x)),$$

Simon Fischer, Berthold Vöcking, 2005:

On the Evolution of Selfish Routing

Početná „populace agentů“ v síti, každý agent volí jednu z možných cest.

- **Dynamika sobeckého směrování**

$$\dot{x}_p = \lambda(x) \cdot x_p \cdot (\bar{l}(x) - l_p(x)),$$

- **Stabilita**
  Strategie x se nazývá evolučně stabilní, je-li rovnovážná a pro každou nejlepší odpověď y na x platí: $x \cdot l(y) = y \cdot l(y)$.

Simon Fischer, Berthold Vöcking, 2005:

On the Evolution of Selfish Routing

Početná „populace agentů" v síti, každý agent volí jednu z možných cest.

- **Dynamika sobeckého směrování**

  $$\dot{x}_p = \lambda(x) \cdot x_p \cdot (\bar{l}(x) - l_p(x)),$$

- **Stabilita**
  Strategie x se nazývá evolučně stabilní, je-li rovnovážná a pro každou nejlepší odpověď y na x platí: $x \cdot l(y) = y \cdot l(y)$.

- **Rychlost konvergence**
  Jak rychle systém dosáhne rovnovážného stavu nebo stavu blízkého

Ana L. C. Bazzan, 2005: *A Distributed Approach for Coordination of Traffic Signal Agents*

- **Potřeba funkční a prostorové decentralizace řízení městské dopravy** ⇐ omezení reálným časem, komunikačními možnostmi, nedokonalou „interoperativností“ HW

Ana L. C. Bazzan, 2005: *A Distributed Approach for Coordination of Traffic Signal Agents*

- **Potřeba funkční a prostorové decentralizace řízení městské dopravy** ⇐ omezení reálným časem, komunikačními možnostmi, nedokonalou „interoperativností“ HW
- **Model:** Křižovatky na dopravních tepnách = agenti, kteří se účastní dynamického procesu, kde jsou v úvahu brány nejen sobecké lokální, ale i globální cíle

Ana L. C. Bazzan, 2005: *A Distributed Approach for Coordination of Traffic Signal Agents*

- **Potřeba funkční a prostorové decentralizace řízení městské dopravy** ⇐ omezení reálným časem, komunikačními možnostmi, nedokonalou „interoperativností“ HW
- **Model:** Křižovatky na dopravních tepnách = agenti, kteří se účastní dynamického procesu, kde jsou v úvahu brány nejen sobecké lokální, ale i globální cíle
- **Agent** při plnění úkolů jedná nezávisle, shromažďuje a zpracovává data, plánuje, uskutečňuje plány, . . .

Ana L. C. Bazzan, 2005: *A Distributed Approach for Coordination of Traffic Signal Agents*

- **Potřeba funkční a prostorové decentralizace řízení městské dopravy** ⇐ omezení reálným časem, komunikačními možnostmi, nedokonalou „interoperativností“ HW
- **Model:** Křižovatky na dopravních tepnách = agenti, kteří se účastní dynamického procesu, kde jsou v úvahu brány nejen sobecké lokální, ale i globální cíle
- **Agent** při plnění úkolů jedná nezávisle, shromažďuje a zpracovává data, plánuje, uskutečňuje plány, . . .
- Každý agent má informace pouze o místní dopravní situaci (detektory)
- Omezená komunikace

Ana L. C. Bazzan, 2005: *A Distributed Approach for Coordination of Traffic Signal Agents*

- **Potřeba funkční a prostorové decentralizace řízení městské dopravy** ⇐ omezení reálným časem, komunikačními možnostmi, nedokonalou „interoperativností“ HW
- **Model:** Křižovatky na dopravních tepnách = agenti, kteří se účastní dynamického procesu, kde jsou v úvahu brány nejen sobecké lokální, ale i globální cíle
- **Agent** při plnění úkolů jedná nezávisle, shromažďuje a zpracovává data, plánuje, uskutečňuje plány, . . .
- Každý agent má informace pouze o místní dopravní situaci (detektory)
- Omezená komunikace
- **I bez centrální autority může systém dospět ke koordinaci – i když to bude trvat určitý čas**

MODEL:

Každý **agent** $i \in Q = \{1, 2, \ldots, n\}$ hraje hru G dvou hráčů proti každému agentu-sousedstvi $j \in N_i$; hráč n je „příroda“

Množina strategií agenta $i : A_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}\}$

Výplatní funkce: $u_i : \; A_1 \times \cdots \times A_n \to \mathbb{R}$

Smíšená strategie: $p_i = (p_{i,1}, \ldots, p_{i,k}, \ldots, p_{i,m}),$

$$p_{i,k} \geq 0, \quad p_{i,1} + \cdots + p_{i,m} = 1$$

S_i – množina všech smíšených strategií agenta i

$S = S_1 \times \cdots \times S_n$

Začátek: „příroda“ (dopravní tok) určí výplatní funkce všech agentů

V čase t agent i zvolí strategii a obdrží výplatu = součet výplat získaných v hrách s každým ze sousedů $\rightarrow$ v následujícím období aktualizuje strategii v závislosti na výplatě

Období změny stavu

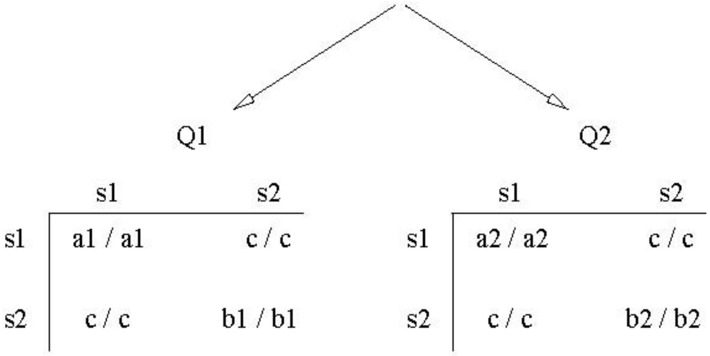
Lokální změna v čase $t = \rho$ na křižovatce i

$\Longrightarrow$ agent i aktualizuje smíšenou strategii p_i v závislosti na toku vozidel $q_{i,k}$ měřeném na každém z detektorů k :

$$p_{i,t} = (p_{i,1,t}, \dots, p_{i,m,t}) = \left[\frac{q_{i,1,t}}{\sum_k q_{i,k,t}}, \dots, \frac{q_{i,m,t}}{\sum_k q_{i,k,t}} \right]$$

Období výplat

Globální změna $\Longrightarrow$ změna výplatních funkcí



Q1

	s1	s2
s1	a1 / a1	c / c
s2	c / c	b1 / b1

Q2

	s1	s2
s1	a2 / a2	c / c
s2	c / c	b2 / b2

$$a_1 > b_1, c \quad b_1 > c, \qquad\qquad b_2 > a_2, c \quad a_2 > c,$$

Rovnovážné body: $(s_1, s_1),\ (s_2, s_2),\ (p_1, p_1),\ (p_2, p_2)$

$$p_1 = \left(\tfrac{b_1}{a_1+b_1}, \tfrac{a_1}{a_1+b_1}\right), \quad p_2 = \left(\tfrac{b_2}{a_2+b_2}, \tfrac{a_2}{a_2+b_2}\right)$$

Období učení

V těchto obdobích mají agenti čas na učení, jak měnit strategie, aby se zkoordinovali a směřovali ke globálnímu cíli (období nastávají náhodně s četností určenou pro daný model)

Aktualizace smíšených strategií:

$$p_i = \left(\frac{\pi_{i,1,\Delta}}{\sum_k \pi_{i,k,\Delta}}, \ldots, \frac{\pi_{i,m,\Delta}}{\sum_k \pi_{i,k,\Delta}} \right), \qquad 1 \leq k \leq m, \quad a_{i,k} \in A_i$$

$$\pi_{i,k,t} = \lambda \cdot \pi^*_{i,k,t} + (1-\lambda) \cdot \overline{\pi}_{i,k,\Delta}$$

λ **– paměťový faktor,** $0 < \lambda < 1$

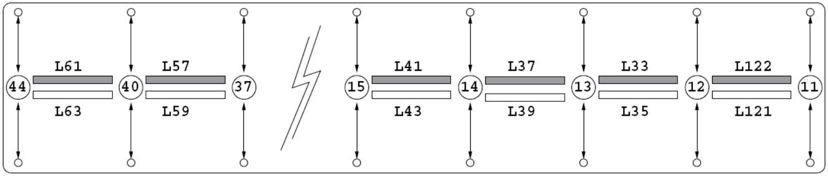
poslední období změny stavu před 0 . . . $t = \rho < 0$

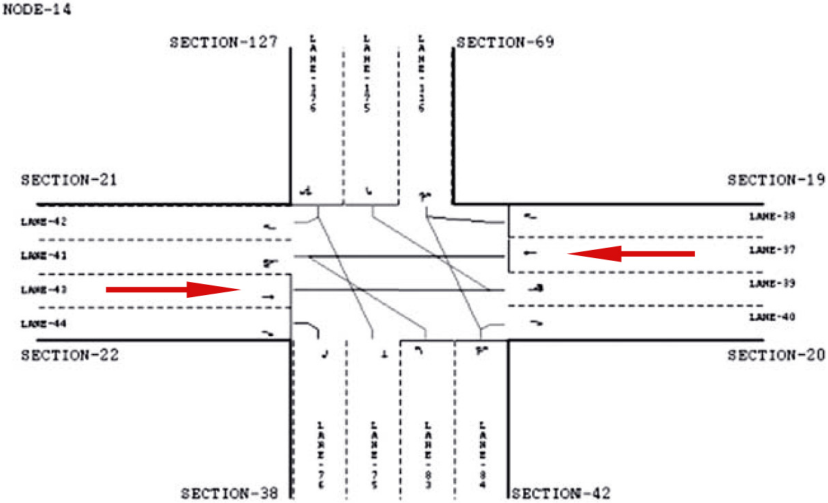
interval učení . . . $\Delta = (\delta, 0)$

výplata získaná jednáním $a_{i,k}$ před t . . . $\pi^*_{i,k,t}$

průměrná výplata získaná jednáním $a_{i,k}$ během Δ . . . $\overline{\pi}_{i,k,\Delta}$

Simulace


L61
L57
L41
L37
L33
L122
44
40
37
15
14
13
12
11
L63
L59
L43
L39
L35
L121


NODE-14
SECTION-127
LANE-126
LANE-125
LANE-126
SECTION-69
SECTION-21
SECTION-19
LANE-42
LANE-41
LANE-43
LANE-44
LANE-38
LANE-37
LANE-39
LANE-40
SECTION-22
SECTION-20
LANE-76
LANE-75
LANE-83
LANE-84
SECTION-38
SECTION-42

Agent 15

Agent 14

$$\begin{array}{c|ccc} & s_{PW} & & s_{PE} \\ \hline s_{PW} & \mathbf{(2,2)} & \leftarrow & (0,0) \\ & \uparrow & & \downarrow \\ s_{PE} & (0,0) & \rightarrow & \boxed{(1,1)} \end{array}$$

Agent 15

Agent 14

$$\begin{array}{c|ccc} & s_{PW} & & s_{PE} \\ \hline s_{PW} & \boxed{\mathbf{(1,1)}} & \leftarrow & (0,0) \\ & \uparrow & & \downarrow \\ s_{PE} & (0,0) & \rightarrow & (2,2) \end{array}$$

Experiment A

Výplatní funkce odrážejí globální cíle

sledování závislosti na četnosti intervalů učení

stacionární stav dosažen ve většině simulovaných situací, uspokojivý čas

Experiment B

Výplatní funkce odrážejí jen lokální cíle

čas potřebný k dosažení stejných výsledků je delší než v A

Experiment C

Komunikace a přenos informací mezi sousedy

Čas potřebný k dosažení koordinace je delší než bez komunikace

Srovnání s centrálním řízením dopravy

centrální řízení vede k lepším výsledkům v případech, kdy tok vozidel je v jednom směru výrazně vyšší než v druhém

Srovnání s centrálním řízením dopravy

centrální řízení vede k lepším výsledkům v případech, kdy tok vozidel je v jednom směru výrazně vyšší než v druhém

jinak vítězí navržený decentralizovaný systém

8 KOOPERATIVNÍ HRY DVOU HRÁČŮ

V této kapitole se budeme zabývat situacemi, kdy hráči mohou před začátkem hry uzavřít závaznou dohodu o tom, jaké použijí strategie, vygenerovaný zisk si však nemohou přerozdělit (tak je tomu například vždy, kdy hodnoty výplatní funkce představují užitek jedince).

Ve čtvrté kapitole jsme uvažovali následující příklad:

☛ ***Příklad 1*** – **Konflikt typu manželský spor.**

Představme si manželský pár, v němž mají partneři poněkud odlišné názory na nejlepší využití volného večera: žena dává přednost návštěvě boxu, muž fotbalu. Půjdou-li na box, přinese to větší užitek ženě a menší muži, půjdou-li na fotbal, bude tomu naopak. Půjde-li však každý jinam, bude výsledkem celkové rozladění a užitek bude pro každého z nich menší, než by tomu bylo v případě návštěvy méně preferované akce. Situaci si můžeme znázornit například následující dvojmaticí popisující užitek pro ženu a muže při jednotlivých kombinacích trávení volného večera:

Pepíček

Maruška

$$\begin{array}{c|ccc} \text{Strategie} & \text{Box} & & \text{Balet} \\ \hline \text{Box} & \boxed{(\mathbf{2},\mathbf{1})} & \leftarrow & (0,0) \\ & \uparrow & & \downarrow \\ \text{Balet} & (0,0) & \rightarrow & \boxed{(1,2)} \end{array}$$

Rovnovážné body v ryzích strategiích: (Box, Box), (Balet, Balet)

Rovnovážný bod ve smíšených strategiích:

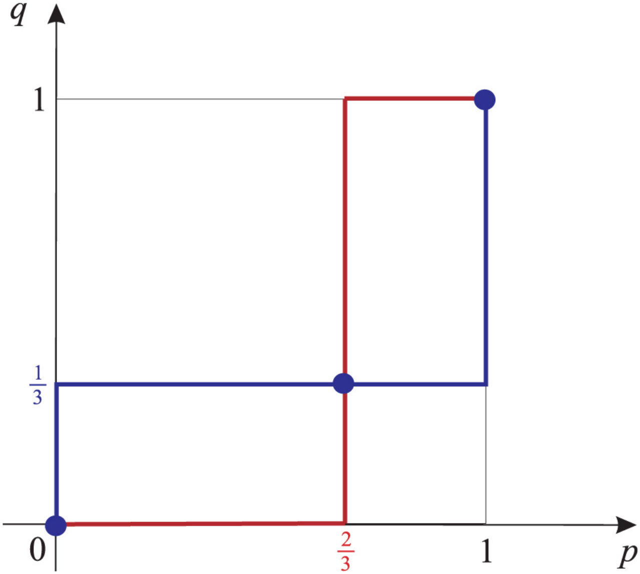
$$\pi_1(p,q) = 2pq + 1(1-p)(1-q) = 3pq - p - q + 1$$

$$\pi_2(p,q) = 1pq + 2(1-p)(1-q) = 3pq - 2p - 2q + 1$$

$$\pi_1(p,q) = p(3q-1) - q + 1, \qquad \pi_2(p,q) = q(3p-2) - 2p + 1$$

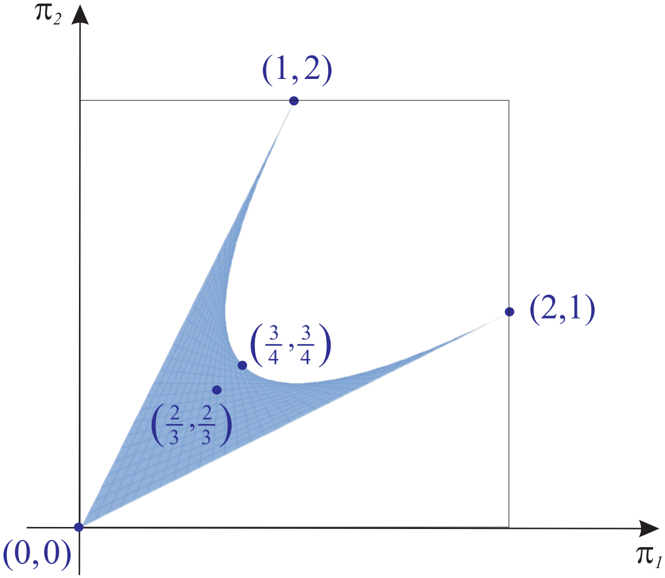
Reakční křivky:

$$R_1(q) = \begin{cases} 0 & \dots\ q \in \langle 0, \frac{1}{3}) \\ \langle 0,1 \rangle & \dots\ q = \frac{1}{3} \\ 1 & \dots\ q \in (\frac{1}{3}, 1\rangle \end{cases} \qquad R_2(p) = \begin{cases} 0 & \dots\ p \in \langle 0, \frac{2}{3}) \\ \langle 0,1 \rangle & \dots\ p = \frac{2}{3} \\ 1 & \dots\ p \in (\frac{2}{3}, 1\rangle \end{cases}$$



Rovnovážný bod	**Očekávaná výhra**
$((1,0),(1,0))$	$(2,1)$
$((\frac{2}{3},\frac{1}{3}),(\frac{1}{3},\frac{2}{3}))$	$(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$
$((0,1),(0,1))$	$(2,1)$

Následující obrázek zobrazuje všechny dvojice výplatních funkcí, tj. všechny body dosažitelné v rámci nekooperativní hry.



DVOJMATICOVÁ HRA

Hráč 2

	Strategie	t_1	t_2	$\dots$	t_n
	s_1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	$\dots$	(a_{1n}, b_{1n})
Hráč 1	s_2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	$\dots$	(a_{2n}, b_{2n})
	$\vdots$	$\dots\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots\dots$
	s_m	(a_{m1}, b_{m1})	(a_{m2}, b_{m2})	$\dots$	(a_{mn}, b_{mn})

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Kooperativní hry dvou hráčů

Definice 1. Nechť G je dvojmaticová hra dvou hráčů s výplatními maticemi A, B typu $m \times n$. **Společnou strategií** budeme rozumět matici pravděpodobností $P = (p_{ij})$ typu $m \times n$, tj.

$$p_{ij} \geq 0 \quad \text{pro} \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

Společná strategie tedy přiřazuje pravděpodobnost každé dvojici ryzích strategií. Očekávané hodnoty výplatní funkce jsou pro jednotlivé hráče při společné strategii P rovny

$$u(P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} a_{ij}, \qquad v(P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} b_{ij}$$

☛ *Příklad 2*

Ve hře Manželský spor: společnou strategií je například matice

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Očekávaná hodnota výhry Marušky:

$$u(P) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{5}{4}$$

Očekávaná hodnota výhry Pepíčka:

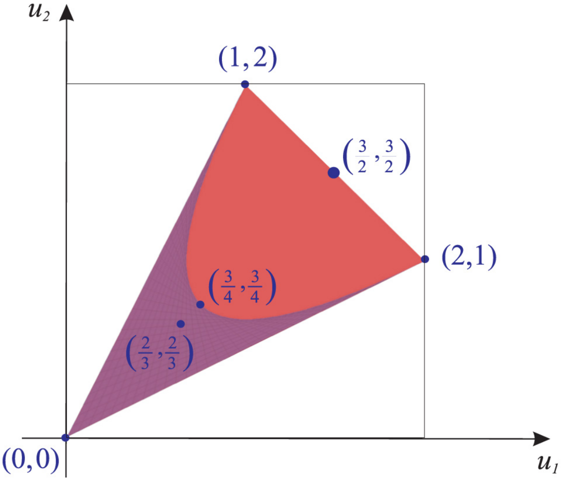
$$v(P) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 1$$

V **kooperativní hře** hráči uzavírají dohodu o tom, jakou společnou strategii mají zvolit.

Definice 2. Kooperativní výplatní oblast je množina

$$\mathbf{K} = \{(u(P), v(P)) : \; P \text{ je společná strategie}\}. \qquad (8.1)$$

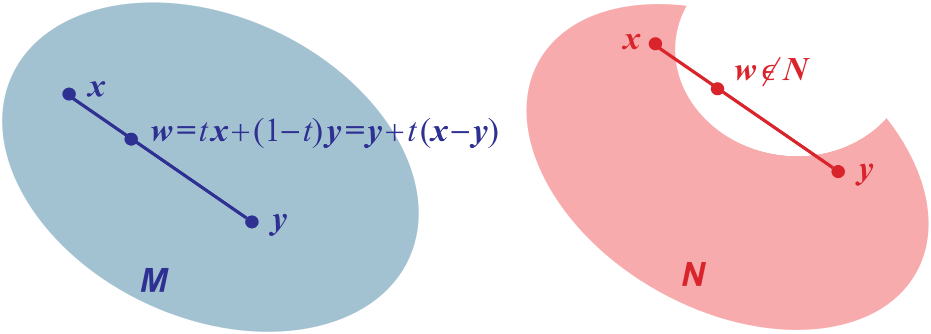
K je **konvexní, uzavřená a omezená množina** obsahující odpovídající nekooperativní oblast



KONVEXNÍ MNOŽINY

Definice 3. Množina **M** $\subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **konvexní**, jestliže pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in$ **M** a každé reálné číslo t, $0 \leq t \leq 1$, platí:

$$t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$$



Jinými slovy, množina **M** je konvexní, jestliže každá úsečka, jejíž koncové body leží v **M**, leží celá v **M**.

Definice 4. Nechť $F = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k\}$ je konečná podmnožina $\mathbb{R}^n$. **Konvexní kombinací** množiny F se rozumí vektor

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{k} t_i \boldsymbol{x}_i, \qquad \text{kde } t_1 \geq 0, \dots, t_k \geq 0, \quad t_1 + \cdots t_k = 1.$$

Tvrzení 1. *Množina všech konvexních kombinací množiny* $F = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k\}$ *je konvexní.*

Důkaz. Pro libovolné dvě konvexní kombinace

$$y = t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n, \quad z = s_1 x_1 + \cdots + s_n x_n$$

a libovolné $k \in \langle 0, 1 \rangle$ platí:

$$ky + (1-k)z = [kt_1 + (1-k)s_1]x_1 + \cdots + [kt_{n-1} + (1-k)s_{n-1}]x_{n-1} +$$

$$+[k(1 - t_1 - \cdots - t_{n-1}) + (1-k)(1 - s_1 - \cdots - s_{n-1})]x_n =$$

$= a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n,$ kde $a_1 + \cdots + a_n = 1$ $\square$

Tvrzení 2. *Je-li daná množina **M** konvexní, pak každá konvexní kombinace bodů z **M** opět leží v **M**.*

Důkaz. Indukcí dokážeme: $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\} \subset M \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} t_i \boldsymbol{x}_i \in M$.

$\underline{n = 1:}$ OK

$\underline{n \Rightarrow n+1:}$ Uvažujme $z = t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1}$,

$t_1 + \cdots + t_{n+1} = 1$; označme $t_1 + \cdots + t_n = t,\ t_{n+1} = 1 - t$.

Zřejmě platí:

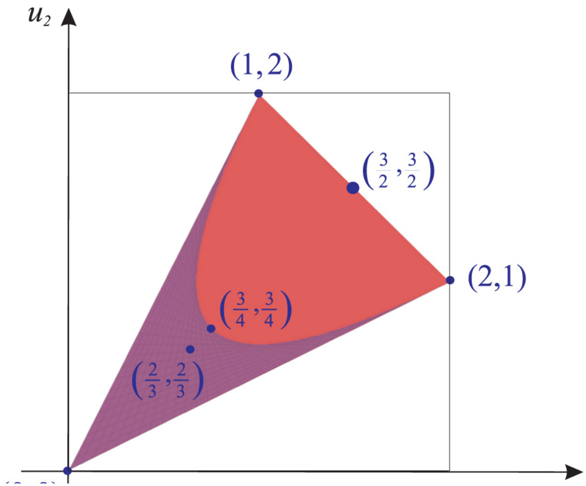
$z = t\left(\frac{t_1}{t} x_1 + \cdots + \frac{t_n}{t} x_n\right) + (1-t) x_{n+1}, \quad \frac{t_1}{t} + \cdots + \frac{t_n}{t} = 1.$

Podle indukčního předpokladu je $\frac{t_1}{t} x_1 + \cdots + \frac{t_n}{t} x_n \in M$. $\square$

Definice 5. Nechť **A** je podmnožina $\mathbb{R}^n$. **Konvexním obalem** množiny **A** se nazývá nejmenší konvexní množina obsahující **A**. Konvexní obal budeme značit symbolem conv(**A**).

Poznámka. Z předchozích tvrzení plyne:

- conv(**A**) průnikem všech konvexních množin obsahujících **A**.
- Konvexní obal množiny **A** je množinou všech konvexních kombinací bodů z **A**.



Věta 1. *Nechť G je hra je hra dvou hráčů určená dvojmaticí C typu $m \times n$. Kooperativní výplatní oblast je konvexní uzávěr množiny bodů v $\mathbb{R}^2$, jejichž souřadnice jsou prvky dvojmatice C.*

Důkaz. Je-li P společná strategie, pak odpovídající dvojice hodnot výplatních funkcí je

$$(u(P), v(P)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} c_{ij}.$$

Všechny tyto body vytvoří konvexní uzávěr množiny

$$\{c_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Naopak, jakýkoli bod konvexního uzávěru této množiny je výplatní dvojicí. □

Definice 6. Množina **S** $\subset \mathbb{R}^2$ se nazývá **symetrická,** jestliže pro každé $u, v \in \mathbb{R}$ platí:

$$(v, u) \in \textbf{S} \iff (u, v) \in \textbf{S}.$$

Definice 7. Uvažujme množinu **A** $\subset \mathbb{R}^2$. **Symetrický konvexní obal** množiny **A** je definován jako konvexní obal množiny

$$\mathbf{A} \cup \{(v,u): \ (u,v) \in \mathbf{A}\}$$

a značí se symbolem sconv(**A**).

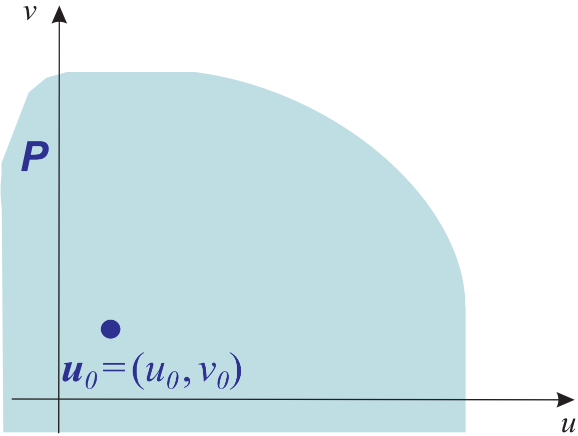
Tvrzení 3. *Nechť **A** $\subset \mathbb{R}^2$ a k je takové číslo, že pro každý bod $(u,v) \in$ **A** platí:*

$$u + v \leq k.$$

Potom stejná nerovnost platí pro každý bod symetrického konvexního uzáveru sconv(**A**).

VYJEDNÁVACÍ PROBLÉM

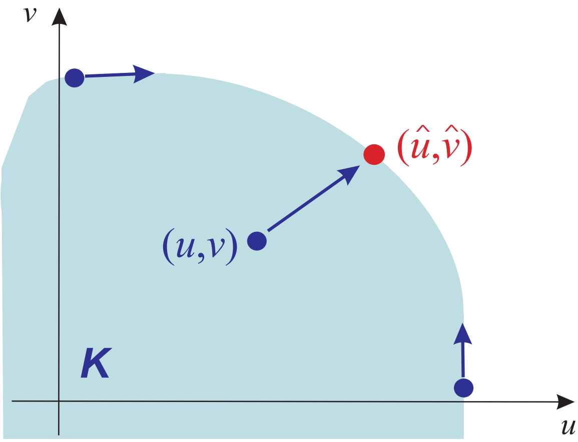
Definice 8. Vyjednávacím problémem budeme rozumět uspořádanou dvojici $(\mathbf{P}, u)$, kde **P** je kooperativní výplatní oblast, $\boldsymbol{u}_0 = (u_0, v_0)$, kde u_0, v_0 jsou výplaty v případě nedosažení dohody („hrozby“).



Definice 9. Dvojice hodnot výplatních funkcí $(\hat{u}, \hat{v}) \in \mathbf{K}$ se nazývá **paretovská** či **nedominovaná**, jestliže neexistuje žádná jiná výplatní dvojice $(u, v) \in \mathbf{K}$, pro kterou by bylo

$$u \geq \hat{u} \qquad \text{a zároveň} \qquad v \geq \hat{v},$$

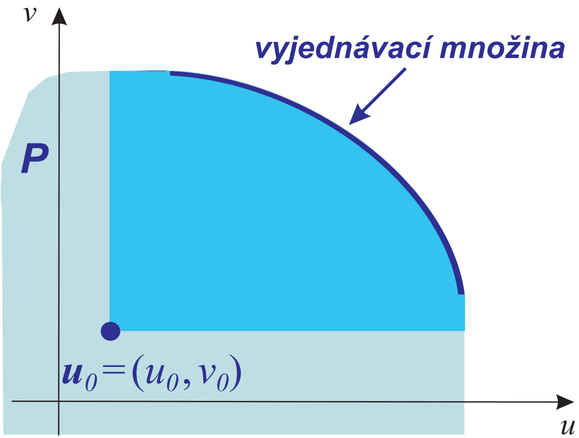
přičemž alespoň jedna nerovnost by byla ostrá.



Definice 10. Vyjednávací množina pro daný vyjednávací problém je množina všech **Paretovských** výplatních dvojic $(u, v) \in$ **P** takových, že

$$u \geq v_0, \qquad v \geq v_0,$$

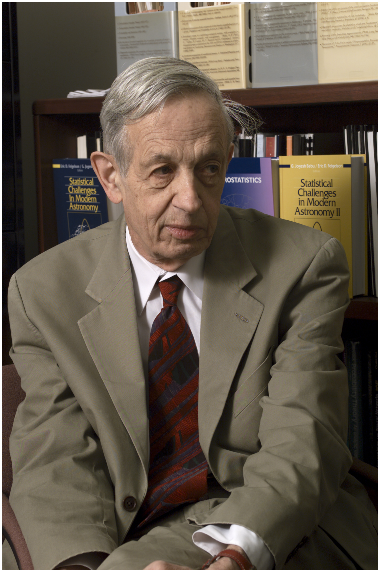
kde $u = (u_0, v_0)$ je důsledek nedosažení dohody.

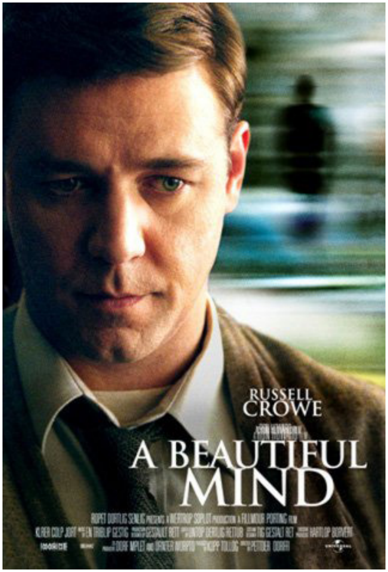


JOHN FORBES NASH (*1928)

1950 The bargaining problem, Econometrica 18

1953 Two-person cooperative games, Econometrica 21





Nashovy vyjednávací axiomy

Uvažujme vyjednávací problém $(\mathbf{P}, (u_0, v_0))$, označme jeho řešení $\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u^*, v^*)$.

Podmínka 1 (Individuální racionalita)

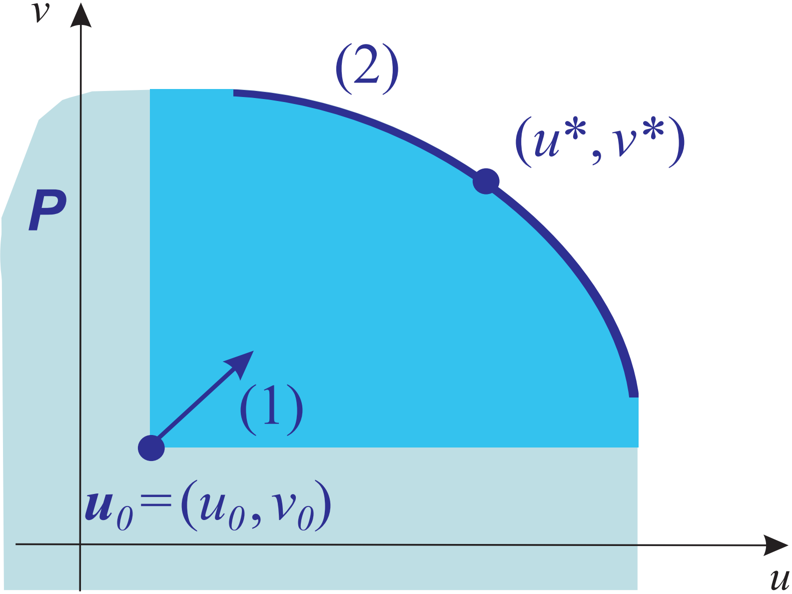
$$u^* \geq u_0, \;\; v^* \geq v_0$$

Podmínka 2 (Paretovská optimalita)

Dvojice (u^*, v^*) je paretovsky optimální.

Podmínka 3 (Dosažitelnost)

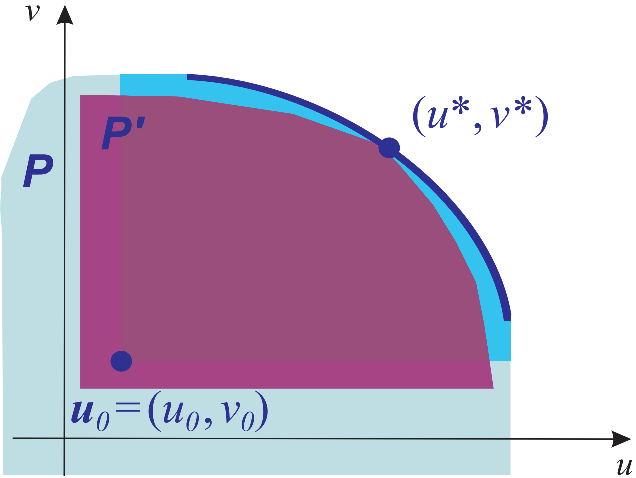
$$(u^*, v^*) \in P.$$


v
(2)
(u^*, v^*)
P
(1)
$\boldsymbol{u}_0 = (u_0, v_0)$
u

Podmínka 4 (Nezávislost na irelevantních alternativách)

Je-li P' výplatní oblast obsažená v P a obě dvojice $(u_0, v_0),\ (u^*, v^*) \in P'$, pak

$$\Psi(P', (u_0, v_0)) = (u^*, v^*).$$



Podmínka 5 (Nezávislost na lineární transformaci)

Je-li P' získáno z P lineární transformací

$$u' = au + b, \qquad v' = cv + d, \qquad \text{kde} \quad a, c > 0,$$

pak

$$\Psi(P', (au_0 + b, cv_0 + d)) = (au^* + b, cv^* + d).$$

Podmínka 6 (Symetrie)

Je-li množina P symetrická (tj. $(u, v) \in P \Leftrightarrow (v, u) \in P$) a $u_0 = v_0$, pak je $u^* = v^*$.

Věta 2. *Existuje právě jeden* **„arbitrážní proces“** Ψ *splňující podmínky 1–6.*

Důkaz.

● **Konstrukce** Ψ.

Případ (i) Existuje $(u, v) \in \mathbf{P}$, kde $u > u_0$ a $v > v_0$.

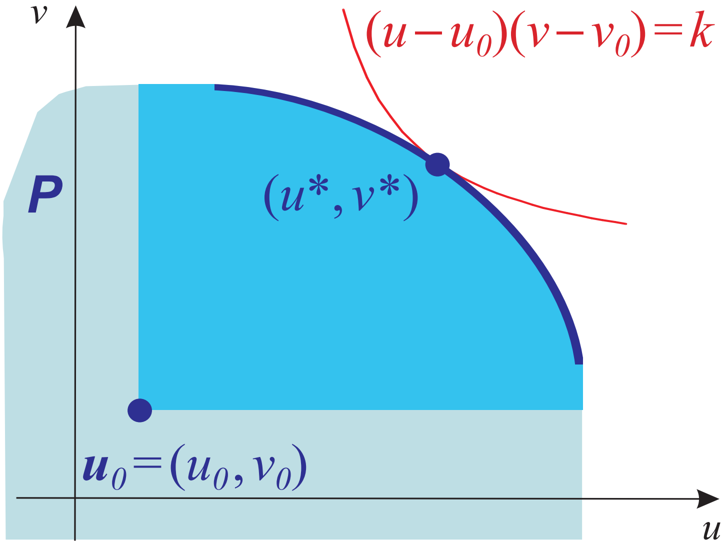
Označme $\mathbf{K} = \{(u, v) \in \mathbf{P}, u > u_0, v > v_0\}$ a definujme

$$g(u, v) = (u - u_0)(v - v_0) \quad \text{pro} \quad (u, v) \in \mathbf{K}.$$

Existuje právě jeden bod (u^*, v^*), v němž $g(u, v)$ nabývá maximální hodnoty.

Položme

$$\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u^*, v^*).$$



Případ (ii)

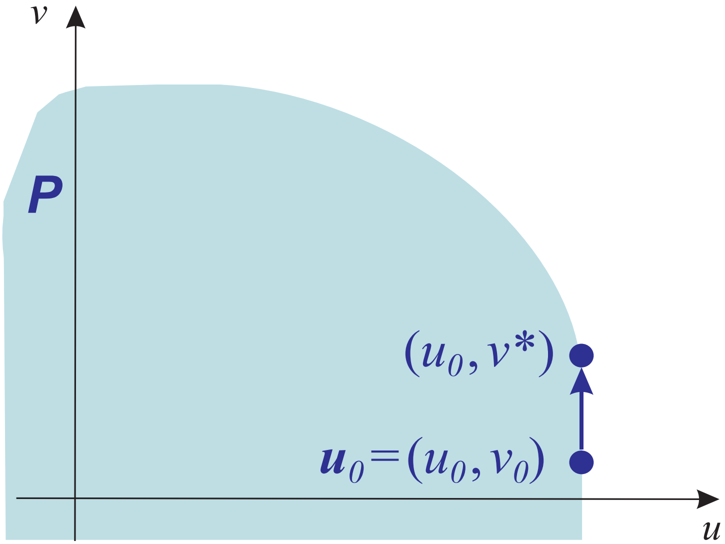
Pro žádný bod $(u, v) \in$ **P** neplatí zároveň $u > u_0$ a $v > v_0$.

Případ (iia) Existuje bod $(u_0, v) \in \mathbf{P}$, pro který $v > v_0$.

Největší v s touto vlastností, kde $(u_0, v) \in \mathbf{P}$, označme v^*.

Položme

$$\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u_0, v^*).$$

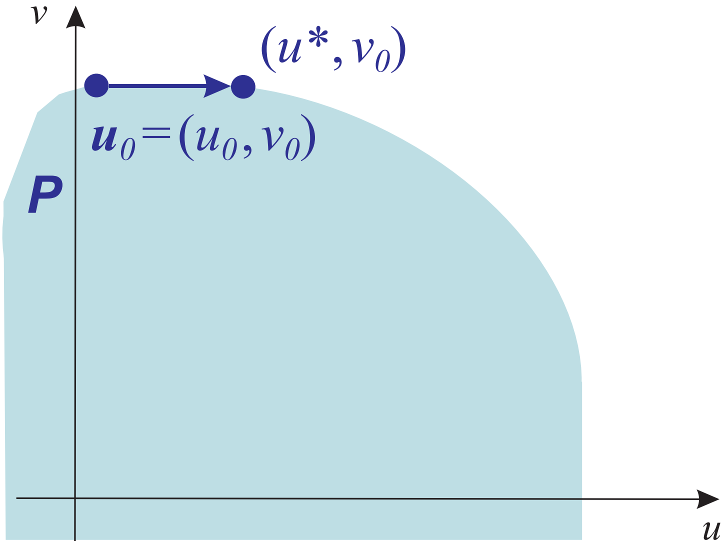


Případ (iib) Existuje bod $(u, v_0) \in \mathbf{P}$, pro který $u > u_0$.

Největší u s touto vlastností, pro něž $(u, v_0) \in \mathbf{P}$, označme u^*.

Položme

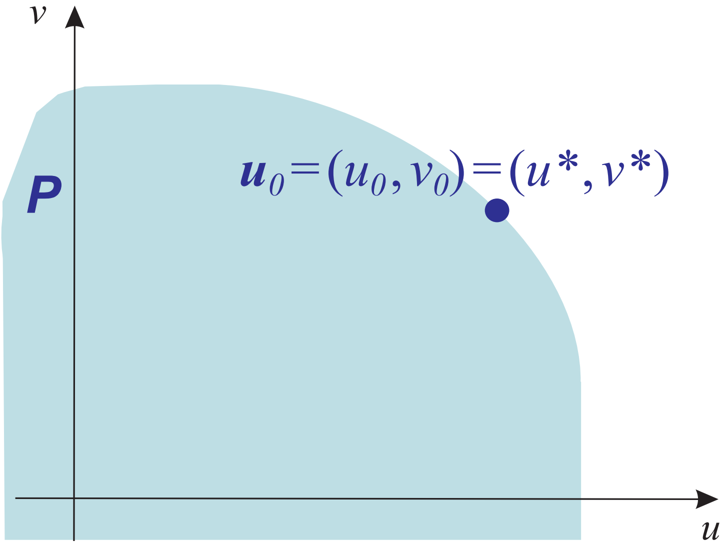
$$\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u^*, v_0).$$



Případ (iic) Nenastává ani jeden z případů (iia), (iib).

Položme

$$\Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u_0, v_0).$$



• Ověření Nashových axiomů.

Podmínky (1) a (3) jsou zřejmě splněny ve všech případech.

Podmínka (2): Pokud by nebyla splněna, pak by existoval bod $(u,v) \in$ **P**, $(u,v) \neq (u^*,v^*)$, který by dominoval bodu (u^*,v^*).

V případě **(i)** by platilo

$$(u-u_0) \geq (u^*-u_0), \;\; (v-v_0) \geq (v^*-v_0)$$

a aspoň jedna z těchto nerovností by byla ostrá ($(u,v) \neq (u^*,v^*)$). Proto

$$g(u,v) > g(u^*,v^*),$$

což je **spor s konstrukcí** (u^*,v^*).

V případě **(iia)** musí být $u^* = u_0 = u$, protože neplatí zároveň (iib); proto $v > v^*$, což je **spor s definicí** v^*. Analogicky pro **(iib)**.

V případě **(iic)** je $(u^*,v^*) = (u_0,v_0)$; pokud by bylo $u > u_0$, pak by platilo (iib), při $v > v_0$ by nastal případ (iia), což je **spor**.

Podmínka (4): V případě **(i)** je maximální hodnota funkce g na průniku **K** $\cap$ **P**$'$ menší nebo rovna její maximální hodnotě na **K**.

Protože je $(u^*, v^*) \in P'$, jsou si tato maxima rovna.

Proto

$$\Psi(P', (u_0, v_0)) = \Psi(P, (u_0, v_0)).$$

V případech **(iia)**, **(iib)** lze postupovat podobně, případ **(iic)** je snadný.

Podmínka (5): V případě **(i)** platí **(i)** i pro výplatní oblast P' se status quo bodem $(au_0 + b, cv_0 + d)$. Proto

$$(u' - (au_0 + b))(v' - (cv_0 + d)) = ac(u - u_0)(v - v_0).$$

Protože $a, c > 0$, nabývá funkce na levé straně rovnice svého maxima v bodě $(au^* + b, cv^* + d)$. V případě **(i)** tedy podmínka **(5)** platí. Postup v ostatních případech je obdobný.

Podmínka (6): Pokud by bylo $u^* \neq v^*$, pak by ze symetrie plynulo $(v^*, u^*) \in P$; v případě **(i)** by platilo

$$g(v^*, u^*) = g(u^*, v^*).$$

Podle tvrzení 3 nabývá funkce g svého maxima pouze v jednom bodě, což je spor. Případy **(iia)** a **(iib)** nemohou vzhledem k symetrii nastat.

- **Jednoznačnost.**

Důkaz se provede sporem, k němuž se dojde z předpokladu, že existuje jiný arbitrážní proces $\overline{\Psi}$ splňující Nashovy axiomy. Protože jsou tyto procesy různé, existuje výplatní oblast **P** a bod „status quo“ $(u_0, v_0) \in P$, pro něž

$$(\overline{u}, \overline{v}) = \overline{\Psi}(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) \neq \Psi(\mathbf{P}, (u_0, v_0)) = (u^*, v^*).$$

Věta 3. *Nechť **P** je výplatní oblast a $(u_0, v_0) \in P$. Předpokládejme, že existuje bod $(u, v) \in P$ s vlastností*

$$u > u_0, \quad v > v_0;$$

*množinu všech bodů (u, v) uvedené vlastnosti označme symbolem **K**. Definujme na množině **K** funkci*

$$g(u, v) = (u - u_0)(v - v_0).$$

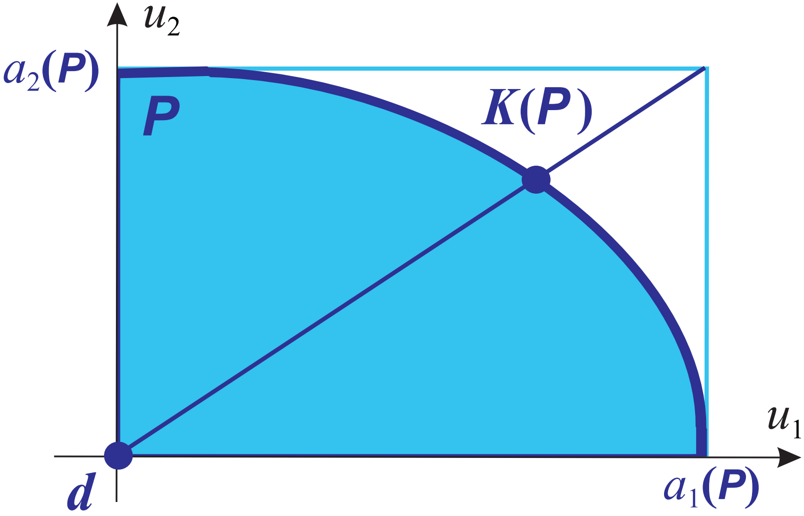
*Potom g dosahuje svého maxima na **K** v právě jednom bodě.*

Ehud Kalai, Meir Smorodinsky

Other Solutions to Nash's Bargaining Problem, 1975

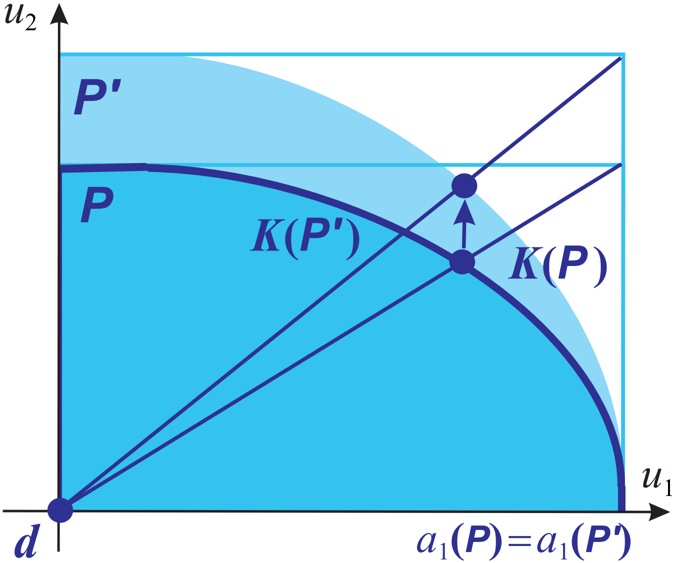
(Econometrica 43, 513–518)

Řešení vycházející z nejoptimističtějších očekávání:



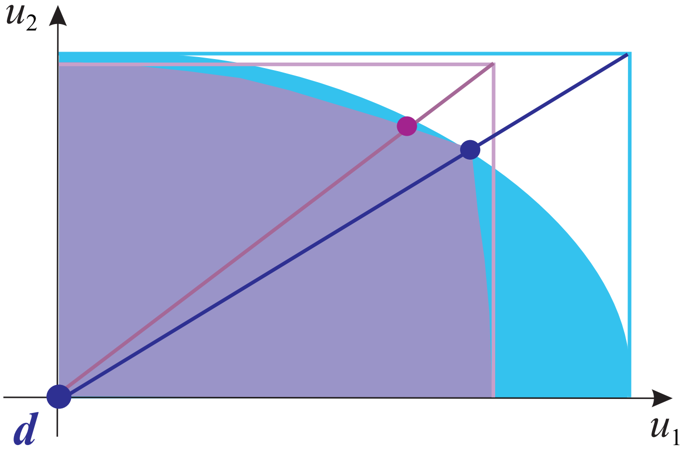
Místo podmínky 4 (nezávislost na irelevantních alternativách):

Individuální monotonie: Je-li $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{P}'$ a pro $j \neq i$ je $a_j(\mathbf{P}') = a_j(\mathbf{P})$, pak $K_i(\mathbf{P}, d) \leq K_i(\mathbf{P}', d)$.

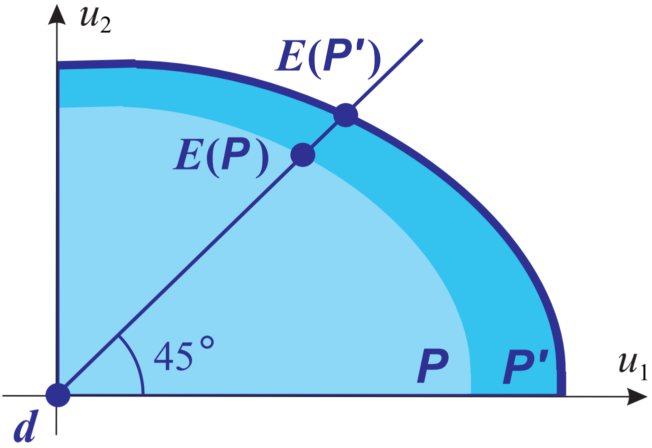


Věta 4. *Kalai-Smorodinského řešení je jediné řešení splňující podmínky paretovské optimality, symetrie, nezávislosti na lineárních transformacích a individuální monotonie* $(n = 2)$.

Závislost na irelevantních alternativách



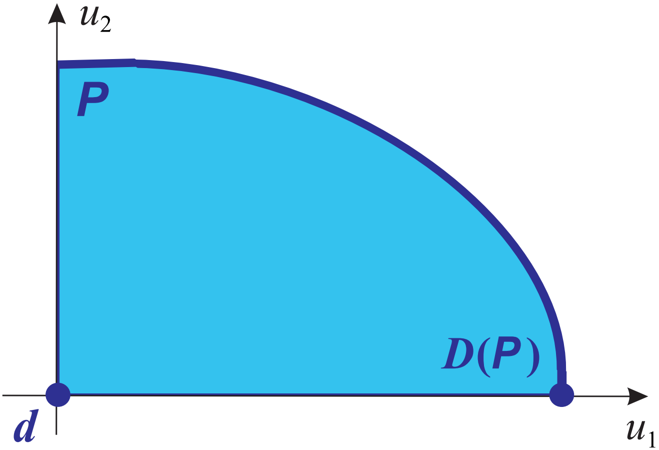
Rovnostářské řešení – Ehud Kalai, 1977



Silná monotonie: Je-li $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{P}'$, pak $K_i(\mathbf{P}, d) \leq K_i(\mathbf{P}', d)$ pro všechna i.

Věta 5. *Rovnostářské řešení je jediné řešení splňující podmínky slabé paretovské optimality, symetrie, a silné monotonie.*

Diktátorské řešení



☛ ***Příklad 3***. Uvažujme kooperativní hru určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (2,-1) & (-2,1) & (1,1) \\ (-1,2) & (0,2) & (1,-2) \end{pmatrix}.$$

Hodnoty u_0, v_0 nalezneme jako minimální zaručené výhry jednotlivých hráčů v nejhorší možné situaci, která pro ně v rámci dané hry může nastat, tj. v situaci, kdy by se je oponent snažil co nejvíce poškodit (to znamená: čím méně dostane první hráč, tím větší užitek pro druhého a naopak). Každý hráč tedy uvažuje antagonistickou hru, kde on má své původní hodnoty a protihráč má vždy opačný zisk.

Z pohledu prvního hráče:

$$\begin{pmatrix} (2,-2) & (-2,2) & (1,-1) \\ (-1,1) & (0,0) & (1,-1) \end{pmatrix}.$$

Můžeme eliminovat poslední sloupec, dále musíme najít smíšené strategie. Protože se nám jedná o zisk prvního hráče v rovnovážném bodě, budeme rovnou pracovat se ziskem prvního hráče a ptát se, kdy je tento hráč indiferentní mezi svými strategiemi, tj. mezi prvním a druhým řádkem:

$$2q - 2(1-q) = -q \qquad \Leftrightarrow \qquad q = 2/5$$

V rovnici máme přímo zisk prvního hráče, stačí tedy dosadit $2/5$ do libovolné strany rovnice a získáme $u_0 = -2/5$.

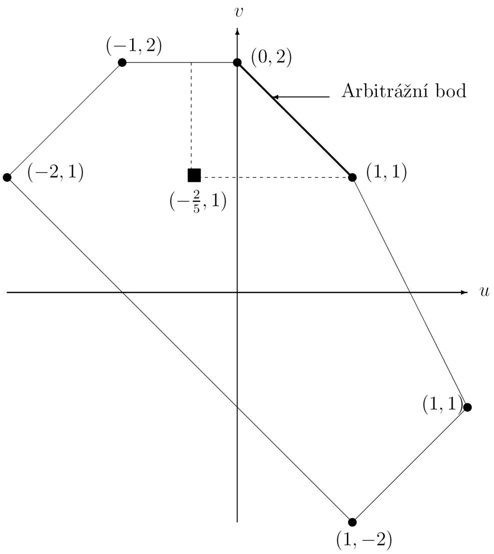
Z pohledu druhého hráče:

$$\begin{pmatrix} (1,-1) & (-1,1) & (-1,1) \\ (-2,2) & (-2,2) & (2,-2) \end{pmatrix}.$$

Druhý sloupec dominuje prvnímu i třetímu, které tedy můžeme eliminovat, v druhém sloupci vidíme rovnovážný bod $(-1,1)$. Nyní nás zajímá zisk druhého hráče, proto $v_0 = 1$.

$$\begin{pmatrix} (2,-1) & (-2,1) & (1,1) \\ (-1,2) & (0,2) & (1,-2) \end{pmatrix}.$$

Maximinní hodnoty: $u_0 = -\frac{2}{5}, v_0 = 1$.



Položme $(u_0, v_0) = (-\frac{2}{5}, 1)$. Arbitrážní bod zřejmě musí být nalezen mezi body výplatní oblasti, které dominují $(-\frac{2}{5}, 1)$ a které nejsou dominovány žádnými jinými body – tj. na úsečce s krajními body $(0, 2)$ a $(1, 1)$, která představuje vyjednávací množinu. Podle konstrukce arbitrážního bodu hledáme maximum funkce

$$g(u, v) = (u - u_0)(v - v_0) = \left(u + \frac{2}{5}\right)(v - 1)$$

na úsečce dané rovnicí $v = -u + 2$. Jedná se tedy o nalezení extrému funkce jedné reálné proměnné

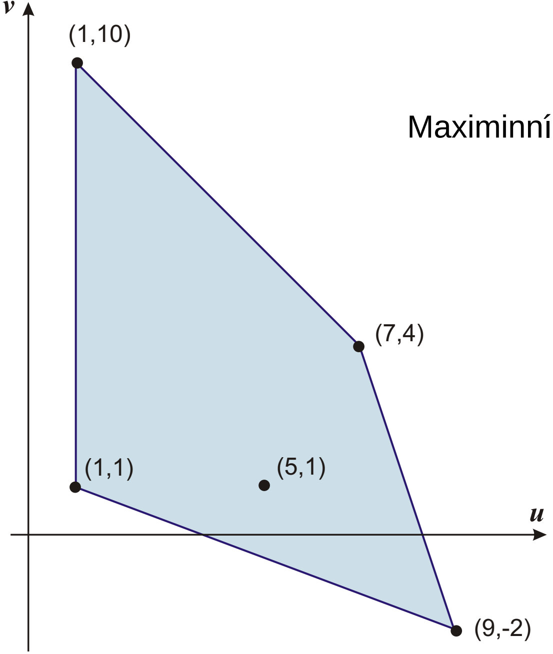
$$g(u, -u + 2) = \left(u + \frac{2}{5}\right)(-u + 1) = -u^2 + \frac{3}{5}u + \frac{2}{5}\ .$$

Pomocí diferenciálního počtu obdržíme

$$u = \frac{3}{10}\ , \quad v = \frac{17}{10}\ .$$

☛ ***Příklad 4***. Uvažujme kooperativní hru určenou dvojmaticí

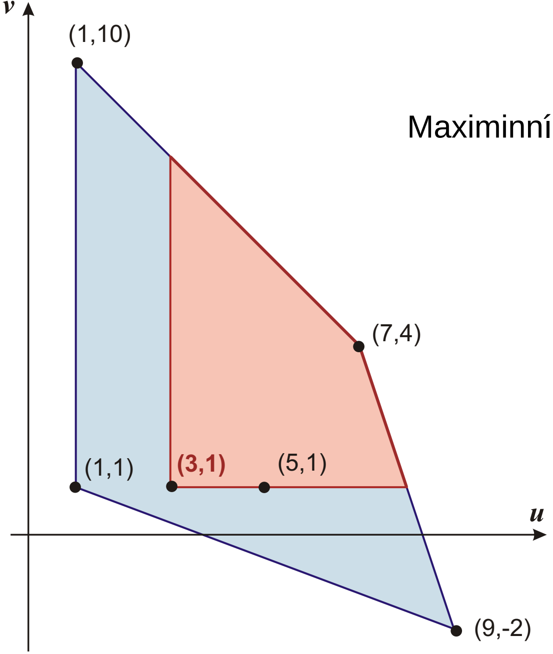
$$\begin{pmatrix} (5,1) & (7,4) & (1,10) \\ (1,1) & (9,-2) & (5,1) \end{pmatrix}.$$



Maximinní hodnoty: $u_0 = 3, v_0 = 1$.

☞ ***Příklad 5***. Uvažujme kooperativní hru určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (5,1) & (7,4) & (1,10) \\ (1,1) & (9,-2) & (5,1) \end{pmatrix}.$$



Maximinní hodnoty: $u_0 = 3, v_0 = 1$.

Vyjednávací množina je nyní tvořena dvěma úsečkami, stejný postup jako v předchozím příkladu se použije na obě úsečky, přičemž pro jednu vyjde bod maxima mimo ni, pro druhou získáme arbitrážní bod

$$u = \frac{13}{2}\ , \quad v = \frac{9}{2}\ .$$

9 KOOPERATIVNÍ HRY N HRÁČŮ

V předchozí kapitole mohli hráči koordinovat své strategie, nemohli však sdílet zisky. Ve hrách studovaných v této kapitole budou hráči moci spolupracovat zcela, včetně případného přerozdělení výhry. Budeme předpokládat, že dohody, které uzavřou, jsou naprosto závazné.

Definice 1. Uvažujme hru N hráčů; množinu všech hráčů označme symbolem Q.
Koalicí se rozumí skupina hráčů spolupracujících při volbě strategií, případně při přerozdělování výhry. **Koaliční strukturou** se nazývá množina všech koalic, které se v dané situaci z uvažovaných hráčů vytvoří. Koalice budeme značit písmeny $K, L, Q,$ apod., případně je udáme přímo jako množinu obsahující členy této koalice, např. $\{1\}, \{2, 3, 5\}$ aj.
Protikoalicí ke koalici $K \subseteq Q$ se rozumí množina hráčů

$$\overline{K} = Q \setminus K = \{i \in Q; i \notin K\}.$$

Množina všech hráčů Q se nazývá **velká koalice**, její protikoalice, tj. prázdná množina, se nazývá **prázdná koalice**.

Obecně se ve hře může vytvořit 2^N koalic – právě tolik je všech podmnožin množiny Q.

Definice 2. Hra ve tvaru charakteristické funkce sestává z množiny hráčů

$$Q = \{1, 2, \ldots, N\}$$

a reálné funkce v definované na množině všech koalic, pro kterou je

$$v(\emptyset) = 0$$

a pro každé dvě disjunktní koalice K, L platí **superaditivita**:

$$v(K \cup L) \geq v(K) + v(L).$$

Pro jednoduchost budeme symbolem v značit i příslušnou hru ve tvaru charakteristické funkce.

Hodnoty charakteristické funkce udávají sílu jednotlivých koalic.

Definice 3. Hra ve tvaru charakteristické funkce se nazývá **nepodstatná**, jestliže platí:

$$v(Q) = \sum_{i=1}^{N} v(\{i\})$$

Hra, která není nepodstatná, se nazývá **podstatná**.

Věta 1. *Nechť K je libovolná koalice hráčů v nepodstatné hře. Potom*

$$v(K) = \sum_{i \in K} v(\{i\})$$

Důkaz. Pro každou koalici K platí (ze superaditivity):

$$v(K) \geq \sum_{i \in K} v(\{i\})$$

Kdyby pro nějakou koalici K platila ostrá nerovnost, pak by bylo

$$v(Q) \geq v(K) + v(\overline{K}) > \sum_{i \in Q} v(\{i\})$$

Imputace

Definice 4. Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce s množinou hráčů

$$Q = \{1, 2, \dots, N\}.$$

N-tice $\boldsymbol{a}$ reálných čísel se nazývá **imputace**, jsou-li splněny následující podmínky:

- **Individuální racionalita**: pro každého hráče i je

$$a_i \geq v(\{i\}). \tag{9.1}$$

- **Kolektivní racionalita**: platí

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = v(Q). \tag{9.2}$$

Motivace – individuální racionalita: $\forall i : a_i \geq v(\{i\})$

Kdyby pro nějaké i bylo $a_i < v(\{i\})$, pak by se nikdy nevytvořila koalice, která by hráči přinesla pouze a_i – pro hráče i by bylo výhodnější zůstat sám za sebe a takové koalice se nezúčastnit.

Kolektivní racionalita: $\sum_{i=1}^{N} a_i = v(Q)$

Určitě platí:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \geq v(Q). \tag{9.3}$$

V opačném případě by totiž bylo

$$\beta = v(Q) - \sum_{i=1}^{N} a_i > 0.$$

Pro hráče by tak bylo výhodnější vytvořit velkou koalici a rozdělit si celkový zisk ve výši $v(Q)$ tak, aby každý z nich získal více – například:

$$a_i' = a_i + \beta/N.$$

Na druhou stranu musí být také

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \leq v(Q), \tag{9.4}$$

protože $v(Q)$ představuje maximum, co hráči mohou ve hře získat (plyne ze superaditivity).

Věta 2. *Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce. Je-li v nepodstatná, pak má právě jednu imputaci, a to*

$$\boldsymbol{a} = (v(\{1\}), v(\{2\}), \ldots, v(\{N\})).$$

Je-li v podstatná, pak má nekonečně mnoho imputací.

Důkaz. **Pro nepodstatnou hru v :** Kdyby bylo pro nějaké j

$$a_j > v(\{j\}),$$

pak

$$\sum_{i=1}^{N} a_i > \sum_{i=1}^{N} v(\{i\}) = v(Q),$$

což by odporovalo podmínce kolektivní racionality.

Pro podstatnou hru v : Uvažujme

$$\beta = v(Q) - \sum_{i=1}^{N} v(\{i\}) > 0.$$

Pro jakoukoli N-tici $\boldsymbol{\alpha}$ nezáporných čísel, jejichž součet je β, definuje vztah

$$\boldsymbol{a}_i = v(\{i\}) + \alpha_i$$

imputaci. Protože existuje nekonečně mnoho takových N-tic α, existuje i nekonečně mnoho imputací. □

Formalizace myšlenky, že daná koalici preferuje jednu imputaci před jinou:

Definice 5. Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce, K je koalice, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ jsou imputace. Řekneme, že $\boldsymbol{a}$ **dominuje** $\boldsymbol{b}$ **pro koalici** $\boldsymbol{K}$, jestliže platí:

- $a_i > b_i$ pro všechna $i \in K$,
- $\sum\limits_{i \in K} a_i \leq v(K)$.

Dominanci budeme značit symbolem $\boldsymbol{a} \succ_K \boldsymbol{b}$.

Druhá podmínka říká, že rozdělení $\boldsymbol{a}$ je **dosažitelné**, tj. hráči v koalici K mohou získat dostatečně vysokou hodnotu na to, aby každému mohlo být vyplaceno příslušné a_i.

Jádro hry

Intuitivně je zřejmé, že bude-li nějaká imputace dominována pro nějakou koalici jinou imputací, budou mít hráči této koalice snahu zrušit původní koalici a ustavit tuto výhodnější.

Definice 6. Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce. **Jádro hry** je tvořeno všemi imputacemi, které nejsou dominovány žádnou jinou imputací pro žádnou jinou koalici.

Je-li tedy imputace $\boldsymbol{a}$ v jádru dané hry, nemá žádná skupina hráčů důvod vytvořit jinou koalici a nahradit $\boldsymbol{a}$ jinou imputací.
K usnadnění rozhodnutí, zda jistá imputace leží v jádru hry či nikoli, slouží následující věta:

Věta 3. *Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce s N hráči a nechť $\boldsymbol{a}$ je imputace. Potom $\boldsymbol{a}$ leží v jádru hry v právě tehdy, když*

$$\sum_{i \in K} a_i \geq v(K) \tag{9.5}$$

pro každou koalici K.

Důkaz. $\Leftarrow$ Předpokládejme, že pro každou koalici platí vztah (9.5). Jestliže nějaká jiná imputace $\boldsymbol{b}$ dominuje $\boldsymbol{a}$ pro nějakou koalici K, pak

$$\sum_{i \in K} b_i > \sum_{i \in K} a_i \geq v(K),$$

což odporuje podmínce dosažitelnosti z definice dominance. Proto $\boldsymbol{a}$ musí být v jádru.

$\Rightarrow$ Předpokládejme naopak, že $\boldsymbol{a}$ je v jádru a předpokládejme, že K je koalice, pro kterou

$$\sum_{i \in K} a_i < v(K).$$

Chceme dojít ke sporu. Nejprve si uvědomme, že $K \neq Q$, protože by neplatila podmínka kolektivní racionality.
Dále lze ukázat, že existuje hráč $j \in \overline{K}$, pro něhož

$$a_j > v(\{j\}).$$

Kdyby tomu tak nebylo, pak by vzhledem k superaditivitě platilo:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{i \in K} a_i + \sum_{i \in \overline{K}} a_i < v(K) + \sum_{i \in \overline{K}} v(\{i\}) \leq v(Q),$$

což opět odporuje podmínce kolektivní racionality. Můžeme tedy zvolit takové $j \in \overline{K}$, že existuje číslo α, pro které platí:

$$0 < \alpha \leq a_j - v(\{j\}) \qquad \text{a} \qquad \alpha \leq v(K) - \sum_{i \in K} a_i.$$

Značí-li k počet hráčů v koalici K, můžeme definovat novou imputaci $\boldsymbol{b}$ dominující $\boldsymbol{a}$ vztahem:

$$\begin{aligned} b_i &= a_i + \alpha/k \qquad \text{pro } i \in K, \\ b_j &= a_j - \alpha, \\ b_i &= a_i \qquad \text{pro všechna ostatní } i \end{aligned}$$

Taková imputace $\boldsymbol{b}$ dominuje imputaci $\boldsymbol{a}$ pro K, což je spor s předpokladem, že $\boldsymbol{a}$ leží v jádru. □

Tvrzení 4. *Nechť* v *je hra ve tvaru charakteristické funkce s* N *hráči a nechť* $\boldsymbol{a}$ *je* N*-tice čísel. Potom* $\boldsymbol{a}$ *je imputace v jádru, právě když platí:*

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_i = v(Q),$
- $\displaystyle\sum_{i\in K} a_i \geq v(K)$ *pro každou koalici* K.

Důkaz. Každá imputace z jádra zřejmě splňuje obě podmínky. Splňuje-li naopak N-tice $\boldsymbol{a}$ tyto podmínky, pak užitím druhé podmínky na jednoprvkové koalice získáme individuální racionalitu, první představuje přímo kolektivní racionalitu; $\boldsymbol{a}$ je proto imputací. Z předchozí věty pak plyne, že $\boldsymbol{a}$ leží v jádru. □

☛ ***Příklad 1***. Uvažujme hru tří hráčů popsanou tabulkou:

Trojice strategií	Výplatní vektory
(1,1,1)	(-2,1,2)
(1,1,2)	(1,1,-1)
(1,2,1)	(0,-1,2)
(1,2,2)	(-1,2,0)
(2,1,1)	(1,-1,1)
(2,1,2)	(0,0,1)
(2,2,1)	(1,0,0)
(2,2,2)	(1,2,-2)

Množina hráčů je $Q = \{1,2,3\}$, všechny možné koalice jsou

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} = Q.$$

Uvažujme koalici $K = \{1,3\}$. Protikoalice je $\overline{K} = \{2\}$. Koalice K má čtyři společné strategie: $(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$. Protikoalice má dvě ryzí strategie: 1, 2. Zajímá-li nás, co je koalice K schopna pro sebe zajistit, uvažujeme dvojmaticovou hru:

		Protikoalice $\overline{K}$	
	Strategie	1	2
Koalice K	$(1,1)$	$(0,1)$	$(2,-1)$
	$(1,2)$	$(0,1)$	$(-1,2)$
	$(2,1)$	$(2,-1)$	$(1,0)$
	$(2,2)$	$(1,0)$	$(-1,2)$

Maximinní hodnoty výplatních funkcí jsou $4/3$ a $-1/3$, charakteristickou funkci proto budeme uvažovat takto:

$$v(\{1,3\}) = 4/3, \quad v(\{2\}) = -1/3.$$

Podobným způsobem obdržíme:

$$v(\{1,2\}) = 1, \quad v(\{3\}) = 0 \quad v(\{2,3\}) = 3/4, \quad v(\{1\}) = 1/4,$$

$$v(Q) = 1, \quad v(\emptyset) = 0.$$

Ověřte, že takto definovaná funkce v je charakteristickou funkcí.

Imputace:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1, \qquad a_1 \geq 1/4, \quad a_2 \geq -1/3, \quad a_3 \geq 0.$$

Například: $(1/3, 1/3, 1/3),\ (1/4, 3/8, 3/8),\ (1, 0, 0)$.

Jádro:

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\
a_1 &\geq 1/4 \\
a_2 &\geq -1/3 \\
a_3 &\geq 0 \\
a_1 + a_2 &\geq 1 \\
a_1 + a_3 &\geq 4/3 \\
a_2 + a_3 &\geq 3/4
\end{aligned}$$

Z 1., 4. a 5. vztahu plyne: $a_3 = 0$, $a_1 + a_2 = 1$. Přitom ale $a_1 \geq 4/3$, $a_2 \geq 3/4$. Jádro hry je v tomto případě prázdné.

☚ ***Příklad 2***. Uvažujme hru tří hráčů s charakteristickou funkcí:

$$
\begin{aligned}
v(\{1\}) &= -1/2 \\
v(\{2\}) &= 0 \\
v(\{3\}) &= -1/2 \\
v(\{1,2\}) &= 1/4 \\
v(\{1,3\}) &= 0 \\
v(\{2,3\}) &= 1/2 \\
v(\{1,2,3\}) &= 1
\end{aligned}
$$

Jádro:

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\
a_1 &\geq -1/2 \\
a_2 &\geq 0 \\
a_3 &\geq -1/2 \\
a_1 + a_2 &\geq 1/4 \\
a_1 + a_3 &\geq 0 \\
a_2 + a_3 &\geq 1/2
\end{aligned}
$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení; prvkem jádra je například trojice $(1/3, 1/3, 1/3)$.

☞ ***Příklad 3***. **Hra s ojetým automobilem.**

David má starý automobil, který nepužívá a je pro něj bezcenný, pokud jej nebude moci prodat. O koupi se zajímají dva lidé, Marie a František. Marie automobil cení na 50 000 Kč, František na 70 000 Kč. Hra spočívá v tom, že zájemci navrhnou cenu Davidovi a ten buď přijme jednu z nabídek, nebo obě odmítne.

Jádro:

$$(a_D, a_M, a_F); \quad 50\,000 \le a_D \le 70\,000,$$

$$a_F = 70\,000 - a_D, \quad a_M = 0.$$

9.1. DALŠÍ POJMY ŘEŠENÍ

9.1.1. Shapleyho hodnota

Shapleyho hodnota bere v úvahu hráčův příspěvek k úspěchu koalice, do níž náleží.
Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce s N hráči, K je koalice sestávající z k členů, do níž náleží hráč i. Pak číslo

$$\delta(i, K) = v(K) - v(K \setminus \{i\})$$

je mírou hodnoty hráče i, kterou přispěje koalici K, když se k ní připojí.
Koalice $K \setminus \{i\}$ má $k - 1$ členů a lze ji proto vytvořit

$$\binom{N-1}{k-1} = \frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k)!}$$

způsoby (hráč i je mimo výběr, do koalice vstupuje jako poslední).
Střední hodnota přínosu hráče i ke všem k-členným koalicím je

$$h_i(k) = \sum_{\substack{K \subset Q,\ k=|K| \\ i \in K}} \frac{v(K) - v(K \setminus \{i\})}{\begin{pmatrix} N-1 \\ k-1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \sum_{\substack{K \subset Q,\ k=|K| \\ i \in K}} \frac{(k-1)!(N-k)!}{(N-1)!} \left(v(K) - v(K \setminus \{i\})\right) \tag{9.6}$$

Střední hodnota přínosu hráče i k úhrnu všech jednočlenných, dvoučlenných, . . . , N-členných koalic je dána vztahem:

$$H_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{h_i(k)}{N} = \sum_{K \subset Q,\ i \in K} \frac{(N-|K|)!(|K|-1)!}{N!} \left(v(K) - v(K \setminus \{i\})\right) \tag{9.7}$$

Definice 7. **Shapleyho vektor** hry N hráčů ve tvaru charakteristické funkce je definován jako vektor

$$\boldsymbol{H} = (H_1, H_2, \dots, H_N), \tag{9.8}$$

jehož i-tá složka H_i je určena vztahem (9.7).

Složka H_i se nazývá **Shapleyho hodnota** pro hráče i.

Ihned z definice je patrné, že Shapleyho vektor vždy existuje a pro danou hru je určen jednoznačně.

Věta 4. *Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce. Potom Shapleyho vektor je imputací.*

Věta 5. *Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce. Potom Shapleyho vektor je imputací.*

Důkaz:

- **Individuální racionalita:** $\forall i \in Q : H_i \geq v(\{i\})$**:**

Superaditivita $\Rightarrow$ $\delta(i, K) = v(K) - v(K \setminus \{i\}) \geq v(\{i\})$, proto

$$H_i = \sum_{K \subset Q,\ i \in K} \frac{(N - |K|)!(|K| - 1)!}{N!} (v(K) - v(K \setminus \{i\})) \geq$$

$$\geq \left(\sum_{K \subset Q,\ i \in K} \frac{(N - |K|)!(|K| - 1)!}{N!} \right) v(\{i\}) = v(\{i\})$$

[součet pravděpodobností všech možných uspořádání hráčů]

- **Kolektivní racionalita:** $\sum_{i=1}^{N} H_i = v(Q)$

$$\sum_{i=1}^{N} H_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{K \subset Q,\; i \in K} \frac{(N-|K|)!(|K|-1)!}{N!} \left(v(K) - v(K \setminus \{i\})\right)$$

Uvažujme libovolnou, ale pevně zvolenou podmnožinu $\emptyset \neq T \subsetneq Q$

$v(T)$ se v součtu objeví ve dvou typech členů:

- s kladným koeficientem pro $T = K \ldots \dfrac{(N-|T|)!(|T|-1)!}{N!}$

  [těchto členů je $|T|$ (pro každé $i \in T$ jeden)]

- se záporným koeficientem pro $T = K \setminus \{i\} \ldots$ $\dfrac{(N-|T|-1)!|T|!}{N!}$

  [těchto členů je $N - |T|$]

Celkem je u $v(T)$ koeficient

$$|T| \cdot \frac{(N-|T|)!(|T|-1)!}{N!} - (N-|T|) \cdot \frac{(N-|T|-1)!|T|!}{N!} =$$

Celkem je u $v(T)$ koeficient

$$|T| \cdot \frac{(N-|T|)!(|T|-1)!}{N!} - (N-|T|) \cdot \frac{(N-|T|-1)!|T|!}{N!} =$$

$$= \frac{(N-|T|)!|T|!}{N!} - \frac{(N-|T|)!|T|!}{N!} = 0$$

Nenulové koeficienty proto zůstávají jen u $v(\emptyset)$, $v(Q)$.

Protože $v(\emptyset) = 0$, dostáváme

$$\sum_{i=1}^{N} H_i = N \cdot \frac{(N-N)!(N-1)!}{N!} \cdot v(Q) = v(Q)$$

☛ ***Příklad 4***. Uvažujme hru s charakteristickou funkcí

$$v(Q) = 200, \quad v(\emptyset) = 0,$$

$$v(\{1\}) = 100, \quad v(\{2\}) = 10 \quad v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\}) = 150, \quad v(\{1,3\}) = 110, \quad v(\{2,3\}) = 20.$$

V tomto případě bude

$$h_1(1) = 100, \qquad h_2(1) = 10, \qquad h_3(1) = 0,$$

$$h_1(2) = \frac{140+110}{2}, \qquad h_2(2) = \frac{50+20}{2}, \qquad h_3(2) = \frac{10+10}{2},$$

$$h_1(3) = 180, \qquad h_2(3) = 90, \qquad h_3(3) = 50,$$

Celkem tedy:

$$H_1 = \frac{100 + 125 + 180}{3} = 135,$$

$$H_2 = \frac{10 + 35 + 90}{3} = 45,$$

$$H_3 = \frac{0 + 10 + 50}{3} = 20,$$

Shapleyho vektor: $\boldsymbol{H} = (135, 45, 20)\,.$

✍ ***Příklad 5***. Pro hru z příkladu 3 jsou Shapleyho hodnoty následující:

$$H_D = 43\,333,\overline{3}; \qquad H_M = 8\,333,\overline{3}; H_F \qquad 18\,333,\overline{3};$$

tj.

$$\boldsymbol{H} = \left(43\,333,\overline{3};\ 8\,333,\overline{3};\ 18\,333,\overline{3}\right).$$

☛ ***Příklad 6*. Hra Kocourkov.**

Obecní správa v Kocourkově je tvořena městskou radou a starostou. Rada je tvořena šesti radními a předsedou. Vyhláška může vejít v platnost dvěma způsoby:

- Většina rady (přičemž předseda volí jen v případě remízy mezi radními) ji schválí a starosta ji podepíše.
- Rada ji schválí, starosta ji vetuje, ale alespoň šest ze sedmi členů rady pak veto přehlasuje (v tomto případě předseda vždy volí).

Definujme $v(S) = 1$ pro *vítěznou koalici*, $v(S) = 0$ pro *poraženou koalici*.

Rozdělení

$$(a_S, a_P, a_1, \ldots, a_6),$$

kde S značí starostu, P předsedu a $1, 2, \ldots, 6$ radní, je **imputací**, právě když

$$a_S, a_P, a_1, \ldots, a_6 \geq 0 \qquad \text{a} \qquad a_S + a_P + a_1 + \cdots + a_6 = 1.$$

Snadno lze odvodit, že **jádro** této hry je prázdné:

Vzhledem k tomu, že jakákoli aspoň šestiprvková koalice zvítězí, je

$$a_P + a_1 + \cdots + a_6 > 1$$

a stejná nerovnost platí i tehdy, když libovolný ze sčítanců vypustíme. Protože všichni sčítanci jsou nezáporní a součet všech osmi je roven jedné, musí být všechny rovny nule, což je spor.

Pokusme se nyní najít **Shapleyho vektor** pro tuto hru.
Začněme s hodnotou starosty S. Nenulové členy v součtu (9.7) jsou ty, pro něž je $K \setminus \{S\}$ poražená koalice, ale K je vítězná (odstraní-li starostu, radní vyhlášku schválí, ale nepřehlasují jeho veto). V tomto případě existují čtyři druhy vítězných koalic:

1. K obsahuje starostu, tři radní a předsedu. Takovýchto koalic je
$$\binom{6}{3} = 20.$$
Protože $|K| = k = 5$, je příspěvek těchto množin k celkové hodnotě H_S roven
$$20 \cdot \frac{(N-k)!(k-1)!}{N!} = 20 \cdot \frac{(8-5)!(5-1)!}{8!} = 20 \cdot \frac{1}{280} = \frac{1}{14}\ .$$

2. K obsahuje starostu a čtyři radní. Takovýchto koalic je 15 a příspěvek těchto množin k celkové hodnotě H_S je roven
$$15 \cdot \frac{(8-5)!(5-1)!}{8!} = \frac{3}{56}\ .$$

3. K obsahuje starostu, čtyři radní a předsedu. Takovýchto koalic je 15 a příspěvek těchto množin k celkové hodnotě

H_S je roven

$$15 \cdot \frac{(8-6)!(6-1)!}{8!} = \frac{5}{56} \; .$$

4. K obsahuje starostu a pět radních. Takovýchto koalic je 6 a příspěvek těchto množin k celkové hodnotě H_S je roven

$$6 \cdot \frac{(8-6)!(6-1)!}{8!} = \frac{1}{28} \; .$$

Celkem je tedy

$$H_S = \frac{1}{14} + \frac{3}{56} + \frac{5}{56} + \frac{1}{28} = \frac{1}{4} \; .$$

Dále se podívejme na předsedu P. V tomto případě existují jen dva druhy vítězných koalic:

1. K obsahuje předsedu, tři radní a starostu (volba radních skončí remízou, předseda volí, starosta podepíše.

2. K obsahuje předsedu a pět radních (návrh bude vetován, ale s předsedovým hlasem bude přehlasovánj).

Koalic prvního typu je celkem 20, druhého typu 6. Proto

$$H_P = 20 \cdot \frac{(8-5)!(5-1)!}{8!} + 6 \cdot \frac{(8-6)!(6-1)!}{8!} = \frac{3}{28} \; .$$

Součet všech H je 1, hodnoty pro jednotlivé radní jsou zřejmě stejné, proto pro každé $i = 1, 2, \dots, 6$ bude

$$H_i = \frac{1}{6}(1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{28}) = \frac{3}{28}\ .$$

Celkem:

$$\boldsymbol{H} = \left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{28},\ \frac{3}{28}, \dots, \frac{3}{28}\right)$$

Je vidět, že starosta má mnohem větší moc než předseda či obyčejný radní. A ukazuje se, že předseda má přesně stejnou moc jako radní.

Lloyd Shapley (*1923), Martin Shubik (*1926)

A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System, 1954

Model volební situace: kooperativní hra ve tvaru charakteristické funkce, v níž je koalici, která může prosadit návrh, přiřazena hodnota 1, a koalici, která jej prosadit nemůže, hodnota 0.

Jak měřit sílu jednotlivých voličů ve volební hře?

Shapley, Shubik navrhli využití **Shapleyho hodnoty:**

$$H_i = \sum_{K\subset Q,\ i\in K} \frac{(N-|K|)!(|K|-1)!}{N!}\left(v(K)-v(K\setminus\{i\})\right)$$

Lloyd Shapley (*1923), Martin Shubik (*1926)

A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System, 1954

Uvažujme skupinu jedinců, kteří všichni chtějí hlasovat pro nějaký návrh. Volí postupně. Jakmile pro návrh hlasuje již dostatek jedinců, je považován za schválený a poslednímu hlasujícímu se dostane pochvaly za to, že umožnil zákonu projít. Zvolme náhodné pořadí hlasování členů. Pak můžeme spočítat, jak často je určitý jedinec „pivotem", klíčovým voličem – toto číslo nám udává náš index.

Jinými slovy: pro voliče i je **Shapley-Shubikův index** daný vztahem

$$\varphi_i = \frac{\text{\textit{počet seřazení, v nichž je} } i \text{ \textit{klíčovým voličem}}}{n!}$$

Kombinatorická formule pro "S-S" index:

$$\varphi_i = \sum_K \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}, \qquad k = |K|,$$

kde součet probíhá přes všechny koalice K, pro něž je i „klíčovým voličem": koalice K je vítězná, avšak koalice $K \setminus \{i\}$ nikoli.

John F. Banzhaf III. (*1940)

***Weighted Voting doesn't work: a Mathematical Analysis*, 1965**

Vhodnou mírou zákonodárcovy síly je jednoduše počet různých situací, v nichž je schopen ovlivnit výsledek. Tj. v případě n *zákonodárců, z nichž každý jedná nezávisle a je schopen ovlivnit výsledek pouze svými hlasy, poměr síly zákonodárce X k síle zákonodárce Y je stejný jako poměr počtu možných volebních kombinací celého sboru, v nichž X může změnit výsledek změnou svého hlasu, k počtu kombinací, v nichž Y může změnit výsledek změnou svého hlasu.*

Jinými slovy:

Síla voliče i má být přímo úměrná počtu koalic, pro něž je i „klíčovým voličem“. Je vhodné vydělit tento počet celkovým počtem koalic obsahujících i.

Síla voliče i má být přímo úměrná počtu koalic, pro něž je i „klíčovým voličem“. Je vhodné vydělit tento počet celkovým počtem koalic obsahujících i.

Nenormalizovaný Banzhafův index:

$$\beta_i' = \frac{\text{počet koalic, v nichž je } i \text{ „klíčovým voličem“}}{2^{n-1}}$$

Normalizovaný Banzhafův index:

$$\beta_i = \frac{\beta_i'}{\sum_i \beta_i'}$$

***One Man, 3,312 Votes: A Mathematical Analysis of the Electoral College*, 1968**

Příklad 7: Rada bezpečnosti OSN

1946: V době vzniku tvořilo Radu bezpečnosti OSN 5 stálých členů (Čínská republika, Francie, Sovětský svaz, USA, Spojené království) a 6 členů nestálých, volených na 2 roky (Brazílie, Mexiko, Austrálie, Polsko, Egypt, Nizozemí).

K přijetí rezoluce bylo třeba 7 kladných hlasů a žádné veto stálého člena.

Označme S – stálého člena, N – nestálého člena

Počet všech seřazení: $\binom{11}{5} = \frac{11!}{6!5!} = 462$

Seřazení, při nichž je některý z nestálých členů klíčový:

$$\underbrace{SSSSSN}_{6}\,N\,\underbrace{NNNN}_{1}$$

Shapley-Shubikův index všech nestálých členů dohromady:

$$\varphi_N = \frac{6}{462} = \frac{1}{77} = 0,013$$

Shapley-Shubikův index jednoho nestálého člena:

$$\varphi_{N_0} = \frac{1}{462} = 0,00216$$

Shapley-Shubikův index všech stálých členů dohromady:

$$\varphi_S = 1 - \frac{6}{462} = \frac{456}{462} = \frac{76}{77} = 0,987$$

Shapley-Shubikův index jednoho stálého člena:

$$\varphi_{S_0} = \frac{76}{5 \cdot 77} = 0,1974$$

Poměr:

$$\frac{\varphi_{S_0}}{\varphi_{N_0}} = 91,4$$

1965: Rada bezpečnosi rozšířena na 10 nestálých členů (dnes: Belgie, Burkina Faso, Chorvatsko, Indonésie, Itálie, Jihoafrická republika, Kostarika, Libye, Panama, Vietnam). K přijetí rezoluce je třeba 9 kladných hlasů a žádné veto od stálého člena.

Počet všech seřazení: $\binom{15}{5} = \frac{15!}{10!5!} = 3003$

Seřazení, při nichž je některý z nestálých členů klíčový:

$$\underbrace{SSSSSNNN}_{\binom{8}{3} = \frac{8!}{5!3!} = 56}\,{\color{red}N}\,\underbrace{NNNNNNN}_{1}$$

$$\varphi_N = \frac{56}{3003} = 0,0186 = 1,86\%, \qquad \varphi_{N_0} = 0,00186$$

$$\varphi_S = \frac{2947}{3003} = 0,9814 = 98,14\%, \qquad \varphi_{S_0} = 0,19628$$

$$\frac{\varphi_{S_0}}{\varphi_{N_0}} = 105,25$$

Banzhafův index (v původním složení Rady):

Vítězné koalice, pro něž je jeden konkrétní nestálý člen **N** klíčový:
SSSSSNN . . . 5 možností (pro **N**)

Všech neprázdných koalic ... 2^{10}

Banzhafův index jednoho nestálého člena: $\beta'_{N_0} = \dfrac{5}{2^{10}} = 0,004883$

Vítězné koalice, pro něž je jeden konkrétní stálý člen **S** klíčový:
SSSSSNN, **SSSSSNNN**, . . . **SSSSSNNNNNN**

Banzhafův index jednoho stálého člena:

$$\beta'_{S_0} = \frac{\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \cdots + \binom{6}{6}}{2^{10}} = \frac{57}{2^{10}}$$

Součet:

$$\sum_i \beta'_i = 6 \cdot \frac{5}{2^{10}} + 5 \cdot \frac{57}{2^{10}} = \frac{30 + 285}{2^{10}} = \frac{315}{2^{10}}$$

$$\beta_{N_0} = \frac{5}{315} = 0,01587, \qquad \beta_{S_0} = \frac{57}{315}, \qquad \frac{\beta_{S_0}}{\beta_{N_0}} = 11,4$$

☞ *Příklad 8*: **Akcionáři**

Uvažujme firmu, jejíchž 40 % akcií vlastní jeden akcionář (označme jej V – velký) a zbývajících 60 % je rozděleno mezi 600 malých akcionářů (každý z nich tedy vlastní 0,1 %; libovolného z nich označme M – malý).

Počet všech seřazení: 601

Seřazení, při nichž je některý z malých akcionářů klíčový: 201

$$\underbrace{V\,M\,M\dots M}_{101}\;{\color{red}M}\;\underbrace{M\,M\dots M}_{1}$$
$$101 \cdot 1 = 101$$

$$\underbrace{M\,M\,M\dots M}_{1}\;{\color{red}M}\;\underbrace{M\dots V\dots M}_{100}$$
$$1 \cdot 100 = 100$$

Seřazení, při nichž je klíčový velký akcionář: $601 - 201 = 400$

Shapley-Shubikův index:

$$\varphi_V = \frac{400}{601} = 0,666 = 66,6\ \%$$

$$\varphi_M = \frac{201}{601} = 0,334 = 33,4\ \%, \qquad \varphi_{M_0} = \frac{1}{600} \cdot 33,4\% = 0,056\ \%$$

$$\frac{\varphi_V}{\varphi_{M_0}} = 1194$$

Příklad 9: Strany v Parlamentu České republiky

	81	70	26	13	6	4		velikost	příspěvek k S-S
								k	$\frac{(N-\lvert K\rvert)!(\lvert K\rvert-1)!}{N!}$
1	**ODS**	**ČSSD**	**KSČM**	**KDU**	**SZ**	**N**	**200**	6	
2	ODS	ČSSD	KSČM	KDU	SZ		196	5	0,033333333
3	ODS	ČSSD	KSČM	KDU		N	194	5	
4	ODS	ČSSD	KSČM		SZ	N	187	5	
5	**ODS**	ČSSD		KDU	SZ	N	174	5	
6	**ODS**		KSČM	KDU	SZ	N	130	5	
7		**ČSSD**	**KSČM**	KDU	SZ	N	119	5	
8	ODS	ČSSD	KSČM	KDU			190	4	0,016666667
9	ODS	ČSSD	KSČM		SZ		183	4	
10	**ODS**	**ČSSD**		KDU	SZ		170	4	
11	**ODS**		**KSČM**	KDU	SZ		126	4	
12		**ČSSD**	**KSČM**	KDU	SZ		115	4	
13	**ODS**	ČSSD	KSČM			N	181	4	
14	**ODS**	**ČSSD**		KDU		N	168	4	
15	**ODS**		**KSČM**	KDU		N	124	4	
16		**ČSSD**	**KSČM**	**KDU**		N	113	4	
17	**ODS**	**ČSSD**			SZ	N	161	4	
18	**ODS**		**KSČM**		SZ	N	117	4	
19		**ČSSD**	**KSČM**		**SZ**	N	106	4	
20	**ODS**			**KDU**	**SZ**	**N**	104	4	
21		ČSSD		KDU	SZ	N	93	4	
22			KSČM	KDU	SZ	N	49	4	

23	**ODS**	ČSSD	KSČM				177	3	0,016666667
24	**ODS**	**ČSSD**		KDU			164	3	
25	**ODS**		**KSČM**	**KDU**			109	3	
26		**ČSSD**	**KSČM**	KDU			120	3	
27	**ODS**	**ČSSD**			SZ		157	3	
28	**ODS**		**KSČM**		**SZ**		102	3	
29		**ČSSD**	**KSČM**		SZ		113	3	
30	ODS			KDU	SZ		89	3	
31		ČSSD		KDU	SZ		100	3	
32			KSČM	KDU	SZ		45	3	
33	**ODS**	**ČSSD**				N	155	3	
34	**ODS**		**KSČM**			N	106	3	
35		ČSSD	KSČM			N	91	3	
36	ODS			KDU		N	87	3	
37		ČSSD		KDU		N	98	3	
38			KSČM	KDU		N	43	3	
39	ODS				SZ	N	80	3	
40		ČSSD			SZ	N	91	3	
41			KSČM		SZ	N	36	3	
42				KDU	SZ	N	23	3	
43	**ODS**	**ČSSD**					151	2	0,033333333
44	**ODS**	**KSČM**					107	2	
45	ODS	KDU					94	2	
46	ODS	SZ					87	2	
47	ODS	N					85	2	
48	ČSSD	KSČM					96	2	
49	ČSSD	KDU					83	2	
50	ČSSD	SZ					76	2	
51	ČSSD	N					74	2	
52	KSČM	KDU					39	2	
53	KSČM	SZ					32	2	
54	KSČM	N					30	2	
55	KDU	SZ					17	2	
56	KDU	N					17	2	
57	SZ	N					10	2	

Strana	**Shapley-Shubikův index**	**Banzhafův index**		
	φ_i	počet klíč. pozic	β'_i	β_i
ODS (81)	0,383333	19	0,59375	0,365384615
ČSSD (70)	0,25	13	0,40625	0,25
KSČM (26)	0,25	13	0,40625	0,25
KDU-ČSL (13)	0,05	3	0,09375	0,057692308
SZ (6)	0,05	3	0,09375	0,057692308
N (4)	0,016666667	1	0,03125	0,019230769
součet	**1,000000**	**52**	**1,625**	**1,000000000**

Příklad 10: Rozdělení nákladů na stavbu

Uvažujme čtyři firmy, které plánují postavit nový most, jehož cena je $C = 20$ milionů korun. Jednolivé firmy jsou ochotny zaplatit maximálně následující částky: $u_1 = 10$, $u_2 = 8$, $u_3 = 12$, $u_4 = 16$ milionů, které odpovídají užitku firem z nového mostu (úspora času, pohonných hmot při dopravě apod.)

Jakým způsobem by se celkové náklady měly rozdělit mezi firmy?

Řešení.

Uvažujme charakteristickou funkci $v(K) = \max\left\{\left(\sum_{i \in K} u_i\right) - C, 0\right\}$

$$(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{4\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\}) = v(\{2,3\}) = 0,\ v(\{1,3\}) = 2,\ v(\{3,4\}) = 8,$$

$$v(\{2,4\}) = 4,\ v(\{1,4\}) = 6, v(\{1,2,3\}) = 10,\ v(\{1,2,4\}) = 14,$$

$$v(\{2,3,4\}) = 16,\ v(\{1,3,4\}) = 18,\ v(\{1,2,3,4\}) = 26$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 \quad &= \tfrac{1!2!}{4!}\left[(v(\{1,3\}) - v(\{3\})) + (v(\{1,4\}) - v(\{4\}))\right] + \\
&+ \tfrac{2!1!}{4!}\left[(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})) + (v(\{1,3,4\}) - v(\{3,4\})) + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + (v(\{1,2,4\}) - v(\{2,4\}))\right] + \\
&+ \tfrac{3!0!}{4!}\left[(v(\{1,2,3,4\}) - v(\{2,3,4\}))\right] = \\
&= \tfrac{1}{12}\,[2+6] + \tfrac{1}{12}\,[10+10+10] + \tfrac{1}{4}\,[10] = \tfrac{68}{12} = \tfrac{17}{3} = 5,667
\end{aligned}
$$

Analogicky:

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 \quad &= \tfrac{1}{12}\cdot 4 + \tfrac{1}{12}\cdot 24 + \tfrac{1}{4}\cdot 8 = \tfrac{52}{12} = \tfrac{13}{3} = 4,333 \\
\varphi_3 \quad &= \tfrac{1}{12}\cdot 10 + \tfrac{1}{12}\cdot 34 + \tfrac{1}{4}\cdot 12 = \tfrac{80}{12} = \tfrac{20}{3} = 6,667 \\
\varphi_4 \quad &= \tfrac{1}{12}\cdot 18 + \tfrac{1}{12}\cdot 46 + \tfrac{1}{4}\cdot 16 = \tfrac{112}{12} = \tfrac{28}{3} = 9,333
\end{aligned}
$$

$$\varphi_1 = \frac{17}{3}, \quad \varphi_2 = \frac{13}{3}, \quad \varphi_3 = \frac{20}{3}, \quad \varphi_4 = \frac{28}{3}$$

Platby: $p_i = u_1 - \varphi_i$

$$\begin{aligned} p_1 &= 10 - \tfrac{17}{3} = \tfrac{13}{3}, \quad p_2 = 8 - \tfrac{13}{3} = \tfrac{11}{3}, \\ p_3 &= 12 - \tfrac{20}{3} = \tfrac{16}{3}, \quad p_4 = 16 - \tfrac{28}{3} = \tfrac{20}{3}, \end{aligned}$$

$$\textstyle\sum_i p_i = \tfrac{13}{3} + \tfrac{11}{3} + \tfrac{16}{3} + \tfrac{20}{3} = 20$$

9.1.2. Nukleolus (Schmeidler, 1969)

Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce s N hráči, $\boldsymbol{a}$ je daná imputace, K je daná koalice. Číslo

$$e(K, \boldsymbol{a}) = v(K) - \sum_{i \in K} a_i \tag{9.9}$$

se nazývá **exces koalice K vzhledem k imputaci $\boldsymbol{a}$.**
Označme symbolem $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a})$ vektor o $2^N - 1$ složkách, který je tvořen excesy pro všechny koalice. Uspořádejme jeho složky sestupně podle velikosti a takto vzniklý vektor označme jako $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$.
Každé imputaci $\boldsymbol{a}$ tímto způsobem přiřaďme vektor $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ a na takto vzniklé množině vektorů

$$\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}); \boldsymbol{a} \text{ je imputace}\}$$

uvažujme lexikografické uspořádání. Řekneme, že **imputace $\boldsymbol{b}$ je přijatelnější než imputace $\boldsymbol{a}$**, jestliže platí:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) \leq_{\text{(lex)}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}), \tag{9.10}$$

kde $\leq_{\text{(lex)}}$ je nerovnost v lexikografickém („slovníkovém“) uspořádání, tj. buď je první složka vektoru $\boldsymbol{b}$ je menší než první složka vektoru $\boldsymbol{a}$, nebo jsou první složky stejné, ale druhá složka vektoru

$\boldsymbol{b}$ je menší než druhá složka vektoru $\boldsymbol{a}$, nebo jsou první i druhé složky stejné, ale třetí složka vektoru $\boldsymbol{b}$ je menší než třetí složka vektoru $\boldsymbol{a}$, atd.

Uvědomme si, že je-li imputace $\boldsymbol{b}$ přijatelnější než imputace $\boldsymbol{a}$, vzbuzuje méně námitek než imputace $\boldsymbol{a}$ nebo jsou tyto námitky stejné – první rozdílný exces musí být v $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ menší než v $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$.

Definice 8. Nukleolem hry se nazývá taková imputace, pro kterou platí:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) \leq_{\text{(lex)}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \qquad \text{pro všechny imputace } \boldsymbol{a}.$$

☛ ***Příklad 11***. Pro hru s charakteristickou funkcí

$$v(Q) = 0, \quad v(\emptyset) = 0,$$

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = -1,$$

$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 1, .$$

má vektor $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a})$ tyto složky:

$$\begin{aligned}
&-(a_1 + a_2 + a_3),\\
&1 - a_1 - a_2,\\
&1 - a_1 - a_3,\\
&1 - a_2 - a_3,\\
&-(1 + a_1),\\
&-(1 + a_2),\\
&-(1 + a_3).
\end{aligned}$$

První složka je rovna nule, neboť $v(Q) = a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Protože $a_i \geq v(\{i\}) = -1$, jsou poslední tři složky vždy nekladné. Kladný exces proto mohou mít jen dvouprvkové koalice. Minimum

$$\min_{\boldsymbol{a} \text{ je imputace}} \max\{1 - a_1 - a_2,\ 1 - a_1 - a_3,\ 1 - a_2 - a_3\}$$

nastává pro $\boldsymbol{a} = (0, 0, 0)$.
Nukleolus je tedy imputace $(0, 0, 0)$.

☛ ***Příklad 12***:

Uvažujme hru s následující charakteristickou funkcí:

$$v(1) = \frac{1}{2},\ v(2) = 0,\ v(1,2) = 1$$

Imputace:

$$a_1 \geq \frac{1}{2},\ a_2 \geq 0,\ a_1 + a_2 = 1 \qquad \rightsquigarrow \qquad a_1 \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle,\ a_2 = 1 - a_1$$

Jádro hry:

$$a_1 \geq \frac{1}{2},\ a_2 \geq 0,\ a_1 + a_2 = 1 \qquad \rightsquigarrow \qquad a_1 \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle,\ a_2 = 1 - a_1$$

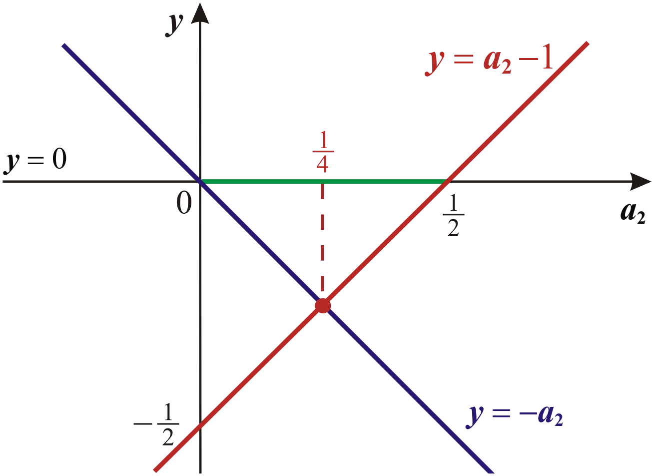
Shapleyho hodnota:

$$H_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{4}, \qquad H_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

Nukleolus:

$$e(\{1\},\boldsymbol{a}) = \tfrac{1}{2} - a_1 \qquad e(\{2\},\boldsymbol{a}) = 0 - a_2 \qquad e(\{1,2\},\boldsymbol{a}) = 1 - a_1 - a_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a}) &= \left(-a_2, \tfrac{1}{2} - a_1, 0\right) = \left(-a_2, a_2 - \tfrac{1}{2}\,, 0\right) \\
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) &= \left(0, -a_2, a_2 - \tfrac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le a_2 \le \tfrac{1}{4} \\
&= \left(0, a_2 - \tfrac{1}{2}\,, -a_2\right) \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{4} \le a_2 \le 1
\end{aligned}$$



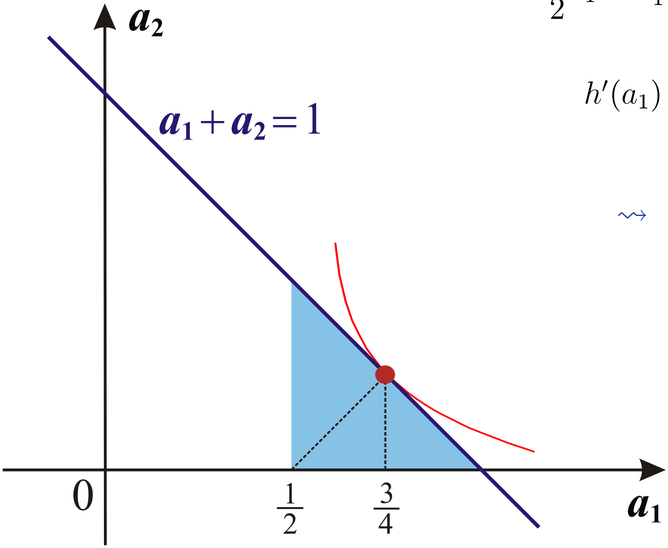
⇝ minimalizace:

$$a_1 = \frac{3}{4}\,, \quad a_2 = \frac{1}{4}$$

Nash: **Status Quo:** $(a_{10}, a_{20}) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$$g(a_1, a_2) = \left(a_1 - \frac{1}{2}\right) a_2 = \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)(1 - a_1) =$$

$$= \frac{3}{2} a_1 - a_1^2 - \frac{1}{2} = h(a_1)$$



$$h'(a_1) = \frac{3}{2} - 2a_1 = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad a_1 = \frac{3}{4}, \; a_2 = \frac{1}{4}$$

Babylonský Talmud (5. stol. př. Kr.)

Dělení oděvu (Contested garment)

Dva [u soudu] *drží oděv . . . jeden říká: „celý je můj!“ A druhý říká: „má je polovina!“ . . . Potom první dostane tři čtvrtiny a druhý jednu čtvrtinu.* [*Mišna*, 4. odd., 2. traktát – *Bava m'cija*]

Rabi Raši (†1105): druhý přiznává prvnímu jednu polovinu – ta je tedy jasná a jedná se jen o zbývající polovinu, která je pak rozdělena rovným dílem.

$$a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1-\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}\,, \qquad a_2 = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Nároky: $d_1 = 1,\ d_2 = 1/2$

Pozůstalost: $E = 1 < d_1 + d_2$

Řešení: $a = (a_1, a_2);\ a_1 + a_2 = E$

(a_i je část, která připadne věřiteli i)

Řešení předepsané CG-principem (contested garment):

$$a_1 = \frac{E - (E - d_1)_+ - (E - d_2)_+}{2} + (E - d_2)_+\,,$$

$$a_2 = \frac{E - (E - d_1)_+ - (E - d_2)_+}{2} + (E - d_1)_+\,,$$

kde $(\alpha)_+ := \textbf{Max}\,(\alpha, 0)$

$$a_1 = \frac{E - (E-d_1)_+ - (E-d_2)_+}{2} + (E-d_2)_+ \,,$$

$$a_2 = \frac{E - (E-d_1)_+ - (E-d_2)_+}{2} + (E-d_1)_+ \,,$$

$\boxed{E \le d_1 :}$ $(E-d_1)_+ = (E-d_2)_+ = 0, \quad a_1 = a_2 = E/2$

$\leadsto$ **pro** $E = d_1 : \quad a_1 = a_2 = d_1/2$

$\boxed{d_1 < E \le d_2 :}$ $(E-d_1)_+ > 0,\ (E-d_2)_+ = 0,$

$a_1 = d_1/2,\ a_2 = d_1/2 + (E-d_1) = E - d_1/2$

$\leadsto$ **pro** $E = d_1 : \quad a_1 = d_1/2,\ a_2 = d_2 - d_1/2$

$\boxed{d_2 < E :}$ $(E-d_1)_+ > 0,\ (E-d_2)_+ > 0,$

$$a_1 = \frac{E + d_1 - d_2}{2},\ a_2 = \frac{E + d_2 - d_1}{2}$$

Oběma k uspokojení celého požadavku chybí:

$$d_1 - a_1 = d_1 - \frac{E + d_1 - d_2}{2} = \frac{d_1 + d_2 - E}{2}$$

$$d_2 - a_2 = d_2 - \frac{E + d_2 - d_1}{2} = \frac{d_1 + d_2 - E}{2}$$

Slovy lze výše uvedené vztahy vyjádřit takto:

Malé částky, které nedosahují ani menšího z obou nároků, jsou rozděleny rovným dílem. Jakmile věřitel s nejmenším nárokem dostane polovinu svého požadavku, každá koruna navíc připadne jen druhému věřiteli, a to až do okamžiku, kdy mu chybí polovina menšího nároku (neboli oběma chybí $d_1/2$). Poté se do hry vrátí první věřitel a každá koruna navíc je opět rozdělena rovným dílem.

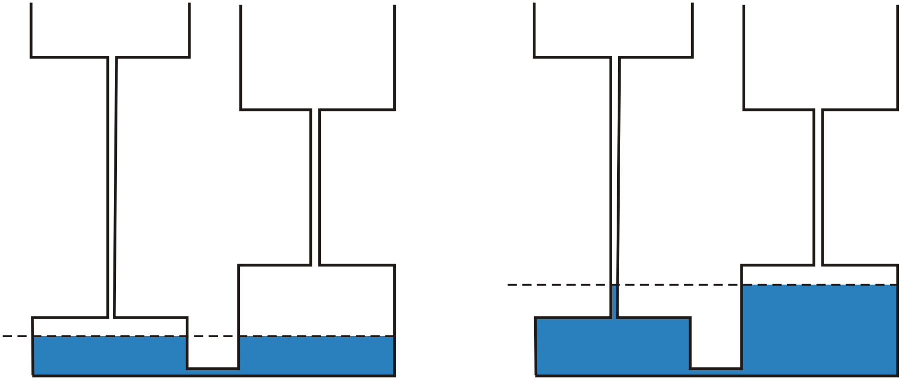
Ztráty, které oběma chybějí k uspokojení jejich nároků, můžeme sledovat již od hodnoty $E = (d_1 + d_2)/2$. Zde proces probíhá zrcadlově: malé ztráty jsou děleny rovným dílem (případ $d_2 < E$), jakmile věřiteli s menším nárokem chybí polovina, každá další chybějící koruna jde na vrub druhého věřitele, až oběma chybí právě polovina jejich nároku.

M. M. Kaminski, 2000

Hydraulic Rationing.

Mathematical Social Sciences 40, 131–135

Hydraulická analogie dělení částky (kapalina) mezi věřitele s různými nároky (velikosti nádob; každá nádoba je tvořena dvěma částmi stejného objemu; objem spojnice těchto částí je zanedbatelný; původně pro tři věřitele):

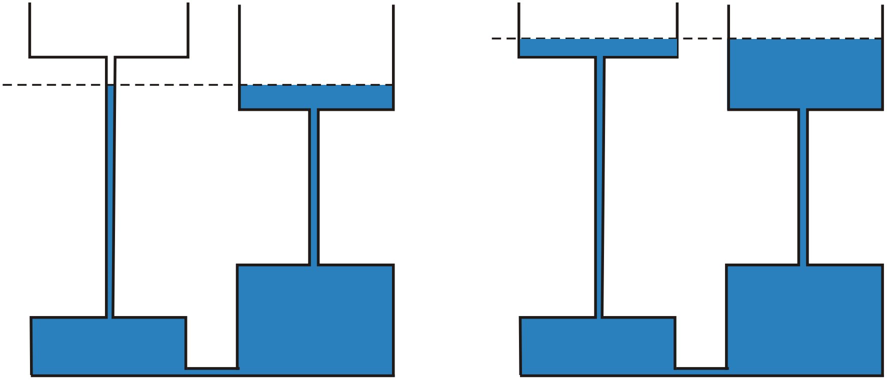


M. M. Kaminski, 2000

Hydraulic Rationing.

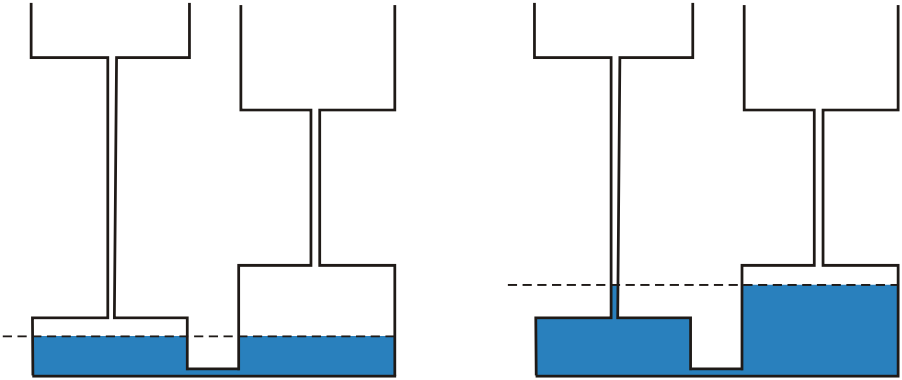
Mathematical Social Sciences 40, 131–135

Hydraulická analogie dělení částky (kapalina) mezi věřitele s různými nároky (velikosti nádob; každá nádoba je tvořena dvěma částmi stejného objemu; objem spojnice těchto částí je zanedbatelný; původně pro tři věřitele):



Monotonie:

Funkce $a_1(E),\ a_2(E)$ vyjadřující závislost částky, kterou dostane každý z věřitelů, na pozůstalosti E jsou **neklesající**.



Nejlépe je to vidět opět na hydraulickém modelu: přilijeme-li vodu, hladina v žádné z nádob nepoklesne.

Problém bankrotu: $(E, d),\ \ d = (d_1, d_2, \ldots d_n)$

Věřitelé: $1, 2, \ldots, n$

Dluhy: $d_1 \geq 0,\ d_2 \geq 0,\ \ldots,\ d_n \geq 0,$

Pozůstalost: $E < d_1 + d_2 + \cdots + d_n$

Řešení: $x = (x_1, x_2, \ldots x_n);\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = E$

(x_i částka, která připadne věřiteli i)

Označme $D = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$

Konzistentní řešení: pro všechna $i \neq j$ je dělení částky $x_i + x_j$ předepsané CG-principem pro dluhy d_i, d_j rovno (x_i, x_j)

Věta (Aumann, Maschler, 1985):
Každý problém bankrotu má jediné konzistentní řešení.

Důkaz. **Nejvýše jedno řešení:** Sporem:

Uvažujme dvě různá konzistentní řešení x, y, kde

$$x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n), \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = E, \ x_k \geq 0,$$

$$y = (y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_j, \ldots, y_n), \quad \sum_{k=1}^{n} y_k = E, \ y_k \geq 0,$$

$$x_i < y_i, \ x_j > y_j, \qquad y_i + y_j \geq x_i + x_j.$$

Konzistentnost $\Rightarrow$ j dostane

y_j při celkovém jmění $y_i + y_j$,

x_j při celkovém jmění $x_i + x_j$.

Monotonie (vlevo je rozdělována vyšší částka)

$\Rightarrow y_i + y_j \geq x_i + x_j \Rightarrow y_j \geq x_j$

$\Rightarrow$ spor s předpokladem $x_j > y_j$

Konstrukce konzistentního řešení:

Uvažujme rostoucí hodnotu částky E. Pro $0 \leq E \leq nd_1/2$ je konzistentním řešením rovné rozdělení, kdy každý dostane částku E/n. Jakmile první věřitel obdrží $d_1/2$, přestane se jeho částka zvyšovat a s rostoucí hodnotou E se částka, která je navíc, rozdělí mezi věřitele $2, 3, \ldots, n$, a to až do okamžiku, kdy druhý obdrží $d_2/2$. Při dalším zvyšování částky E se pak bude vše, co je navíc, dělit mezi věřitele $3, 4, \ldots, n$, atd., až každý obdrží právě polovinu svého požadavku. Pro $E > D/2$ probíhá proces zrcadlově, jen se místo „zisku“ x_i uvažuje ztráta $d_i - x_i$.

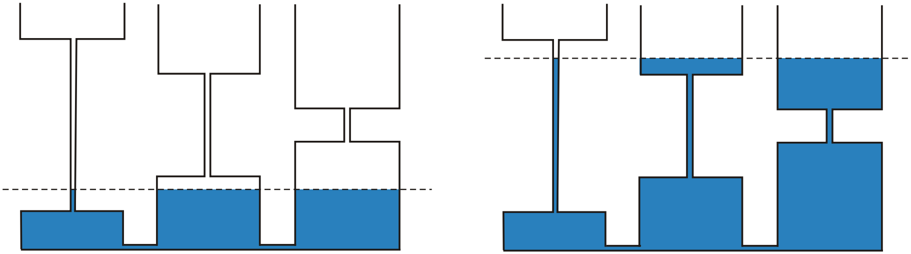
Nebo: U věřitele s nejvyšším nárokem dosáhne pokračujme ve zvyšování až do $d_n - (d_{n-1}/2)$, tj. až do okamžiku, kdy mu chybí polovina druhého nejvyššího nároku. Při dalším navýšení E se do hry vrátí věřitel $n - 1$ a vše, co je navíc, je rovným dílem rozděleno mezi něj a věřitele n, a to až do okamžiku, kdy oběma chybí $d_{n-2}/2$, atd.

M. M. Kaminski, 2000

Hydraulic Rationing.

Mathematical Social Sciences 40, 131–135

Hydraulická analogie dělení částky (kapalina) mezi věřitele s různými nároky (velikosti nádob; každá nádoba je tvořena dvěma částmi stejného objemu; objem spojnice těchto částí je zanedbatelný):



Uvažujme dva věřitele s nároky $d_i \leq d_j$. Pro malé hodnoty E je částka rozdělena rovným dílem; jakmile první věřitel dosáhne poloviny svého nároku, zůstane u $d_i/2$ a částka, která je navíc, připadne druhému až do $d_j/2$. Při dalším zvyšování se vrátí do hry věřitel i a vše, co je navíc, se rozdělí rovným dílem mezi oba dva.

To je ovšem přesně slovní popis CG principu.

$\square$

Bankrotová hra odpovídající problému bankrotu (E, d) :

$$v_{E,d}(S) := (E - d(N \setminus S))_+ \,, \quad \text{kde} \;\; (\alpha)_+ := \text{Max}\,(\alpha, 0)$$

Věta (Aumann, Maschler, 1985): Konzistentní řešení problému bankrotu je nukleolus odpovídající hry.

Standardní řešení hry 2 hráčů v :

$$x_i = \frac{v(1,2) - v(1) - v(2)}{2} + v(i)$$

ekvivalentně: $x_1 + x_2 = v(1,2),\; x_1 - x_2 = v(1 - v(2))$

Jinými slovy, standardní řešení dává každému hráči i částku $v(i)$, kterou si může zajistit sám, a zbytek dělí rovným dílem mezi oba hráče.

Nukleolus, jádro a Shapleyho hodnota této hry dvou hráčů se všechny shodují se standardním řešením.

BOJ O ODĚV

Charakteristická funkce: $v(1) = \frac{1}{2},\; v(2) = 0, v(1,2) = 1$

Viz příklad výše

BANKROTOVÁ HRA – 3 VĚŘITELÉ

Babylonský Talmud (5. stol. př. Kr.), Mišna, 3. odd.: Ženy, 2. traktát: Svatební úpisy

Zemře muž, který po sobě zanechá tři vdovy, z nichž každá měla ve svatební smlouvě stanovenou částku, kterou dostane v případě manželova úmrtí: první žena má dostat 100, druhá 200 a třetí 300 peněžních jednotek *zuz.* Jak mezi vdovy rozdělit pozůstalost, představuje-li pouze 100, 200 nebo 300 zuz?

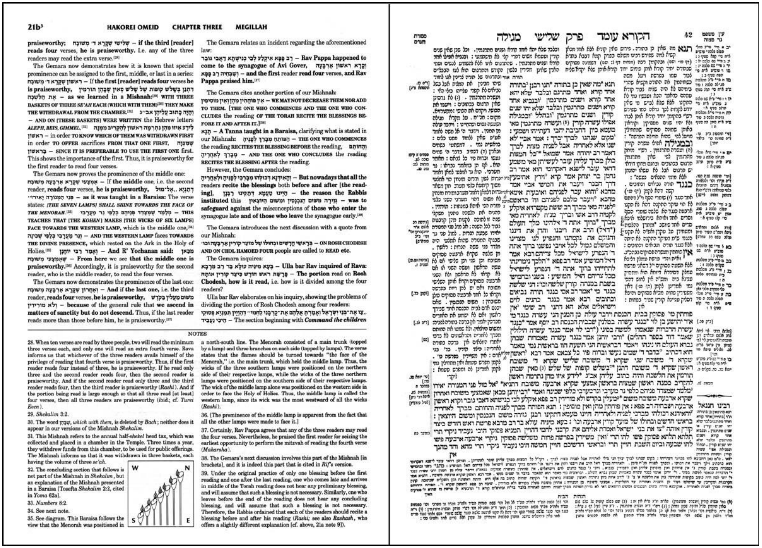
Řešení uvedené v traktátu lze shrnout do tabulky:

		Závazek		
		100	**200**	**300**
Pozůstalost	**100**	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
	200	50	75	75
	300	50	100	150

Talmud – historická poznámka

Připomeňme, že jedním ze základů židovské kultury, práva a náboženství je **Mišna** (*opakování, učení*). Její autor, **Rabi Jehuda ha-Nasi** (135 – 217) z galilejského města Uša v ní shrnul do té doby převážně ústně tradované pobiblické náboženské právo v ucelenou sbírku. Mišna se pak stala předmětem studia dalších generací učenců; výsledkem jejich činnosti bylo vytvoření **Gemary** (*doplnění*), rozsáhlého komentáře obsahujícího diskuse a polemiky jednotlivých učenců, jejich žáků a škol. Tyto Gemary vznikly dvě: na izraelské půdě a v Babylonii. Soubor Mišny a Gemary se nazývá **Talmud** a podle místa vzniku se rozlišuje **Talmud jeruzalémský** či **palestinský**, který byl dokončen v polovině čtvrtého století (Svatá země se v té době ocitla pod vládou křesťanských byzantských císařů a hlavní centrum židovského života se přesouvalo do Babylonie; jeruzalémský Talmud se proto nezachoval v takové úplnosti jako dále zmíněný Talmud babylonský) a *Talmud babylonský*, jehož konečnou redakci provedl Rabi Aši (†427) a jeho žáci (Talmud babylonský vznikal v příznivějších podmínkách; židovské obce v Babylonii byly obdařeny značnou autonomií a těšily se plným právům).

Mišna se člení do šesti oddílů, z nichž pro naše potřeby je nejzajímavější oddíl třetí zvaný **Náším** (*Ženy*), který je tvořen sedmi traktáty; druhý z nich se nazývá *K'tubot* (*Svatební úpisy*) a řeší kromě jiného otázky spojené se svatební smlouvou včetně obnosu, kterým se muž ženě zavazuje pro případ rozvodu nebo své smrti. V traktátu Náším lze nalézt i řešení výše uvedeného problému.



21b³ HAKOREI OMEID CHAPTER THREE MEGILLAH

praiseworthy; שלישי שקרא ד׳ משובח – **if the third [reader] reads four** verses, **he is praiseworthy.** I.e. any of the three readers may read the extra verse.[28]

The Gemara now demonstrates how it is known that special prominence can be assigned to the first, middle, or last in a series: ראשון שקרא ד׳ משובח – If **the first [reader] reads four** verses **he is praiseworthy,** דתנן בשלש קופות של שלש סאין שבהן תורמין את הלשכה – **as we learned in a Mishnah:**[29] **WITH THREE BASKETS OF THREE *SE'AH* EACH (WHICH WITH THEM)**[30] **THEY MAKE THE WITHDRAWAL FROM THE CHAMBER.**[31] והיה כתוב עליהן אב״ג – **AND ON [THESE BASKETS] WERE WRITTEN** the Hebrew letters ***ALEPH, BEIS, GIMMEL,***[32] לידע איזו מהן נתרמה ראשון להקריב ממנה ראשון – in order **TO KNOW WHICH OF THEM WAS WITHDRAWN FIRST** in order **TO OFFER** sacrifices **FROM THAT ONE FIRST,** שמצוה בראשון – **SINCE IT IS PREFERABLE TO USE THE FIRST ONE** first. This shows the importance of the first. Thus, it is praiseworthy for the first reader to read four verses.

The Gemara now proves the prominence of the middle one: אמצעי שקרא ארבעה משובח – If **the middle** one, i.e. the second reader, **reads four** verses, **he is praiseworthy,** דתניא „אל־מול פני המנורה יאירו״ – **as it was taught in a Baraisa:** The verse states: ***[THE SEVEN LAMPS] SHALL SHINE TOWARDS THE FACE OF THE MENORAH.***[33] מלמד שמצדד פניהם כלפי נר מערבי – **THIS TEACHES THAT [THE *KOHEN*] MAKES [THE WICKS OF SIX LAMPS] FACE TOWARDS THE WESTERN LAMP,** which is the middle one,[34] ונר מערבי כלפי שכינה – **AND THE WESTERN LAMP** faces **TOWARDS THE DIVINE PRESENCE,** which rested on the Ark in the Holy of Holies.[35] ואמר רבי יוחנן – **And R' Yochanan said:** מכאן שאמצעי משובח – **From here** we see **that the middle one is praiseworthy.**[36] Accordingly, it is praiseworthy for the second reader, who is the middle reader, to read the four verses.

The Gemara now demonstrates the prominence of the last one: ואחרון שקרא ארבעה משובח – **And** if **the last one,** i.e. the third reader, **reads four** verses, **he is praiseworthy,** משום מעלין בקדש ולא מורידין – **because** of the general rule that **we ascend in matters of sanctity but do not descend.** Thus, if the last reader reads more than those before him, he is praiseworthy.[37]

The Gemara relates an incident regarding the aforementioned law:

רב פפא איקלע לבי כנישתא דאבי גובר – **Rav Pappa happened to come to the synagogue of Avi Gover,** וקרא ראשון ארבעה ושבחיה רב פפא – **and the first** reader **read four** verses, **and Rav Pappa praised him.**[37]

The Gemara cites another portion of our Mishnah: אין פוחתין מהן ואין מוסיפין – **WE MAY NOT DECREASE THEM NOR ADD TO THEM.** [**THE ONE WHO COMMENCES AND THE ONE WHO CONCLUDES** the reading **OF THE TORAH RECITE THE BLESSINGS BEFORE IT AND AFTER IT.**][38]

תנא – **A Tanna taught in a Baraisa,** clarifying what is stated in our Mishnah: הפותח מברך לפניה – **THE ONE WHO COMMENCES** the reading **RECITES THE BLESSING BEFORE** the reading, והחותם מברך לאחריה – **AND THE ONE WHO CONCLUDES** the reading **RECITES THE BLESSING AFTER** the reading.

However, the Gemara concludes: והאידנא דכולהו מברכי לפניה ולאחריה – **But nowadays that all** the readers **recite the blessings** both **before and after [the reading],** היינו טעמא דתקינו רבנן – **the reason the Rabbis instituted** this גזירה משום הנכנסין ומשום היוצאין – **was to safeguard against** the misconceptions of **those who enter** the synagogue late **and of those who leave** the synagogue early.[39]

The Gemara introduces the next discussion with a quote from our Mishnah: בראשי חדשים ובחולו של מועד קורין ארבעה וכו׳ – **ON ROSH CHODESH AND ON CHOL HAMOED FOUR** people are called to **READ etc.**

The Gemara inquires: בעא מיניה עולא בר רב מרבא – **Ulla bar Rav inquired of Rava:** פרשת ראש חודש כיצד קורין אותה – **The portion** read on **Rosh Chodesh, how is it read,** i.e. how is it divided among the four readers?

Ulla bar Rav elaborates on his inquiry, showing the problems of dividing the portion of Rosh Chodesh among four readers: „צו את־בני ישראל ואמרת אלהם את־קרבני לחמי״ דהויין תמניא פסוקי היכי נעביד – The section beginning with ***Command the children***

NOTES

28. When ten verses are read by three people, two will read the minimum three verses each, and only one will read an extra fourth verse. Rava informs us that whichever of the three readers avails himself of the privilege of reading that fourth verse is praiseworthy. Thus, if the first reader reads four instead of three, he is praiseworthy. If he read only three and the second reader reads four, then the second reader is praiseworthy. And if the second reader read only three and the third reader reads four, then the third reader is praiseworthy (*Rashi*). And if the portion being read is large enough so that all three read [at least] four verses, then all three readers are praiseworthy (ibid.; cf. *Turei Even*).

29. *Shekalim* 3:2.

30. The word שבהן, *which with them*, is deleted by *Bach*; neither does it appear in our versions of the Mishnah *Shekalim*.

31. This Mishnah refers to the annual half-*shekel* head tax, which was collected and placed in a chamber in the Temple. Three times a year, they withdrew funds from this chamber, to be used for public offerings. The Mishnah informs us that it was withdrawn in three baskets, each having the volume of three *se'ah*.

32. The concluding section that follows is not part of the Mishnah in *Shekalim*, but an explanation of the Mishnah presented in a Baraisa [Tosefta *Shekalim* 2:2, cited in *Yoma* 62a].

33. *Numbers* 8:2.

34. See next note.

35. See diagram. This Baraisa follows the view that the Menorah was positioned in a north-south line. The Menorah consisted of a main trunk (topped by a lamp) and three branches on each side (topped by lamps). The verse states that the flames should be turned towards "the face of the Menorah," i.e. the main trunk, which held the middle lamp. Thus, the wicks of the three southern lamps were positioned on the northern side of their respective lamps, while the wicks of the three northern lamps were positioned on the southern side of their respective lamps. The wick of the middle lamp alone was positioned on the western side in order to face the Holy of Holies. Thus, the middle lamp is called the western lamp, since its wick was the most westward of all the wicks (*Rashi*).

36. [The prominence of the middle lamp is apparent from the fact that all the other lamps were made to face it.]

37. Certainly, Rav Pappa agrees that any of the three readers may read the four verses. Nevertheless, he praised the first reader for seizing the earliest opportunity to perform the mitzvah of reading the fourth verse (*Maharsha*).

38. The Gemara's next discussion involves this part of the Mishnah [in brackets], and it is indeed this part that is cited in *Rif's* version.

39. Under the original practice of only one blessing before the first reading and one after the last reading, one who comes late and arrives in middle of the Torah reading does not hear any preliminary blessing, and will assume that such a blessing is not necessary. Similarly, one who leaves before the end of the reading does not hear any concluding blessing, and will assume that such a blessing is not necessary. Therefore, the Rabbis ordained that each of the readers should recite a blessing before and after his reading (*Rashi*; see also *Rashash*, who offers a slightly different explanation [cf. above, 21a note 9]).

Nyní se vraťme k tabulce rozdělení pozůstalosti mezi vdovy.

		Závazek		
		100	**200**	**300**
Pozůstalost	**100**	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
	200	50	75	75
	300	50	100	150

Poslední řádek tabulky představuje proporcionální rozdělení, které odpovídá tomu, co by bez dlouhých úvah pravděpodobně zvolila většina z nás. Rovné rozdělení v prvním řádku, kdy pozůstalost nepřevýší hodnotu nejnižšího závazku, má také ještě své logické opodstatnění. Prostřední řádek se však dlouho jevil jako tvrdý oříšek. Čtyři různá zdůvodnění celé tabulky podali R. J. Aumann a M. Maschler v roce 1985. Z toho tři jsou založena pouze na principech obsažených v Talmudu.

1. zdůvodnění: Konzistentnost

Řešení uvedené v Talmudu je konzistentní.

2. zdůvodnění: Sociální spravedlnost

Druhé zdůvodnění je založeno na jiném talmudickém principu, který je obsažen v části *Arachín* (*Odhady*): Obecně ten, kdo půjčí, má automaticky retenční právo na nemovité jmění dlužníka. Je-li však cena nemovitosti menší než $1/2$ půjčky, dlužník s ní může v určitých případech volně disponovat.
Na první pohled se nám tento princip může zdát paradoxní, má však svůj hlubší etický a psychologický základ. Je-li totiž cena nemovitosti větší než $1/2$ hodnoty půjčky, je retenční právo důležité a věřitel díky němu získá většinu poskytnutých peněz zpět. Je-li však cena nemovitosti menší než $1/2$ půjčky, právo na ni stejně nehraje velkou roli; půjčka byla pravděpodobně poskytnuta na základě důvěry a bylo by nemorální převzít do vlastnictví nemovitost od člověka, který přijal půjčku v dobré víře.

Princip zároveň ilustruje myšlenku, která je pro Talmud typická a kterou lze zjednodušeně zformulovat takto: *„Více než* $1/2$ *je jako vše, méně než* $1/2$ *je jako nic."* Polovina zde představuje významný mezník: máme-li dostat více než $1/2$ dluhu, zaměříme se na celou částku a staráme se o velikost ztráty; máme-li dostat méně než $1/2$, v duchu dluh odepíšeme úplně a jsme pak vděčni za cokoli, co nakonec dostaneme – soustředíme se na „odměnu". Bylo by tedy sociálně nespravedlivé, kdyby byli různí věřitelé na různých stranách tohoto předělu, tj. aby jeden dostal většinu svého nároku, zatímco jiný by většinu ztratil. Pro $E \leq D/2$ jsou proto zisky opět děleny rovným dílem, jakmile však u některého věřitele přidělená částka přesáhne jednu polovinu jeho požadavku, dostane pouze tuto polovinu a vše, co je navíc, se rozdělí mezi ostatní; pro $E \geq D/2$ se při dodržení stejných podmínek dělí rovným dílem ztráty.

3. zdůvodnění: Tvorba koalic

Třetí zdůvodnění vychází z komentáře uvedeného v Jeruzalémském Talmudu:

Samuel říká, že Mišna vychází z toho, že se vdovy navzájem posilují, konkrétně, třetí se spojí s druhou při jednání s první. Mohou jí říci: „Tvůj požadavek je 100, že? Vezmi si 50 a jdi“.

Druhé dvě ženy tak vytvoří koalici proti první; po vyplacení 50 jednotek si zbytek rozdělí na základě CG principu. Pro $E = 200$ tak získáme rozdělení $(50, 75, 75)$, pro $E = 300$ obdržíme $(50, 100, 150)$. Tento princip ovšem funguje jen pro $150 \leq E \leq 450$, neboť pro $E < 150$ by nebylo zachováno uspořádání a pro $E > 450$ by první žena nesla větší ztrátu než druhé dvě.[1] Konzistentní řešení pak vypadá takto: Pro $0 \leq E < 3d_1/2$ se pozůstalost dělí na rovné díly, pro $3d_1/2 \leq E \leq D - 3d_1/2$ probíhá rozdělení na základě výše uvedeného koaličního principu, pro $D - 3d_1/2 < E \leq D$ se dělí ztráty na rovné díly. Tento postup lze indukcí zobecnit na n věřitelů a lze dokázat, že koaliční proces vede ke konzistentnímu řešení pro všechny problémy bankrotu.

---

[1] Například pro $E = 100$ bychom obdrželi $(50, 25, 25)$, pro $E = 500$ by vyšlo $(50, 175, 275)$.

4. zdůvodnění: Teorie kooperativních her

Poslední zdůvodnění je založeno na současné teorii kooperativních her a je zajímavé tím, že ukazuje, že dnešní matematické řešení vede ke stejnému výsledku jako výše naznačené filozofické či etické úvahy založené na talmudických principech. **Nukleolus** odpovídající hry s charakteristickou funkcí

$$v_{E,d}(S) := (E - d(N \setminus S))_+ \,, \qquad \text{kde} \;\; (\alpha)_+ := \text{Max}\,(\alpha, 0)$$

se ve všech případech shoduje s řešením uvedeným v Talmudu.

$d_1 = 100,\ d_2 = 200,\ d_3 = 300$

E=100

$$v(1) = v(2) = v(3) = 0,$$
$$v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = 0,\ v(1,2,3) = 100$$

Imputace: $a_i \geq 0,\ a_1 + a_2 + a_3 = 100$

Jádro:

$$a_i \geq 0,\ a_1 + a_2 \geq 0,\ a_1 + a_3 \geq 0, a_2 + a_3 \geq 0,$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = 100$$

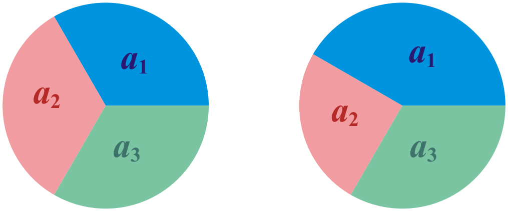
Shapley: $\boldsymbol{H} = \left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$

Nukleolus:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{a}) &= (-a_1, -a_2, -a_3, -a_1 - a_2, -a_1 - a_3, -a_2 - a_3, \\ &\quad 100 - a_1 - a_2 - a_3) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = (0, -a_i, -a_j, -a_k, \dots)$$

$$\rightsquigarrow \quad \text{min.} \quad \rightsquigarrow \quad a_1 = a_2 = a_3 = \frac{100}{3}$$



$a_1 + a_2 + a_3 = 100$

Proporcionální dělení E : $\left(\frac{100}{6}, \frac{200}{6}, \frac{300}{6}\right)$

$$\left(0, -\frac{100}{6}, -\frac{200}{6}, -\frac{300}{6}, \dots\right) >_{lex} \left(0, -\frac{100}{3}, -\frac{100}{3}, -\frac{100}{3}, \dots\right)$$

E=200

$v(1) = v(2) = v(3) = v(1,2) = v(1,3) = 0,$
$v(2,3) = 100, v(1,2,3) = 200$

Imputace: $a_i \geq 0,\ a_1 + a_2 + a_3 = 200$

Jádro:

$a_i \geq 0,\ a_1 + a_2 \geq 0,\ a_1 + a_3 \geq 0,\ a_2 + a_3 \geq 100,$
$a_1 + a_2 + a_3 = 200$

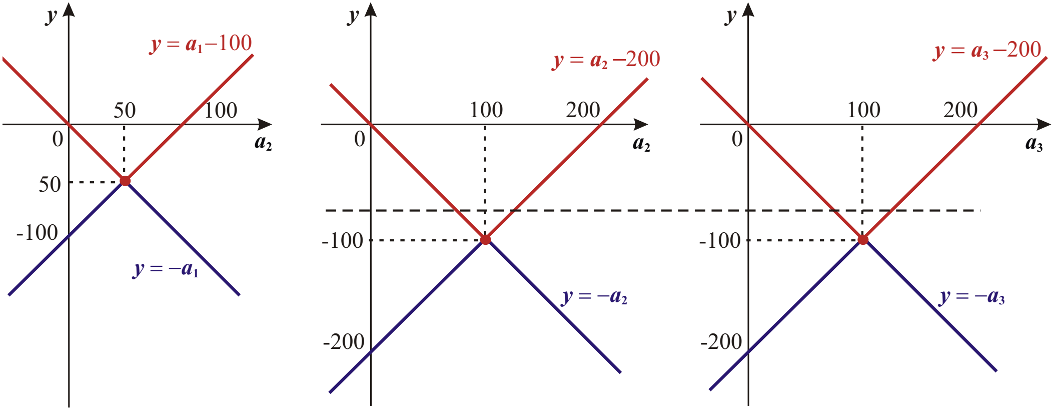
Shapley: $\boldsymbol{H} = \left(\frac{100}{3}, \frac{250}{3}, \frac{250}{3}\right)$

Nukleolus:

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a}) = (-a_1, -a_2, -a_3, -a_1 - a_2, -a_1 - a_3, 100 - a_2 - a_3, 0)$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = (0, -a_1, a_1 - 100, -a_2, -a_3, -a_1 - a_2, -a_1 - a_3)$$

$\rightsquigarrow$ min. $\rightsquigarrow$ $a_1 = 50,\ a_2 = a_3 = 75$


y
y = a₁−100
50
100
0
a₂
50
-100
y = −a₁
y
y = a₂ −200
100
200
0
a₂
-100
-200
y = −a₂
y
y = a₃ −200
100
200
0
a₃
-100
-200
y = −a₃

$$a_2 + a_3 = 150$$

E=300

$v(1) = v(2) = v(3) = v(1,2) = 0,\ v(1,3) = 100,$
$v(2,3) = 200, v(1,2,3) = 300$

Imputace: $a_i \geq 0,\ \ a_1 + a_2 + a_3 = 300$

Jádro:
$a_i \geq 0,\ a_1 + a_2 \geq 0,\ a_1 + a_3 \geq 100,\ a_2 + a_3 \geq 200,$
$a_1 + a_2 + a_3 = 300$

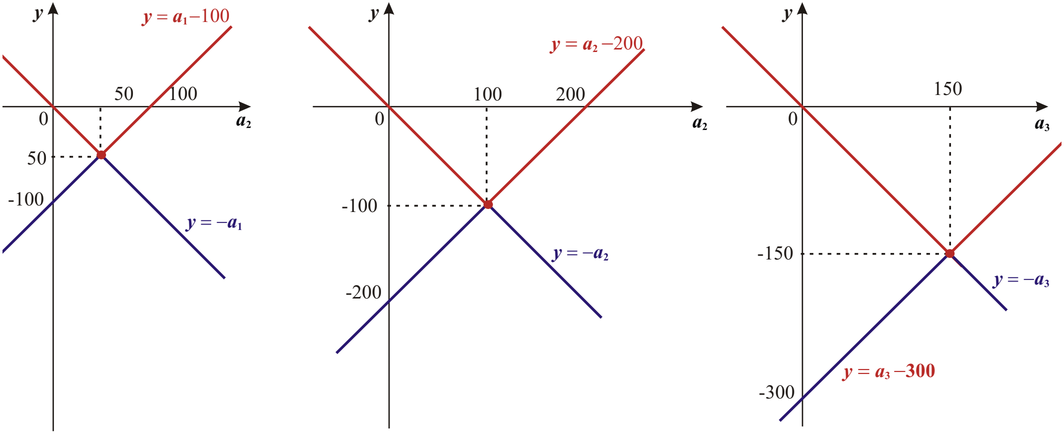
Shapley: $\boldsymbol{H} = (50, 100, 150)$

Nucleolus:

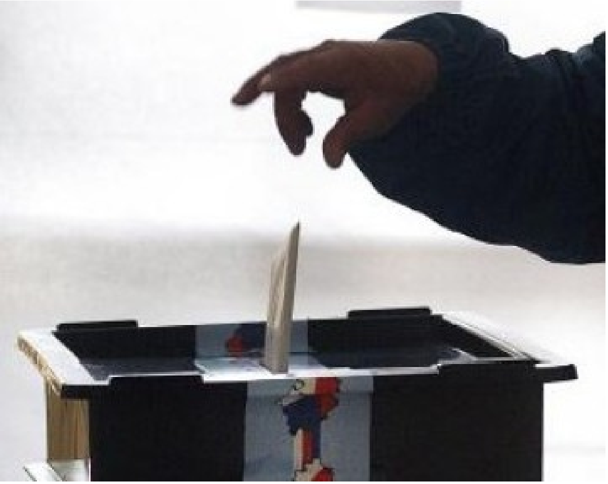
$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a}) = (-a_1, -a_2, -a_3, -a_1 - a_2, 100 - a_1 - a_3, 200 - a_2 - a_3, 0)$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = (0, -a_1, a_1 - 100, -a_2, a_2 - 200, -a_3, a_3 - 300)$$

$\rightsquigarrow$ min. $\rightsquigarrow$ $a_1 = 50,\ a_2 = 100,\ a_3 = 150$


y
$y = a_1 - 100$
50
100
0
a_2
50
-100
$y = -a_1$
y
$y = a_2 - 200$
100
200
0
a_2
-100
-200
$y = -a_2$
y
150
0
a_3
-150
$y = -a_3$
$y = a_3 - 300$
-300

10 TEORIE KOLEKTIVNÍHO ROZHODOVÁNÍ



SPOLEČENSKÁ VOLBA

Jak spojit preference jednotlivců ve volbu celé společnosti

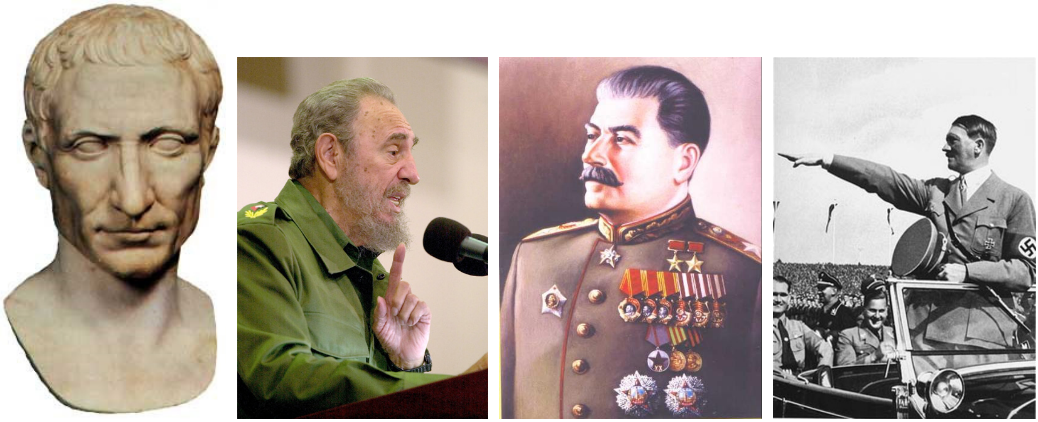
Hlavní předmět zájmu: **volby = základní pilíř demokracie**

Uvažujme n alternativ, z nichž má být volbou vybrána alternativa vítězná.

ZPŮSOBY VOLEB – PŘÍKLADY

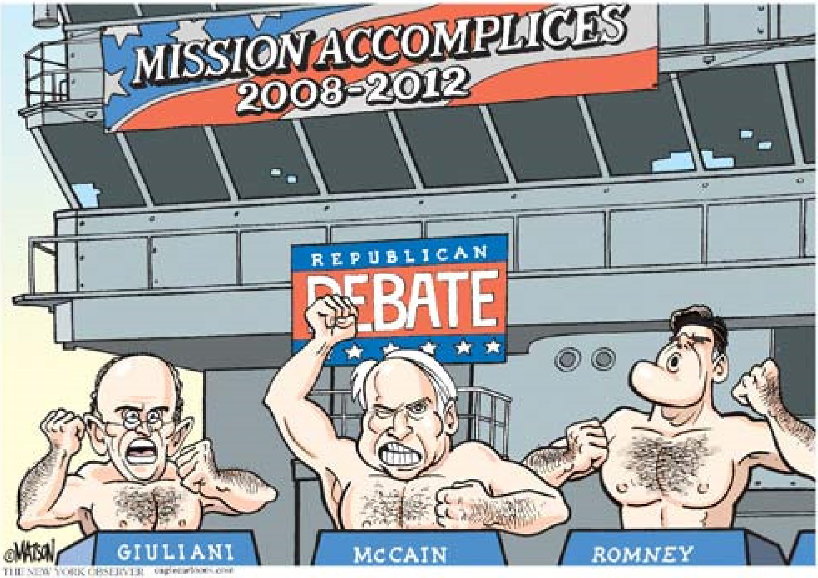
DIKTATURA

Ať už jsou preference členů společnosti jakékoli, výsledek závisí pouze na jediném jedinci – diktátorovi



PRINCIP VĚTŠINY

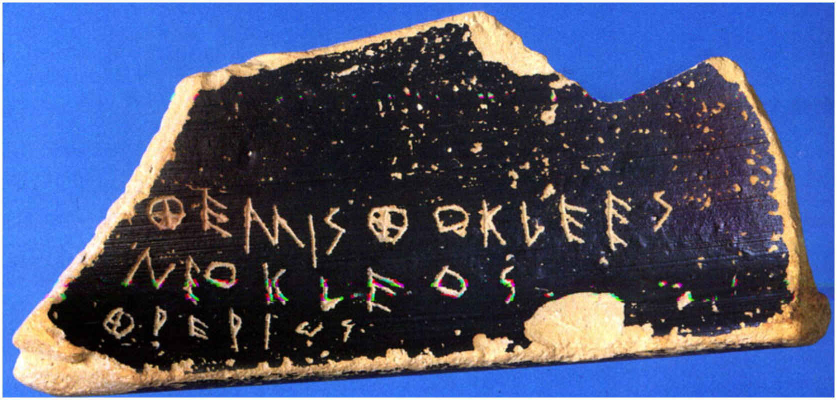
Každý volič zvolí nejoblíbenější alternativu
⟶ zvítězí alternativa s nejvyšším počtem hlasů



OSTRAKISMOS – STŘEPINKOVÝ SOUD

(Klesthenes, 508 př.kr.)

Shromáždění: každý občan napsal na **ostrakon** jméno toho, kdo je podle něj nebezpečný pro svobodu občanů



⟶ proti komu byla většina hlasů, musel opustit Athény na 10 let (nepozbýval občanských práv ani majetku)

Ramon Llull (1235 – 1316)

Má-li být zvolen jeden z n kandidátů, bylo by spravedlivé, kdyby tento člověk zvítězil v duelu s každým ze zbývajících kandidátů.

Spisy:

Blanquerna (1282 – 1287),

Artifitium electiones pesonarum (před 1283),

De arte electionis (1299)

Mikuláš Kusánský (1401 – 1464)

Llulův vítěz nemusí existovat

Kusánského metoda, 1433: každý volič dá svému nejméně oblíbenému kandidátovi 1 bod, druhému nejhoršímu 2 body, . . . , nejoblíbenějšímu n bodů. Vítězem je kandidát s nejvyšším počtem bodů.

Spis:

De concordantia catholica
(1282 – 1287)

Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, marquis de Condorcet (1743 – 1794)

***17. 9. 1743** Ribemont

Studium: Jesuitská kolej v Remeši, Collège de Navarre v Paříži, matematika u D'Alemberta

1765 – 1774 kariéra matematika
(člen Královské akademie věd, čestný člen mnoha zahraničních akademií a filosofických společností)
spolupráce s L. Eulerem a B. Franklinem

1774 jmenován generálním inspektorem mincovny

1777 jmenován tajemníkem Akademie věd

1782 zvolen členem Francouzské akademie
(projev o prospěchu spojení fyzikálních a morálních věd)

1789 účast ve Francouzské revoluci

1791 zvolen za Paříž do *Zákonodárného shromáždění*; tajemník shromáždění; návrh reformy francouzského školství, návrh ústavy, boj za práva žen a černochů

1792 hlasoval proti popravě krále Ludvíka XVI.
→ zařazen mezi Girondisty

1793 po převzetí moci Jakobíny kritizoval chvatně pozměněný návrh ústavy – označen za zrádce, vydán zatykač, 5 měsíců v úkrytu

28. 3. 1794 umírá ve vězení Bourg-la-Reine

- ***Du calcul intégral***, 1765
- ***Du probleme des trois corps***, 1767
- ***Essais d'analyse***, 1768
- ***Contribution au Supplément de l'Encyclopédie (22 articles sur l'analyse mathématique)***, 1776-1777
- ***Essai sur l'application de l'analyse a la probabilté des decisions rendues a la pluralité des voix***, 1785

Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, marquis de Condorcet (1743 – 1794)

***Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des decisions rendues à la pluralité des voix*, 1785**

Volební metoda: každý volič ostře uspořádá všechny alternativy podle svých preferencí $\longrightarrow$ **„Condorcetův vítěz“:** alternativa X s vlastností, že pro každou alternativu Y je počet voličů preferujících X před Y větší než počet voličů preferujících Y před X.

☞ ***Příklad 1**. Většina preferuje C před B, C před A, B před A.*

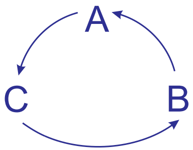
A je poraženo alternativami B i C; většina preferuje C před B, vítězí C.

Condorcetův vítěz nemusí vždy existovat

☛ ***Příklad 2**. Uvažujme tři různé voliče s následujícími preferencemi:*

		Volič		
		X	Y	Z
Pořadí preferencí	1.	A	C	B
	2.	B	A	C
	3.	C	B	A

Cyklus: $A \succ B$, $B \succ C$, $C \succ A$



$\Longrightarrow$ vždy lze odhalit takovou preferenci, která je schopna na základě většinového kritéria (v binární kombinaci) předchozího vítěze porazit

Condorcetův paradox: i když jsou individuální preference všech voličů tranzitivní, „společenské preference“ získané většinovými volbami tranzitivní být nemusí.

V demokracii neexistuje žádná jednoznačně nejlepší preference, kterou by bylo možné označit za konečnou, vítěznou, a jejíž přijetí by bylo možné v rámci teorie společenské volby pokládat za nejspravedlivější.

Jean Charles de Borda (1733 – 1799)

Jean Charles de Borda (1733 – 1799)

***Mémoire sur les élections au scrutin*, 1781 (1770)**
Kritika volebních pravidel ve Francouzské akademii: vítězem většinové volby může být všeobecně nejméně preferovaný kandidát.

☛ ***Příklad 3***: *12 voličů s následujícím rozložením preferencí vybírá jednoho ze tří kandidátů, A, B, C.*

		Počet voličů		
		5	4	3
Pořadí preferencí	1.	Alice	Barbora	Cecílie
	2.	Cecílie	Cecílie	Barbora
	3.	Barbora	Alice	Alice

Většinová volba: ***Alice*** $\succ$ *Barbora* $\succ$ *Cecílie* (5 : 4 : 3)

$\longrightarrow$ **Rozpor:** rozhodování mezi Alicí a Cecílií:

$$\textit{Cecílie} \succ \textit{Alice} \qquad (7:5)$$

Bordova metoda: Každá alternativa dostane za každého voliče počet bodů podle pořadí v žebříčku preferencí: je-li na posledním místě, získá 1 bod, na předposledním 2 body, . . . , na prvním místě n bodů, kde n je počet alternativ. Vítězem je alternativa s nejvyšším počtem bodů.

Používaná ve Francouzské akademii v letech 1796 – 1803

Vítěz nemusí být pro nikoho na prvním místě; nevznikají cykly - jen remízy

Počty bodů:

		Počet voličů		
		5	4	3
Pořadí preferencí	1.	Alice	Barbora	Cecílie
	2.	Cecílie	Cecílie	Barbora
	3.	Barbora	Alice	Alice

Alice . . . $3 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 22$

Barbora . . . $1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 23$

Cecílie . . . $2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = \mathbf{27}$ ... **Bordův vítěz**

Rozhodování po dvou: *Barbora* $\succ$ *Alice* (7 : 5)

Cecílie $\succ$ *Barbora* (**8** : 4)

Cecílie $\succ$ *Alice* (**7** : 5)

$\longrightarrow$ Cecílie zvítězí ve srovnání se zbývajícími kandidáty

☞ ***Příklad 4.***

Uvažujme tři různé voliče s následujícími preferencemi:

		Volič						
		1	2	3	4	5	6	7
	1.	X	A	B	X	A	B	X
Pořadí	2.	C	X	A	C	X	A	C
preferencí	3.	B	C	X	B	C	X	B
	4.	A	B	C	A	B	C	A

Počet bodů:

X ... 22, A ... 17, B ... 16, C ... 15

⇝ X odstoupí: A ... 13, B ... 14, **C ... 15**

Vítězem se paradoxně stala alternativa, která původně prohrála.

✍ *Příklad 5*.

Nyní uvažujme přesně opačná uspořádání preferencí:

		Volič						
		1	2	3	4	5	6	7
	1.	A	B	C	A	B	C	A
Pořadí	2.	B	C	X	B	C	X	B
preferencí	3.	C	X	A	C	X	A	C
	4.	X	A	B	X	A	B	X

Jasným vítězem je C s 20 body, poslední je X se 13 body.

Jestliže však X odstoupí, zvítězí A s 15 body, zatímco C bude poslední s 13 body. Původní vítěz je nyní poslední a ten, kdo byl původně předposlední, je vítězem. V předchozím příkladu odstoupil vítěz, nyní je situace ještě paradoxnější: X je zcela nedůležitý poražený.

Charles Lutwidge Dodgson (1832 – 1898)

A Method of Taking Votes on More than Two Issues, 1876

Volební systém inspirovaný Condorcetem:

> Vítězem je kandidát, který je „nejblíže“ ke Condorcetovu vítězi v tom smyslu, že by se jím stal s nejmenším počtem změn v preferencích voličů

Duncan Black (1908 – 1991)

- ***On the Rationale of Group Decision Making*, 1948**
- ***Theory of Committees and Elections*, 1958**

Propagoval práce Charlese Dodgsona

Blackova metoda:

$$\text{vítěz voleb} = \begin{cases} \text{Condorcetův vítěz, pokud existuje} \\ \text{Bordův vítěz v ostatních případech} \end{cases}$$

Kenneth Arrow (*1921)

Social Choice and Individual Values, 1951

Označení, předpoklady

$\mathcal{A} = \{x, y, \ldots, z\}$ – **množina alternativ**

$Q = \{1, 2, \ldots, n\}$ – **množina jedinců, společnost**

Pro každé $i \in Q$ nechť je na $\mathcal{A}$ definováno **úplné neostré uspořádání (i preferuje x před y nebo je indiferentní mezi x, y)**:

- pro každé $x, y \in A$ platí: $x \succeq_i y$ nebo $y \succeq_i x$,
- pro každé $x, y, z \in A$ platí: je-li $x \succeq_i y$ a $y \succeq_i z$, pak $x \succeq_i z$.

Dále definujme relace **preference** $\succ_i$ a **indiference** $\approx_i$:

- $x \succ_i y$, právě když neplatí $y \succeq_i x$ **(i preferuje x před y)**,
- $x \approx_i y$, právě když platí: $x \succeq_i y \wedge y \succeq_i x$
  (i je indiferentní mezi x, y).

Schematické znázornění preferencí:

☞ ***Příklad 6***: $Q = \{1, 2\},\ A = \{x, y\}$

R^1	R^2	R^3
x	y	$x - y$
y	x	

Množinu všech uspořádání alternativ označme

$$\mathcal{R} = \{R^1, R^2, \ldots, R^m\}$$

Definice 1. Profilem uspořádání preferencí členů společnosti budeme rozumět uspořádanou n-tici $(R^1, R^2, \ldots, R^n)$, kde R^i udává uspořádání preferencí jedince i.

☛ ***Příklad 7***: $Q = \{1, 2\},\ A = \{x, y\}$

R^1	R^2	R^3
x	y	$x - y$
y	x	

1	2	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
R^1	R^1	R^1	R^1	R^1	R^1	R^2
R^1	R^2	R^3	R^1	R^1	R^2	R^3
R^1	R^3	R^1	R^1	R^1	R^3	R^2
R^2	R^1	R^3	R^1	R^2	R^1	R^3
R^2	R^2	R^2	R^1	R^2	R^2	R^1
R^2	R^3	R^2	R^1	R^2	R^3	R^2
R^3	R^1	R^1	R^1	R^3	R^1	R^2
R^3	R^2	R^2	R^1	R^3	R^2	R^3
R^3	R^3	R^3	R^1	R^3	R^3	R^1

F_2 . . . vnucená volba

F_3, F_4 . . . diktatura

Definice 2. Funkcí společenského blahobytu (social welfare function) $\boldsymbol{F}$ budeme rozumět zobrazení, které každému profilu uspořádání preferencí jednotlivců přiřadí úplné neostré uspořádání preferencí společnosti, tj.

$$F : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}; \; (R^1, R^2, \ldots, R^n) \mapsto R;$$

pro názornost budeme místo $(x, y) \in R$ psát $x \succeq y$ **(společnost preferuje $\boldsymbol{x}$ před $\boldsymbol{y}$ nebo je indiferentní mezi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$)**; analogicky pro $x \succ y, \; x \approx y$.

Požadavky na „spravedlivé“ spojení uspořádání individuálních preferencí v uspořádání preferencí celé společnosti

Podmínka 1

- *Funkce společenského blahobytu F je definována pro všechny možné profily individuálních uspořádání preferencí.*
- *Počet alternativ v $\mathcal{A}$ je větší nebo roven 3, tj.* $|\mathcal{A}| \geq 3.$
- *Společnost obsahuje alespoň dva různé jedince, tj.* $|Q| \geq 2.$

Poznámka:

Není splněna např. při Condorcetově metodě

Podmínka 2 (pozitivní spojení společných a individuálních hodnot)

Jestliže je podle funkce společenského blahobytu pro daný profil preferencí x preferováno před y, pak totéž platí i při následujících modifikacích profilu:

- *vzájemný vztah jednotlivých dvojic alternativ různých od* x *se nemění,*
- *vzájemný vztah mezi alternativou* x *a jakoukoli jinou alternativou zůstává nezměněn nebo je změněn ve prospěch* x.

Poznámka:

Uvažujme například následující profily uspořádání.
Je-li funkce F taková, že pro profil

R^1	R^2	R^3
x	$x - z$	$x - y - z$
y	y	
z		

je $y \succ z$, pak by odporovalo intuici, kdyby pro profil

R^1	R^2	R^3
$x - y$	$x - z$	y
z	y	$x - z$

nezůstalo $y \succ z$:

Podmínka 3 (nezávislost na irelevantních alternativách)

Nechť $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ je libovolná podmnožina množiny alternativ. Je-li profil uspořádání modifikován tak, že vzájemný vztah všech dvojic z $\mathcal{B}$ zůstává nezměněn, pak společné uspořádání určené původním a modifikovaným profilem je pro alternativy z $\mathcal{B}$ identické.

Poznámka:

podmínka 3 není splněna při Bordově metodě:

	V	W	X	Y	Z
1.	**A**	**A**	B	B	C
2.	B	C	C	C	B
3.	C	B	**D**	**D**	**D**
4.	**D**	**D**	**A**	**A**	**A**

Počet bodů: A . . . 11
D . . . 8

Preference společnosti: A $\succ$ D

Omezení množiny alternativ na $\{A, D\}$:

	V	W	X	Y	Z
1.	**A**	**A**	**D**	**D**	**D**
2.	**D**	**D**	**A**	**A**	**A**

Počet bodů: A . . . 7
D . . . 8

Preference společnosti: D $\succ$ A

Podmínka 4 (občanská suverenita)

Pro každou dvojici alternativ x, y *existuje takový profil individuálních uspořádání, že společnost preferuje* x *před* y.

Podmínka 5 (nediktátorství)

Neexistuje jedinec s vlastností, že kdykoli preferuje x *před* y *pro libovolnou dvojici* x, y, *společnost má stejnou preferenci, bez ohledu na preference ostatních jedinců.*

Věta (Arrow’s Impossibility Theorem).

Podmínky 1–5 jsou nekonzistentní.

Věta (Arrow's Impossibility Theorem).

Podmínky 1–5 jsou nekonzistentní.

Jinými slovy, jediný systém splňující podmínky 1–4 je v případě tří a více alternativ **diktatura.**

Definice 3. Množina V se nazývá **rozhodující pro uspořádanou dvojici** (x, y), právě když platí:

$$\forall i \in V: \; x \succ_i y \Rightarrow x \succ y$$

bez ohledu na preference $j \notin V$

Tvrzení: Množina V je rozhodující pro uspořádanou dvojici (x, y), právě když platí:

$$(\forall i \in V: \; x \succ_i y \wedge \forall j \in Q \setminus V : y \succ_j x) \Rightarrow x \succ y$$

Hlavní kroky důkazu

1. Předpokládejme, že $V \neq \emptyset$ je **minimální rozhodující množina**, tj. existují takové alternativy $x, y \in A$, že V je rozhodující pro (x, y), ale neexistuje žádná vlastní podmnožina $V' \subset V$, která by byla rozhodující pro nějakou dvojici alternativ.

V existuje:

- Q je rozhodující množina pro každou dvojici alternativ (tzv. **Paretovská optimalita**; plyne z podmínek 1–4).
- Po jednom prvku pak lze ubírat, dokud je nová množina rozhodující pro nějakou dvojici alternativ. Kdyby pak bylo $V = \emptyset$, existovala by dvojice (x, y), pro kterou by $\emptyset$ byla rozhodující množina; potom by však $Q = Q \setminus \emptyset$ nebyla pro (x, y) rozhodující, což je spor.

2. Zvolme libovolné $j \in V$; označme $W = V \setminus \{j\}$, $U = Q \setminus V$ (protože $|Q| \geq 2$, je aspoň jedna z množin U, W neprázdná). Zvolme libovolné $z \in \mathcal{A}$, $z \neq x, y$. Uvažujme následující profil:

$\{j\}$	W	U
x	z	y
y	x	z
z	y	x

- Pro každé $i \in V = W \cup \{j\}$ je $x \succ_i y$, proto $x \succ y$.
- Zároveň musí být $y \succeq z$ (jinak by W byla rozhodující pro (z, y), což by bylo ve sporu s minimalitou V).
- Z tranzitivity pak plyne: $x \succ z$.
- Avšak j je jediný, který preferuje x před z; vzhledem k minimalitě V nemůže být $\{j\}$ vlastní podmnožinou V, proto $V = \{j\}$.

3. Zatím jsme ukázali, že $\{j\}$ je pro každé $z \neq x$ rozhodující pro (x, z). Nyní uvažujme libovolné $w \in \mathcal{A}$, $w \neq x, z$. Ukážeme, že $\{j\}$ je rozhodující i pro (w, z) a (w, x). Uvažujme profily:

$\{j\}$	U
w	z
x	w
z	x

Z Paretovské vlastnosti plyne: $w \succ x$;

$\{j\}$ je rozhodující pro (x, z), proto $x \succ z$;

z tranzitivity plyne: $w \succ z$, tj.

$\{j\}$ je rozhodující pro (w, z).

$\{j\}$	U
w	z
z	x
x	w

$\{j\}$ je rozhodující pro (w, z), proto $w \succ z$;

z Paretovské vlastnosti plyne: $z \succ x$;

z tranzitivity plyne: $w \succ x$, tj.

$\{j\}$ je rozhodující pro (w, x).

Celkem jsme tedy ukázali, že $\{j\}$ je rozhodující pro každou dvojici alternativ a je to tedy „diktátor“ ve smyslu podmínky 5.

Princip prosté většiny je jediný, který splňuje podmínky:

- **rozhodnutelnost:** pro každý profil je určeno skupinové rozhodnutí o libovolných dvou alternativách,
- **anonymita:** nezáleží na označení jedinců,
- **neutralita:** nezáleží na označení alternativ,
- **pozitivní odezva:** je-li $x \succeq y$ a jeden jedinec změní uspořádání ve prospěch z, pak $x \succ y$.

Označme $N_x = |\{i \in Q; x \succeq_i y\}|$, $N_y = |\{i \in Q; y \succeq_i x\}|$,

$$N_I = |\{i \in Q; x \approx_i y\}|.$$

- **Anonymita:** kolektivní rozhodnutí o x, y závisí jen na N_x, N_y, N_I,
- z **neutrality** plyne: $x \approx y$, právě když $N_x = N_y$,
- opakovaným využitím **pozitivní odezvy** lze ukázat:
  $x \succ y$ právě tehdy, když $N_x > N_y$, resp.
  $y \succ x$ právě tehdy, když $N_y > N_x$.

☚ ***Příklad 8*.**

Uvažujme tři různé voliče s následujícími preferencemi:

			Volič	
		X	Y	Z
Pořadí preferencí	1.	A	C	B
	2.	B	A	C
	3.	C	B	A

Je-li k výběru vítězné alternativy – například v parlamentu či nějakém výboru – použito pravidlo prosté většiny, pak záleží na tom, v jakém pořadí dá předseda o jednotlivých alternativách hlasovat:

		Volič		
		X	Y	Z
Pořadí preferencí	1.	A	C	B
	2.	B	A	C
	3.	C	B	A

- 1. kolo: A proti B → 2. kolo: vítěz proti C ⇒ **celkový vítěz: C**
- 1. kolo: A proti C → 2. kolo: vítěz proti B ⇒ **celkový vítěz: B**
- 1. kolo: B proti C → 2. kolo: vítěz proti A ⇒ **celkový vítěz: A**

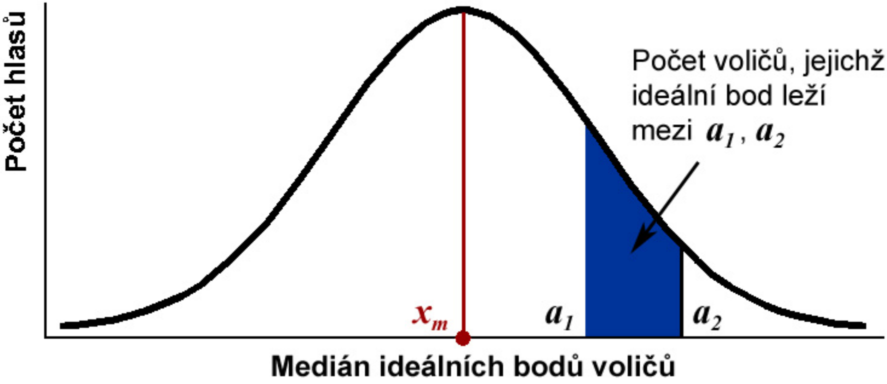
Jak víme z kapitoly věnované hrám v explicitním tvaru, při tzv. **sofistikované volbě** se výsledek může změnit, v tomto případě by pak v uvedených situacích zvítězily alternativy B, A, C.

V každém případě nám však pro různé pořadí hlasování vychází různý výsledek (což bychom měli mít na paměti při sledování politického dění).

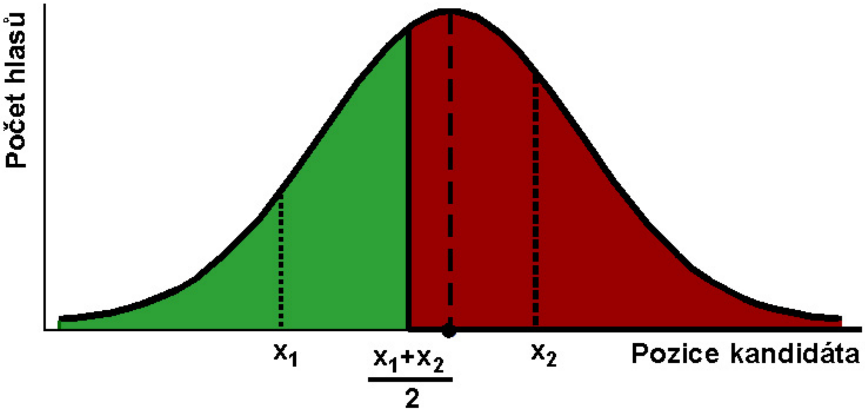
☞ ***Příklad 9***. Uvažujme všeobecné volby, v nichž voliči volí jednoho ze dvou kandidátů, a to na základě jejich postoje v jedné konkrétní záležitosti - například podle pozice na škále znázorňující obecné liberálně-konzervativní rozdělení. Předpokládejme:

- Každý volič má **ideální bod** – nejpreferovanější pozici na dané škále; užitek klesá s rostoucí vzdáleností od tohoto bodu
- Každý volič hlasuje na základě svého přesvědčení a volí toho kandidáta, který je nejblíže k jeho ideálnímu bodu; jsou-li oba vzdáleni stejně, vybírá náhodně se stejnými pravděpodobnostmi (hodí si mincí)
- Každý volič vždy volí
- Každý kandidát může zaujmout libovolnou pozici
- Každý kandidát se snaží maximalizovat své šance na vítězství ve volbách a POUZE PODLE TOHO volí pozici, kterou zaujme
- Pro každého kandidáta je užitek z vítězství $u(v) = 1$, užitek z prohry $u(p) = -1$; jedná se tedy o hru s nulovým součtem

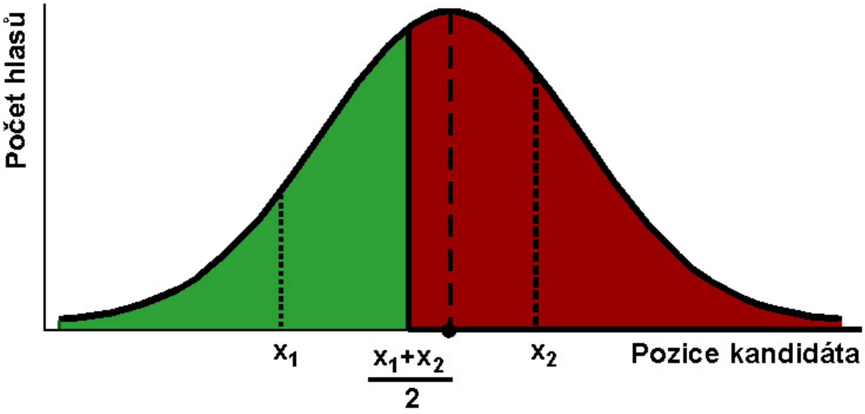
Situaci lze znázornit pomocí rozdělení ideálních bodů voličů. Při malém počtu voličů to bude množina izolovaných bodů, při velkém počtu voličů získáme rozdělení spojité, např.:



Výška křivky v bodě a udává počet voličů, pro které je a ideálním bodem. Obsah modré oblasti udává počet voličů, jejichž ideální bod leží mezi a_1 a a_2.



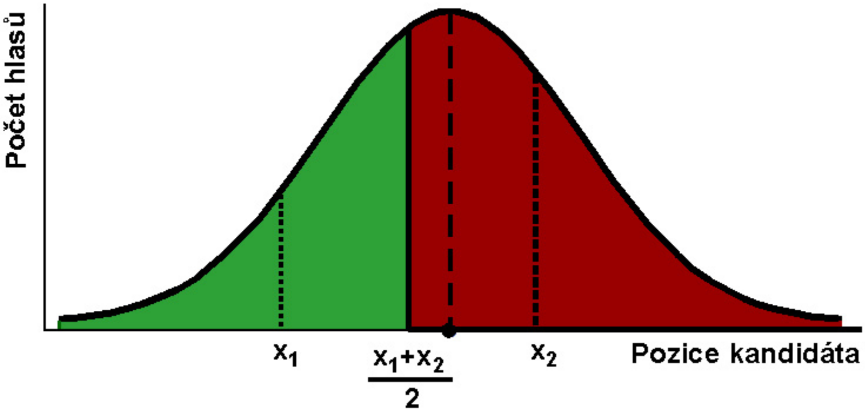
V situaci znázorněné výše zřejmě kandidát zvítězí právě tehdy, když získá hlas od voliče, který představuje MEDIÁN x_m. Zaujme-li kandidát C_2 pozici x_2, pak užitek pro kandidáta C_1 je pro různé hodnoty x_1 následující:



$$u_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x_1 - x_m| < |x_2 - x_m|$$

$$u_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x_1 - x_m| = |x_2 - x_m|$$

$$u_1 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad |x_1 - x_m| > |x_2 - x_m|$$



Je-li známo, že kandidát C_2 zaujme pozici x_2, pak nejlepší odpověď kandidáta C_1 je následující:

$$x_2 < x_m \quad \Rightarrow \quad C_1 \text{ zvolí pozici } x, \text{ kde } x_2 < x < 2x_m - x_2$$

$$x_2 > x_m \quad \Rightarrow \quad C_1 \text{ zvolí pozici } x, \text{ kde } 2x_m - x_2 < x < x_2$$

$$x_2 = x_m \quad \Rightarrow \quad C_1 \text{ zvolí pozici } x, \text{ kde } x = x_m$$

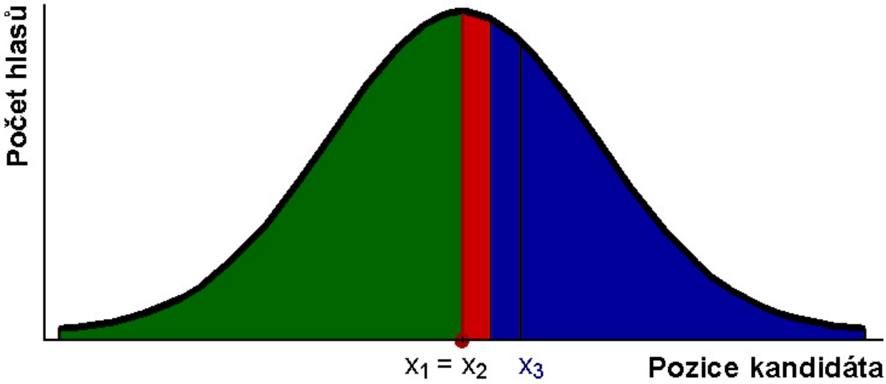
Nejlepší odpověď kandidáta C_2 na určitou volbu kandidáta C_1 je obdobná. Nyní se nabízí otázka, zda pro naše kandidáty existuje dvojice strategií, které jsou vzájemně nejlepšími odpověďmi. Řešení je snadné: oba by měli zvolit medián x_m. Jak jsme viděli výše, zaujme-li jeden z kandidátů strategii různou od x_m, může jeho protivník zaujmout pozici blíže k mediánu a tak zvítězit.

Tato ”konvergence kandidátů” k ideálnímu bodu ”voliče-mediána” je speciálním případem následující věty:

Věta 1 o voliči – mediánu:

Jestliže všichni voliči volí a rozdělení jejich preferencí má jediné lokální maximum v jednorozměrném prostoru, pak při volbě jedné ze dvou možností porazí MEDIÁN ideálních bodů všechny ostatní pozice.

✒ ***Příklad 10***. Dále si představme, že do voleb vstoupí ještě třetí strana. Jak se změní situace?



11 DOPRAVNÍ A POČÍTAČOVÉ SÍTĚ

ANTAGONISTICKÉ HRY

– spolehlivost dopravních sítí

Obvyklý přístup:

- získání statistických dat pro jednotlivé hrany (doba přepravy, zpoždění, kapacita)
- studium vlivu změn chování hran na chování celé sítě

Potíže:

- neúplné informace
- v případě úplných informací nemusí být jistá stabilita dat v čase

Michael G. H. Bell, 2000: *A game theory approach to measuring the performance reliability of transport networks*

☞ ***Model***

1. hráč: uživatel dopravní sítě, který hledá cestu tak, aby minimalizoval očekávané náklady

2. hráč: „démon“, který ovlivňuje fungování sítě tak, aby tyto očekávané náklady maximalizoval

Míra spolehlivosti dopravní sítě = náklady při rovnovážných strategiích

> Síť je spolehlivá, jestliže očekávané náklady na cestu jsou přijatelné i v případě, že jsou uživatelé extrémně pesimističtí o stavu sítě.

HRY MEZI CESTOVATELI

– většinou soupeření o omezený prostor na silnici

M. Van Vugt, R. M. Meertens, P. Van Lange, 1995:

Car Versus Public Transportation?

☛ ***Model***

		Hráč 2	
	Strategie	Veřejná doprava	Automobil
Hráč 1	Veřejná doprava	$(4, 4)$	$(-4, 8)$
	Automobil	$(8, -4)$	$(0, 0)$

HRY MEZI CESTOVATELI

– většinou soupeření o omezený prostor na silnici

M. Van Vugt, R. M. Meertens, P. Van Lange, 1995:

Car Versus Public Transportation?

☛ ***Model***

Hráč 2

	Strategie	Veřejná doprava		Automobil
	Veřejná doprava	$(4, 4)$	$\rightarrow$	$(-4, 8)$
Hráč 1		$\downarrow$		$\downarrow$
	Automobil	$(8, -4)$	$\rightarrow$	$(0, 0)$

☞ Vězňovo dilema: Melvin Dresher, Merrill Flood, 1950

Hráč 2

		Spolupráce	Zrada
Hráč 1	Spolupráce	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$(-1, 2)$
	Zrada	$(1, -1)$	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Vězňovo dilema: Dirigent, Čajkovskij a KGB

		Čajkovskij	
		Zapírat	Přiznat
Dirigent	Zapírat	$(-3, -3)$	$(-25, -1)$
	Přiznat	$(-1, -25)$	$(-10, -10)$

☞ Vězňovo dilema

		Hráč 2	
		Spolupráce	Zrada
Hráč 1	Spolupráce	(*odměna*, *odměna*)	(*oškubání*, *pokušení*)
	Zrada	(*pokušení*, *oškubání*)	(*trest*, *trest*)

$$\textit{oškubání} < \textit{trest} < \textit{odměna} < \textit{pokušení}.$$

David Levinson, 2005:

Micro-Foundations of Congestion and Pricing: A Game Theory Perspective

Hra dvou nebo tří hráčů, kteří volí čas odjezdu – zkoumání vzniku dopravního zahlcení: zvolí-li dva řidiči stejný čas, vznikne zácpa a jeden z řidičů dorazí do cíle později.

☛ *Model*

Řidič 2

		Brzy	Načas	Pozdě
	Brzy	$\left(\frac{B+Z}{2}, \frac{B+Z}{2}\right)$	$(B, 0)$	(B, P)
Řidič 1	Načas	$(0, B)$	$\left(\frac{P+Z}{2}, \frac{P+Z}{2}\right)$	$(0, P)$
	Pozdě	(P, B)	$(P, 0)$	$\left(P + \frac{P+Z}{2}, P + \frac{P+Z}{2}\right)$

Pozorování: obvykle $B < Z < D$

☛ $B = 1, Z = 2, P = 3$

		Řidič 2		
		Brzy	Načas	Pozdě
Řidič 1	Brzy	$\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$(1, 0)$	$(1, 3)$
	Načas	$(0, 1)$	$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$	$(0, 3)$
	Pozdě	$(3, 1)$	$(3, 0)$	$\left(\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\right)$

☞ $B = 1, Z = 2, P = 3$

Řidič 2

		Brzy	Načas	Pozdě
	Brzy	$\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$(1, 0)$	$(1, 3)$
Řidič 1	Načas	$(0, 1)$	$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$	$(0, 3)$
	Pozdě	$(3, 1)$	$(3, 0)$	$\left(\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\right)$

☞ ***Příklad 1***: **„Kuřata“**

Pepíček

	Strategy	Zahni		Jeď rovně
	Zahni	$(1, 1)$	$\rightarrow$	$(0, 2)$
Maruška		$\uparrow$		$\downarrow$
	Jeď rovně	$(\mathbf{2}, \mathbf{0})$	$\leftarrow$	$(-3, -3)$

☞ $B = 3, Z = 1, P = 4$

Řidič 2

		Brzy	Načas	Pozdě
Řidič 1	Brzy	$(2, 2)$	$(3, 0)$	$(3, 4)$
	Načas	$(0, 3)$	$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$	$(0, 4)$
	Pozdě	$(4, 3)$	$(4, 0)$	$\left(\frac{13}{2}, \frac{13}{2}\right)$

- $B = 3, Z = 1, P = 4$

		Řidič 2		
		Brzy	Načas	Pozdě
Řidič 1	Brzy	$(2, 2)$	$(3, 0)$	$(3, 4)$
	Načas	$(0, 3)$	$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$	$(0, 4)$
	Pozdě	$(4, 3)$	$(4, 0)$	$\left(\frac{13}{2}, \frac{13}{2}\right)$

- Poplatky za dopravní zácpu

		Řidič 2		
		Brzy	Načas	Pozdě
Řidič 1	Brzy	$(2, 2)$	$(3, 0)$	$(3, 4)$
	Načas	$(0, 3)$	$(5, 5)$	$(0, 4)$
	Pozdě	$(4, 3)$	$(4, 0)$	$(9, 9)$

P. A. Pedersen, 2003:

Moral Hazard in Traffic Games

Hypotéza: zvyšování bezpečnosti způsobuje zvyšování počtu agresivních řidičů

Strategie: hrdlička nebo jestřáb

2 hrdličky:

analogie Cournotova modelu duopolu

hrdlička, jestřáb:

Stackelbergův model s jestřábem jako vůdcem

2 jestřábi:

oba se snaží chovat jako vůdci, výsledkem je nerovnováha

✎ Jestřábi a hrdličky

Strategie	Jestřáb	Hrdlička
Jestřáb	$\left(\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2}\right)$	$(V, 0)$
Hrdlička	$(0, V)$	$\left(\frac{V}{2}, \frac{V}{2}\right)$

Rypouš sloní: $V >> C$

HRY MEZI AUTORITAMI A „UŽIVATELI“

– obvykle Stackelbergův model; autorita usiluje o optimální stav celého systému, sobecký uživatel o individuální optimum

D. Reyniers, 1992: *Crowding Levels and Fare Classes in Public Transport*

Hráči: provozovatel železnice, pasažéři

Strategie:

Provozovatel rozhoduje o rozdělení vlaků do tříd a určuje jízdné v jednotlivých třídách (předvídá chování pasažérů)

Pasažéři se rozhodují se o tom, kterou třídu použijí

H. J. Van Zuylen, H. Taale, 2004: *Urban Network with Ring Roads: A Two-Level, Three Player Game*

Hráči:

- **Společnost zodpovědná za městské komunikace**
- **Společnost zodpovědná za obchvat**
- **Uživatelé dopravní sítě**

Strategie společností: nastavení světelných signálů

H. J. Van Zuylen, H. Taale, 2004: *Urban Network with Ring Roads: A Two-Level, Three Player Game*

Hráči:

- ➥ **Společnost zodpovědná za městské komunikace**

  cíl: minimalizovat celkovou dobu přepravy na městských komunikacích
- ➥ **Společnost zodpovědná za obchvat**

  cíl: maximalizovat rychlost na obchvatu
- ➥ **Uživatelé dopravní sítě**

  cíl: minimalizovat dobu vlastní přepravy

Strategie společností: nastavení světelných signálů

Y. Hollander, J. N. Prashker, D. Mahalel, 2006: *Determining the Desired Amount of Parking Using Game Theory*

Stackelbergův model:

- **Vedení města**

  cíl: zachovat přívětivé městské centrum rozvojem MHD a minimalizací IAD

  strategie: redukce parkovacích míst v centru města
- **Uživatelé dopravní sítě**

  cíl: maximalizovat užitek

  strategie: volba druhu dopravy do centra, případně volba jiné destinace

MANAGEMENT DOPRAVNÍCH SÍTÍ

Tim Roughgarden, 2002: *Selfish Routing*

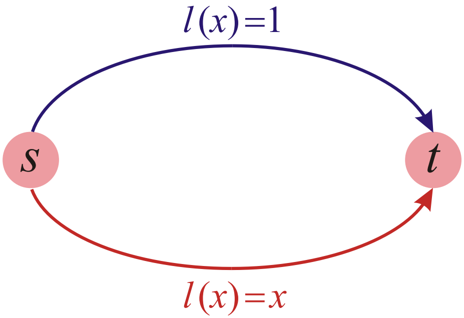
- **kvantifikace zhoršení chování dopravní sítě způsobeného sobeckým nekoordinovaným chováním uživatelů**

  horní odhad poměru celkových nákladů při nekoordinovaném chování a celkových nákladů při společensky optimálním chování

- **návrh a rozbor algoritmů pro budování a řízení sítí vedoucích ke společensky žádoucímu výsledku**

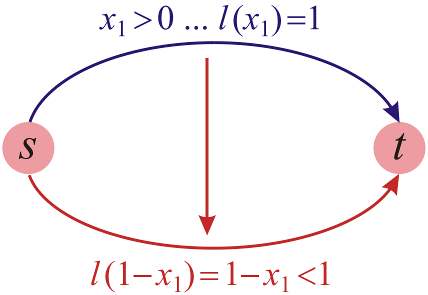
MOTIVACE

Pigou, 1920



s	...	satelitní město
v	...	vlakové nádraží
x	...	část celkové přepravy probíhající po dané hraně
$l(x)$	...	doba přepravy po dané hraně

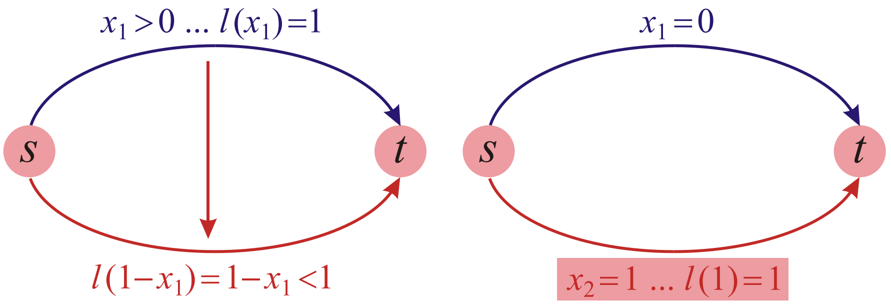
Rovnovážné strategie:



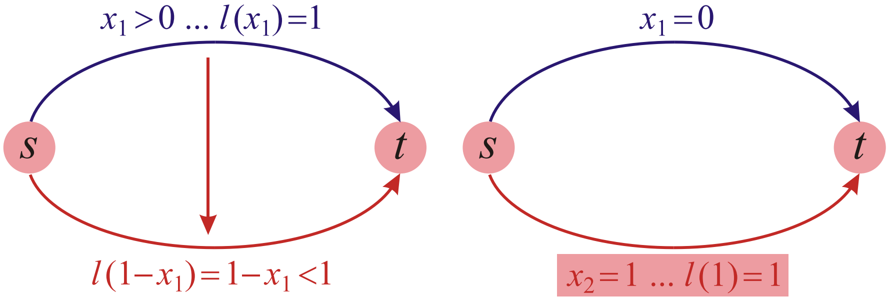
$x_1 > 0 \ldots l(x_1) = 1$

$l(1 - x_1) = 1 - x_1 < 1$

Rovnovážné strategie:



Rovnovážné strategie:



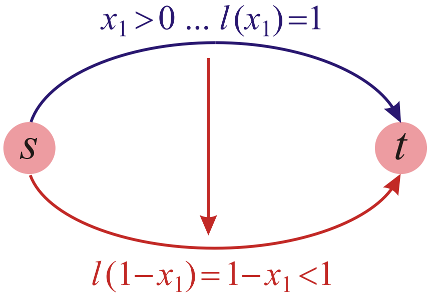
Společenské optimum:

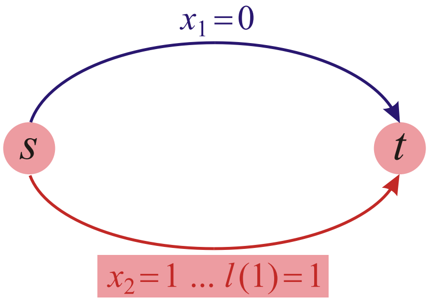
$$x_2^2 + (1 - x_2) = (x_2 - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}$$

$$\downarrow$$

min

Rovnovážné strategie:



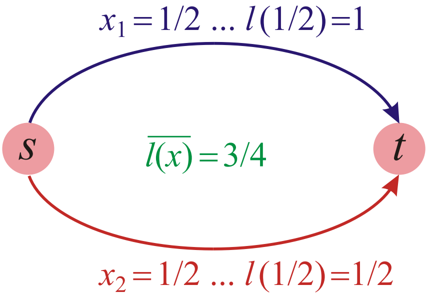


Společenské optimum:

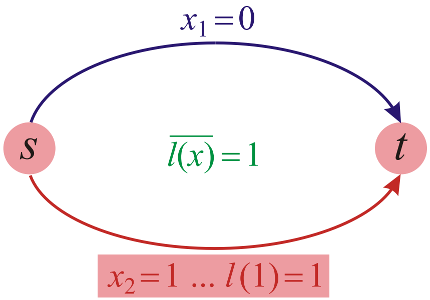
$$x_2^2 + (1 - x_2) = (x_2 - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}$$

$$\downarrow$$

min



Rovnovážné strategie:

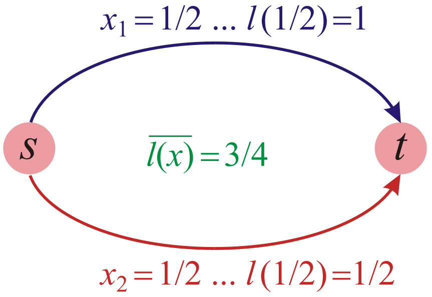


$x_1 = 0$

$\overline{l(x)} = 1$

$x_2 = 1 \; \ldots \; l(1) = 1$

Společenské optimum:



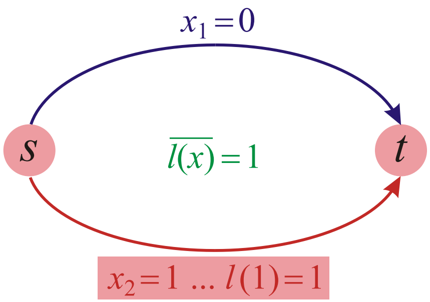
$x_1 = 1/2 \; \ldots \; l(1/2) = 1$

$\overline{l(x)} = 3/4$

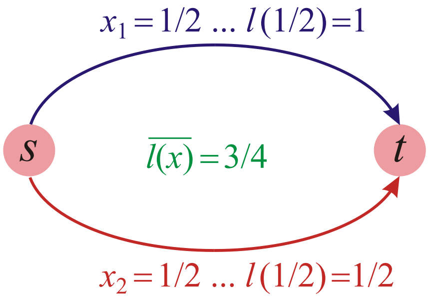
$x_2 = 1/2 \; \ldots \; l(1/2) = 1/2$

Ponaučení: sobecké chování nezávislých nespolupracujících jedinců nevede nutně ke společensky optimálnímu výsledku.

Rovnovážné strategie:



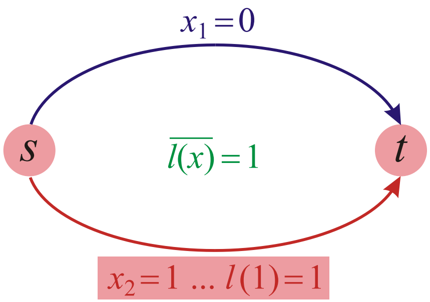
Společenské optimum:



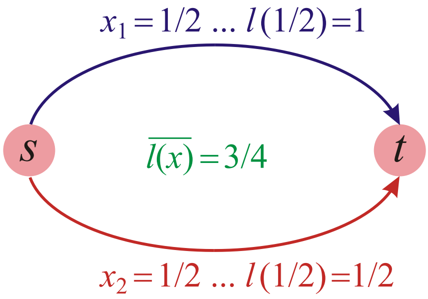
Ponaučení: sobecké chování nezávislých nespolupracujících jedinců nevede nutně ke společensky optimálnímu výsledku.

Kolikrát horší je tento výsledek?

Rovnovážné strategie:



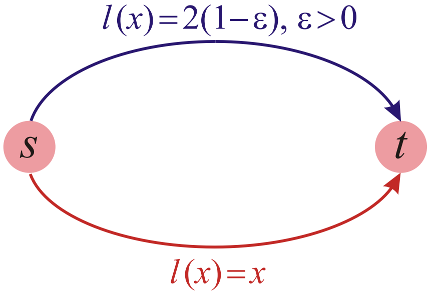
Společenské optimum:

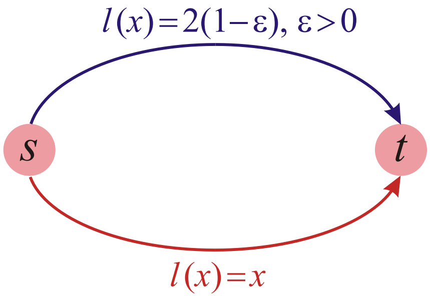


Ponaučení: sobecké chování nezávislých nespolupracujících jedinců nevede nutně ke společensky optimálnímu výsledku.

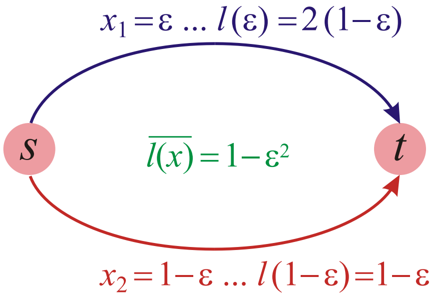
Kolikrát horší je tento výsledek?

Jak nespravedlivé je společenské optimum?

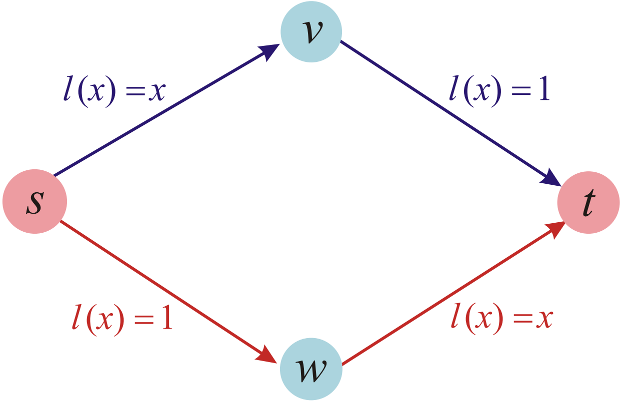

$l(x)=2(1-\varepsilon),\ \varepsilon>0$
s
t
$l(x)=x$



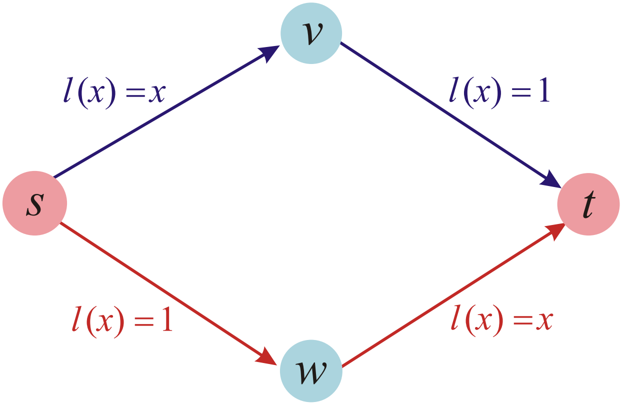
Společenské optimum: $x_2^2+2(1-\varepsilon)(1-x_2)\ \rightarrow$ min



Braess, 1968



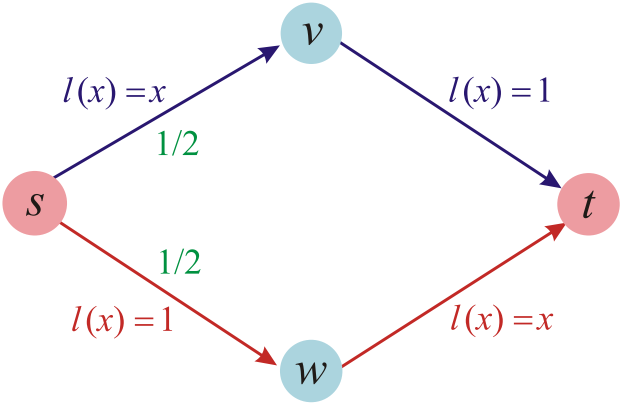
Braess, 1968



Společenské optimum:

$$x_1^2 + 1 \cdot x_1 + (1 - x_1) \cdot 1 + (1 - x_2)^2 \;\longrightarrow\; \text{min}$$

Braess, 1968

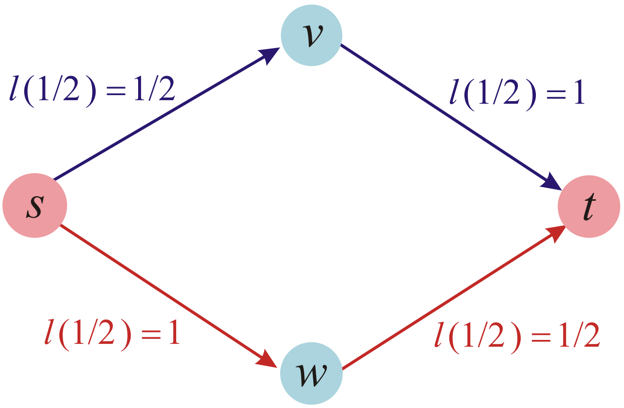


Společenské optimum:

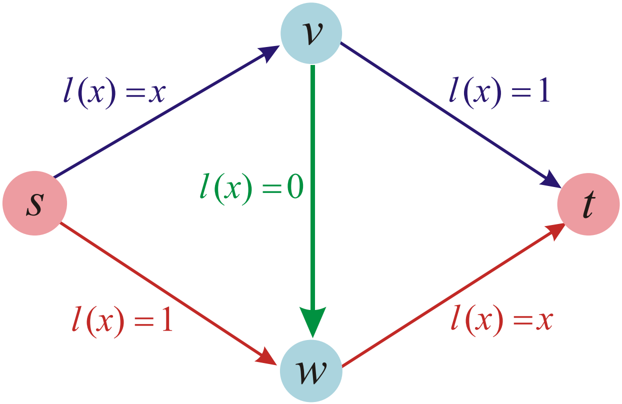
$$x_1^2 + 1 \cdot x_1 + (1 - x_1) \cdot 1 + (1 - x_2)^2 \;\rightarrow\; \text{min}$$

$$x_1 = 1/2$$

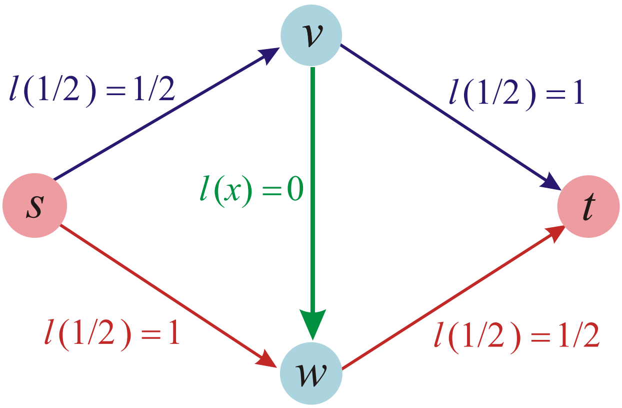
Braess, 1968



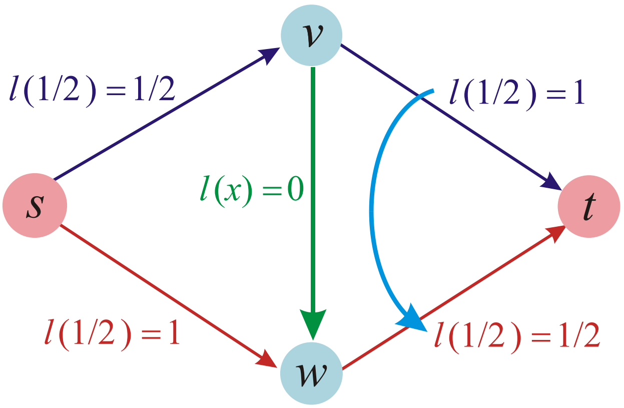
Braess, 1968



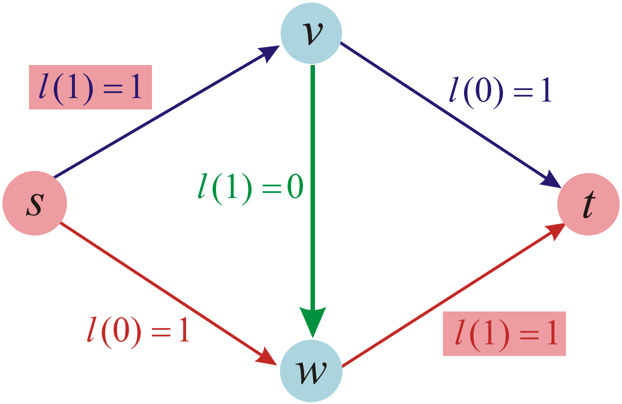
Braess, 1968



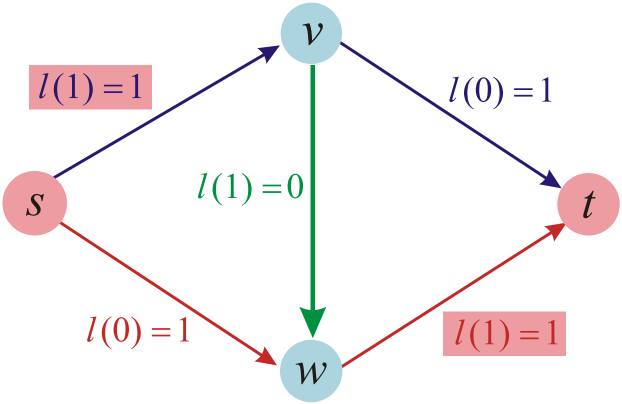
Braess, 1968



Braess, 1968



Braess, 1968



Intuitivně užitečné (nebo aspoň nevinné) jednání – přidání rychlé hrany – může mít negativní vliv na celou dopravu

Jak se vypořádat se sobectvím?

Jak se vypořádat se sobectvím?

- vhodný design sítě
- poplatky
- Stackelbergovské směrování

Jak se vypořádat se sobci?

- **vhodný design sítě**

  Víme-li, že síť budou užívat sobeční uživatelé, jak ji navrhnout, abychom minimalizovali rozdíl mezi rovnovážným stavem a stavem optimálním? Které hrany odstranit?
  Potíže: ne vždy je možné dosáhnout optima; výpočtová složitost pro rozsáhlejší sítě s nelineárními latencemi

- **poplatky**

- **Stackelbergovské směrování**

Jak se vypořádat se sobci?

- **vhodný design sítě**

  Víme-li, že síť budou užívat sobeční uživatelé, jak ji navrhnout, abychom minimalizovali rozdíl mezi rovnovážným stavem a stavem optimálním? Které hrany odstranit?
  Potíže: ne vždy je možné dosáhnout optima; výpočtová složitost pro rozsáhlejší sítě s nelineárními latencemi

- **poplatky**

- **Stackelbergovské směrování**

  Část dopravy řízená centrálně, část sobečtí jedinci

  Jak má být centrálně řízená doprava směrována, aby indukovala „dobré“ chování nekooperativních uživatelů, tj. aby jejich sobecká reakce minimalizovala celkovou latenci?

MODEL

$G = (V, E)$	....	orientovaná síť
V	....	množina vrcholů
E	....	množina hran
$s, t \in V$	....	vstup, výstup
$\mathcal{P}$	....	množina cest z s do t
$f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^+$	....	tok; $f_e := \sum_{P:e\in P} f_P$
r	....	objem dopravy z s do t
		přípustný tok: $\sum_{P\in\mathcal{P}} f_P = r$
$l_e(\cdot) : f_e \to \mathbb{R}_0^+$	....	funkce latence přiřazená hraně e
		nezáporná, spojitá, nerostoucí funkce
		latence cesty P: $l_P(f) = \sum_{e\in P} l_e(f_e)$
(G, r, l)	....	**situace**

Náklady toku $f :\ C(f) = \sum_{P\in\mathcal{P}} l_P(f) f_P$

Optimální tok: přípustný tok minimalizující $C(f)$

Rovnovážný tok (J. Nash, 1950):

Tok f přípustný pro (G, r, l) se nazývá **rovnovážným**, jestliže pro každé $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, kde $f_{P_1} > 0$, a každé $\delta \in (0, f_{P_1}\rangle$ platí: $l_{P_1}(f) \leq l_{P_2}(\tilde{f})$, kde

$$\tilde{f} = \begin{cases} f_P - \delta & \text{pro} \quad P = P_1, \\ f_P + \delta & \text{pro} \quad P = P_2, \\ f_P & \quad \text{pro} \quad P \notin \{P_1, P_2\}. \end{cases}$$

Rovnovážný tok (J. Nash, 1950):

Tok f přípustný pro (G, r, l) se nazývá **rovnovážným**, jestliže pro každé $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, kde $f_{P_1} > 0$, a každé $\delta \in (0, f_{P_1}\rangle$ platí: $l_{P_1}(f) \leq l_{P_2}(\tilde{f})$, kde

$$\tilde{f} = \begin{cases} f_P - \delta & \text{pro} \quad P = P_1, \\ f_P + \delta & \text{pro} \quad P = P_2, \\ f_P & \text{pro} \quad P \notin \{P_1, P_2\}. \end{cases}$$

Tvrzení (J. G. Wardrop, 1952):

Tok f přípustný pro (G, r, l) je **rovnovážný**, jestliže pro každé $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, kde $f_{P_1} > 0$, platí:

$$l_{P_1}(f) \leq l_{P_2}(f)$$

– tj. všechny cesty s nenulovou latencí mají stejnou latenci l_{PR}

[plyne ze spojitosti a monotonie latence]

Charakterizace optimálního toku

Předpoklad: $x \cdot l_e(x)$ je konvexní pro každou hranu $e \in E$

$$C(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} l_P(f) f_P = \sum_{e \in E} l_e(f_e) f_e$$

Mezní náklady:

$$\hat{l}_e(x) := \frac{d}{dx}(x \cdot l_e(x)) = l_e(x) + x \cdot l'_e(x)$$

Tvrzení:

Tok $\hat{f}$ přípustný pro (G, r, l) je optimální

$\Leftrightarrow$

tok $\hat{f}$ je rovnovážný pro $(G, r, \hat{l})$

[pro každé $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, kde $f_{P_1} > 0$, platí: $\hat{l}_{P_1}(f) \leq \hat{l}_{P_2}(f)$]

Existence a jednoznačnost rovnovážného toku:

Tvrzení:

Pro každou situaci (G, r, l) se spojitými nerostoucími funkcemi latence existuje rovnovážný tok. Jsou-li navíc $f, \tilde{f}$ dva rovnovážné toky, pak pro každou hranu $e \in E$ platí: $l_e(f_e) = l_e(\tilde{f}_e)$.

JAK ŠPATNÉ JE SOBECKÉ SMĚROVÁNÍ?

$$\textbf{Cena anarchie} = \frac{C(\textbf{rovnovážný tok})}{C(\textbf{optimální tok})}$$

Horní odhad:

Například pro polynomiální funkce latence stupně nejvýše p s nezápornými koeficienty:

$$CA = \frac{1}{1 - \dfrac{p}{(p+1)^{-\frac{p+1}{p}}}}$$

$[p = 1 \ldots\ CA = 4/3]$

JAK NESPRAVEDLIVÉ JE OPTIMÁLNÍ SMĚROVÁNÍ?

Nespravedlnost situace (G, r, l) :

$$u(G, r, l) = \max_{P \in \mathcal{P}} \left\{ \frac{l_P \text{ při optimálním toku}}{l_{PR} \text{ při rovnovážném toku}} \right\}$$

Tvrzení:
Je-li pro každou hranu $e \in E$ funkce $x \cdot l(x)$ konvexní, pak

$$u(G, r, l) \leq \sup_{x>0} \frac{\hat{l}(x)}{l(x)}.$$

Odhad:
Pro situace (G, r, l), kde jsou funkce latence polynomy stupně nejvýše p s nezápornými koeficienty, je $u(G, r, l) \leq p + 1.$

MEZE:

Základní předpoklady při aplikaci teorie kooperativních a nekooperativních her:

- ➥ **neomezená racionalita**
- ➥ **úplná informace**

MEZE:

Základní předpoklady při aplikaci teorie kooperativních a nekooperativních her:

- **neomezená racionalita**
  složité dopravní nebo počítačové sítě:
  omezené výpočetní možnosti
- **úplná informace**

MEZE:

Základní předpoklady při aplikaci teorie kooperativních a nekooperativních her:

- **neomezená racionalita**
  složité dopravní nebo počítačové sítě: omezené výpočetní možnosti
- **úplná informace**
  není vždy k dispozici úplná informace o povaze ostatních hráčů, o jejich možných strategiích a preferencích

MEZE:

Základní předpoklady při aplikaci teorie kooperativních a nekooperativních her:

- ➥ **neomezená racionalita**
  složité dopravní nebo počítačové sítě:
  omezené výpočetní možnosti
- ➥ **úplná informace**
  není vždy k dispozici úplná informace o povaze ostatních hráčů, o jejich možných strategiích a preferencích

⇝ **hráči se „učí" volit optimální strategie v opakovaných hrách**

MEZE:

Základní předpoklady při aplikaci teorie kooperativních a nekooperativních her:

- ➥ **neomezená racionalita**
  složité dopravní nebo počítačové sítě:
  omezené výpočetní možnosti
- ➥ **úplná informace**
  není vždy k dispozici úplná informace o povaze ostatních hráčů, o jejich možných strategiích a preferencích

⇝ **hráči se „učí“ volit optimální strategie v opakovaných hrách**

⇝ **EVOLUČNÍ TEORIE HER**

Evolučně stabilní strategie

Evolučně stabilní strategie = strategie, kterou – je-li přijata všemi členy populace – nemůže překonat žádná jiná v tom smyslu, že mutant, který by ji používal, by byl méně úspěšný v reprodukci.

☛ **Speciální případ:** populace s nekonečně mnoha členy, kteří se množí asexuálně a navzájem se střetávají vždy po dvojicích (tyto konflikty můžeme modelovat pomocí hry dvou hráčů v normálním tvaru s výplatními funkcemi u_1, u_2)

strategie I je evolučně stabilní, jestliže pro každou strategii $J \neq I$ platí:

$$u_1(I, I) > u_1(J, I)$$

nebo $u_1(I, I) = u_1(J, I)$ a zároveň $u_1(I, J) > u_1(J, J)$

I evolučně stabilní strategie $\Rightarrow (I, I)$ rovnovážný bod

$x(0)$ ... počáteční vektor populace

A ... matice hry

x_i ... část hráčů používajících strategii i

$(Ax^T)_i$ ... očekávaná výplata agenta hrajícího strategii i proti oponentovi náhodně vybranému z populace x

xAx^T ... průměrná výplata v populaci

$\lambda(x)$ ... funkce nabývající kladných hodnot

Začátek: Každému hráči je přiřazena ryzí strategie

$\rightsquigarrow$ V každém časovém okamžiku hráč hraje proti náhodně vybranému oponentovi, pozoruje svou a oponentovu výplatu, načež mění svou strategii s pravděpodobností úměrnou rozdílu výplat:

$$\frac{\dot{x}_i}{x_i} = \lambda(x) \cdot ((Ax^T)_i - xAx^T),$$

tj.

$$\dot{x}_i = \lambda(x) \cdot x_i \cdot ((Ax^T)_i - xAx^T),$$

$\lambda(x) = 1$ **... replikátorová dynamika**

Simon Fischer, Berthold Vöcking, 2005:

On the Evolution of Selfish Routing

Početná „populace agentů“ v síti, každý agent volí jednu z možných cest.

- **Dynamika sobeckého směrování**

$$\dot{x}_p = \lambda(x) \cdot x_p \cdot (\bar{l}(x) - l_p(x)),$$

Simon Fischer, Berthold Vöcking, 2005:

On the Evolution of Selfish Routing

Početná „populace agentů“ v síti, každý agent volí jednu z možných cest.

➥ **Dynamika sobeckého směrování**

$$\dot{x}_p = \lambda(x) \cdot x_p \cdot (\bar{l}(x) - l_p(x)),$$

➥ **Stabilita**
Strategie x se nazývá evolučně stabilní, je-li rovnovážná a pro každou nejlepší odpověď y na x platí: $x \cdot l(y) = y \cdot l(y)$.

Simon Fischer, Berthold Vöcking, 2005:

On the Evolution of Selfish Routing

Početná „populace agentů“ v síti, každý agent volí jednu z možných cest.

- **Dynamika sobeckého směrování**

$$\dot{x}_p = \lambda(x) \cdot x_p \cdot (\bar{l}(x) - l_p(x)),$$

- **Stabilita**
  Strategie x se nazývá evolučně stabilní, je-li rovnovážná a pro každou nejlepší odpověď y na x platí: $x \cdot l(y) = y \cdot l(y)$.

- **Rychlost konvergence**
  Jak rychle systém dosáhne rovnovážného stavu nebo stavu blízkého

Ana L. C. Bazzan, 2005: *A Distributed Approach for Coordination of Traffic Signal Agents*

- **Potřeba funkční a prostorové decentralizace řízení městské dopravy** ⇐ omezení reálným časem, komunikačními možnostmi, nedokonalou „interoperativností“ HW

Ana L. C. Bazzan, 2005: *A Distributed Approach for Coordination of Traffic Signal Agents*

- **Potřeba funkční a prostorové decentralizace řízení městské dopravy** ⇐ omezení reálným časem, komunikačními možnostmi, nedokonalou „interoperativností“ HW
- **Model:** Křižovatky na dopravních tepnách = agenti, kteří se účastní dynamického procesu, kde jsou v úvahu brány nejen sobecké lokální, ale i globální cíle

Ana L. C. Bazzan, 2005: *A Distributed Approach for Coordination of Traffic Signal Agents*

- **Potřeba funkční a prostorové decentralizace řízení městské dopravy** ⇐ omezení reálným časem, komunikačními možnostmi, nedokonalou „interoperativností“ HW
- **Model:** Křižovatky na dopravních tepnách = agenti, kteří se účastní dynamického procesu, kde jsou v úvahu brány nejen sobecké lokální, ale i globální cíle
- **Agent** při plnění úkolů jedná nezávisle, shromažďuje a zpracovává data, plánuje, uskutečňuje plány, . . .

Ana L. C. Bazzan, 2005: *A Distributed Approach for Coordination of Traffic Signal Agents*

- **Potřeba funkční a prostorové decentralizace řízení městské dopravy** ⇐ omezení reálným časem, komunikačními možnostmi, nedokonalou „interoperativností“ HW
- **Model:** Křižovatky na dopravních tepnách = agenti, kteří se účastní dynamického procesu, kde jsou v úvahu brány nejen sobecké lokální, ale i globální cíle
- **Agent** při plnění úkolů jedná nezávisle, shromažďuje a zpracovává data, plánuje, uskutečňuje plány, . . .
- Každý agent má informace pouze o místní dopravní situaci (detektory)
- Omezená komunikace

Ana L. C. Bazzan, 2005: *A Distributed Approach for Coordination of Traffic Signal Agents*

- **Potřeba funkční a prostorové decentralizace řízení městské dopravy** ⇐ omezení reálným časem, komunikačními možnostmi, nedokonalou „interoperativností“ HW
- **Model:** Křižovatky na dopravních tepnách = agenti, kteří se účastní dynamického procesu, kde jsou v úvahu brány nejen sobecké lokální, ale i globální cíle
- **Agent** při plnění úkolů jedná nezávisle, shromažďuje a zpracovává data, plánuje, uskutečňuje plány, . . .
- Každý agent má informace pouze o místní dopravní situaci (detektory)
- Omezená komunikace
- **I bez centrální autority může systém dospět ke koordinaci – i když to bude trvat určitý čas**

MODEL:

Každý **agent** $i \in Q = \{1, 2, \ldots, n\}$ hraje hru G dvou hráčů proti každému agentu-sousedstvi $j \in N_i$; hráč n je „příroda“

Množina strategií agenta $i : A_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}\}$

Výplatní funkce: $u_i : \ A_1 \times \cdots \times A_n \to \mathbb{R}$

Smíšená strategie: $p_i = (p_{i,1}, \ldots, p_{i,k}, \ldots, p_{i,m}),$

$$p_{i,k} \geq 0, \quad p_{i,1} + \cdots + p_{i,m} = 1$$

S_i – množina všech smíšených strategií agenta i

$S = S_1 \times \cdots \times S_n$

Začátek: „příroda“ (dopravní tok) určí výplatní funkce všech agentů

V čase t agent i zvolí strategii a obdrží výplatu = součet výplat získaných v hrách s každým ze sousedů $\rightarrow$ v následujícím období aktualizuje strategii v závislosti na výplatě

Období změny stavu

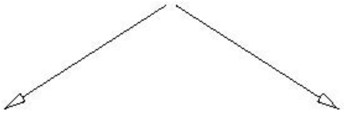
Lokální změna v čase $t = \rho$ na křižovatce i

$\Longrightarrow$ agent i aktualizuje smíšenou strategii p_i v závislosti na toku vozidel $q_{i,k}$ měřeném na každém z detektorů k :

$$p_{i,t} = (p_{i,1,t}, \dots, p_{i,m,t}) = \left[\frac{q_{i,1,t}}{\sum_k q_{i,k,t}}, \dots, \frac{q_{i,m,t}}{\sum_k q_{i,k,t}}\right]$$

Období výplat

Globální změna $\Longrightarrow$ změna výplatních funkcí



Q1

	s1	s2
s1	a1 / a1	c / c
s2	c / c	b1 / b1

Q2

	s1	s2
s1	a2 / a2	c / c
s2	c / c	b2 / b2

$$a_1 > b_1, c \quad b_1 > c, \qquad\qquad b_2 > a_2, c \quad a_2 > c,$$

Rovnovážné body: $(s_1, s_1),\ (s_2, s_2),\ (p_1, p_1),\ (p_2, p_2)$

$$p_1 = \left(\tfrac{b_1}{a_1+b_1}, \tfrac{a_1}{a_1+b_1}\right), \quad p_2 = \left(\tfrac{b_2}{a_2+b_2}, \tfrac{a_2}{a_2+b_2}\right)$$

Období učení

V těchto obdobích mají agenti čas na učení, jak měnit strategie, aby se zkoordinovali a směřovali ke globálnímu cíli (období nastávají náhodně s četností určenou pro daný model)

Aktualizace smíšených strategií:

$$p_i = \left(\frac{\pi_{i,1,\Delta}}{\sum_k \pi_{i,k,\Delta}}, \dots, \frac{\pi_{i,m,\Delta}}{\sum_k \pi_{i,k,\Delta}} \right), \qquad 1 \leq k \leq m, \quad a_{i,k} \in A_i$$

$$\pi_{i,k,t} = \lambda \cdot \pi^*_{i,k,t} + (1 - \lambda) \cdot \overline{\pi}_{i,k,\Delta}$$

λ – paměťový faktor, $0 < \lambda < 1$

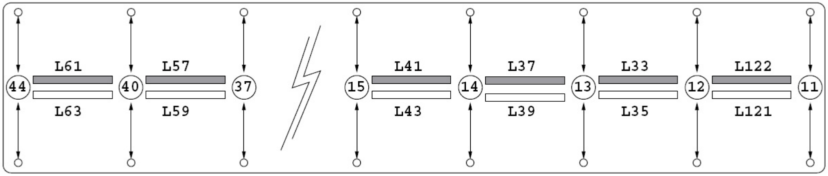
poslední období změny stavu před 0 . . . $t = \rho < 0$

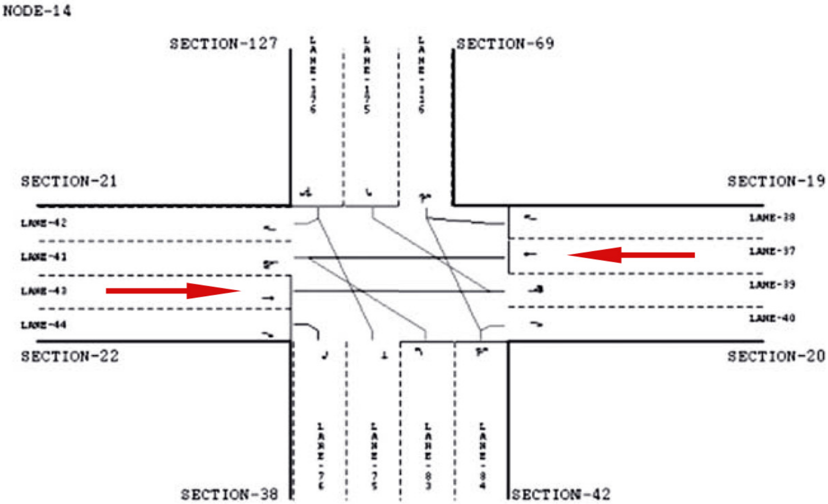
interval učení . . . $\Delta = (\delta, 0)$

výplata získaná jednáním $a_{i,k}$ před t . . . $\pi^*_{i,k,t}$

průměrná výplata získaná jednáním $a_{i,k}$ během Δ . . . $\overline{\pi}_{i,k,\Delta}$

Simulace


L61
L57
L41
L37
L33
L122
44
40
37
15
14
13
12
11
L63
L59
L43
L39
L35
L121


NODE-14
SECTION-127
LANE-376
LANE-375
LANE-325
SECTION-69
SECTION-21
SECTION-19
LANE-42
LANE-41
LANE-43
LANE-44
LANE-38
LANE-37
LANE-39
LANE-40
SECTION-22
SECTION-20
LANE-76
LANE-75
LANE-83
LANE-84
SECTION-38
SECTION-42

Agent 15

Agent 14

$$\begin{array}{c|ccc} & s_{PW} & & s_{PE} \\ \hline s_{PW} & \mathbf{(2,2)} & \leftarrow & (0,0) \\ & \uparrow & & \downarrow \\ s_{PE} & (0,0) & \rightarrow & \boxed{(1,1)} \end{array}$$

Agent 15

Agent 14

$$\begin{array}{c|ccc} & s_{PW} & & s_{PE} \\ \hline s_{PW} & \boxed{\mathbf{(1,1)}} & \leftarrow & (0,0) \\ & \uparrow & & \downarrow \\ s_{PE} & (0,0) & \rightarrow & (2,2) \end{array}$$

Experiment A

Výplatní funkce odrážejí globální cíle

sledování závislosti na četnosti intervalů učení

stacionární stav dosažen ve většině simulovaných situací, uspokojivý čas

Experiment B

Výplatní funkce odrážejí jen lokální cíle

čas potřebný k dosažení stejných výsledků je delší než v A

Experiment C

Komunikace a přenos informací mezi sousedy

Čas potřebný k dosažení koordinace je delší než bez komunikace

Srovnání s centrálním řízením dopravy

centrální řízení vede k lepším výsledkům v případech, kdy tok vozidel je v jednom směru výrazně vyšší než v druhém

Srovnání s centrálním řízením dopravy

centrální řízení vede k lepším výsledkům v případech, kdy tok vozidel je v jednom směru výrazně vyšší než v druhém

jinak vítězí navržený decentralizovaný systém

12 HRY S NEÚPLNOU INFORMACÍ

Ne v každé hře mají všichni hráči úplné informace o výplatních funkcích ostatních. Ve skutečnosti je většina situací s informací **neúplnou**. Například:

- V aukcích zpravidla jednotliví dražitelé neznají hodnocení všech dražených položek všemi ostatními dražiteli
- Při přijímání nových zaměstnanců zaměstnavatel nezná schopnosti uchazečů o zaměstnání
- V Cournotově modelu oligopolu nemusejí jednotliví oligopolisté znát nákladové struktury ostatních oligopolistů
- Postoje jednotlivých hráčů k riziku nemusí být všeobecně známé

Nyní budeme uvažovat hry, v nichž někteří hráči neznají hodnoty výplatních funkcí některých ostatních hráčů, a těmto hrám budeme říkat **hry s neúplnou informací**.

☚ ***Příklad 1***:

Představme si, že na trhu působí Firma 1, která stojí před rozhodnutím, zda má otevřít další pobočku, a Firma 2, která zvažuje, zda má na tento trh vstoupit či nikoli. Obě firmy se rozhodují současně. Firma 2 neví přesně, jaké jsou náklady Firmy 1 na otevření nové pobočky; ví jen, že tyto náklady mohou být buď vysoké ve výši 3 milionů nebo nízké – uvažujme nejprve, že nulové. Hodnoty výplatní funkce Firmy 2 nezávisejí přímo na uvedených nákladech, ale na tom, jestli Firma 1 novou pobočku otevře či nikoli.

Výplatní funkce jsou následující:

Pro vysoké náklady:

		Firma 2		
	Strategie	Vstoupit		Nevstoupit
	Otevřít	$(\mathbf{0}, -1)$	→	$(2, 0)$
Firma 1		↓		↓
	Neotevřít	$\boxed{(2, 1)}$	←	$(3, 0)$

Pro vysoké náklady:

Firma 2

	Strategie	Vstoupit		Nevstoupit
Firma 1	Otevřít	$(\mathbf{0}, -1)$	→	$(2, 0)$
		↓		↓
	Neotevřít	$\boxed{(2, 1)}$	←	$(3, 0)$

Pro nízké náklady:

Firma 2

	Strategie	Vstoupit		Nevstoupit
Firma 1	Otevřít	$(\mathbf{3}, -1)$	→	$\boxed{(5, 0)}$
		↑		↑
	Neotevřít	$(2, 1)$	←	$(3, 0)$

Je zřejmé, že Firma 1 novou pobočku otevře jen tehdy, když budou náklady nízké. Předpokládejme, že Firma 1 má soukromé informace o nákladech na otevření nové pobočky, Firma 2 nikoli a jednotlivým situacím může jen přiřadit určitou apriorní pravděpodobnost; označme pravděpodobnost, kterou Firma 2 přiřadí situaci, kdy jsou náklady vysoké, jako $p \in [0, 1]$; pravděpodobnost nízkých nákladů je pak $1 - p$.

Z hlediska Firmy 2 se tedy jedná o loterii: s pravděpodobností p jsou výplatní funkce dány první dvojmaticí a Firma 1 na trh nevstoupí, s pravděpodobností $1 - p$ jsou výplatní funkce dány druhou dvojmaticí a Firma 2 na trh vstoupí.

Jestliže Firma 2 na trh vstoupí, pak s pravděpodobností p bude její výplatní funkce 1 mil. a s pravděpodobností $1-p$ to bude -1 mil.; očekávaná hodnota výplaty je tedy $p - (1 - p) = 2p - 1$.

Jestliže Firma 2 na trh nevstoupí, pak bude její výplatní funkce v každém případě nulová.

Firmě 2 se tedy vyplatí vstoupit na trh právě tehdy, když

$2p - 1 > 0$, tj. pro $p > \frac{1}{2}$.

Příklad 2:

Nyní předpokládejme, že nízké náklady nejsou nulové, ale jsou rovny $3/2$ mil. Hodnoty výplatních funkcí pro nízké náklady nyní budou následující:

Firma 2

	Strategie	Vstoupit		Nevstoupit
	Otevřít	$(\frac{3}{2}, -1)$	→	$\boxed{(\frac{7}{2}, 0)}$
Firma 1		↓		↑
	Neotevřít	$\boxed{(2, 1)}$	←	$(3, 0)$

Optimální strategie Firmy 1 nyní závisí na odhadu, co bude dělat Firma 2. Označme pravděpodobnost, kterou Firma 1 přiřadí skutečnosti, že Firma 2 vstoupí na trh, jako $q \in [0, 1]$. Firmě 1 se pak vyplatí otevřít novou pobočku, bude-li

$$\frac{3}{2}q + \frac{7}{2}(1 - q) > 2q + 3(1 - q), \quad \text{tj. } q < \frac{1}{2}.$$

Firma 1 se tedy musí pokusit odhadnout chování Firmy 2, aby mohla vybrat svou vlastní strategii. Celkem tedy máme:

Firma 1

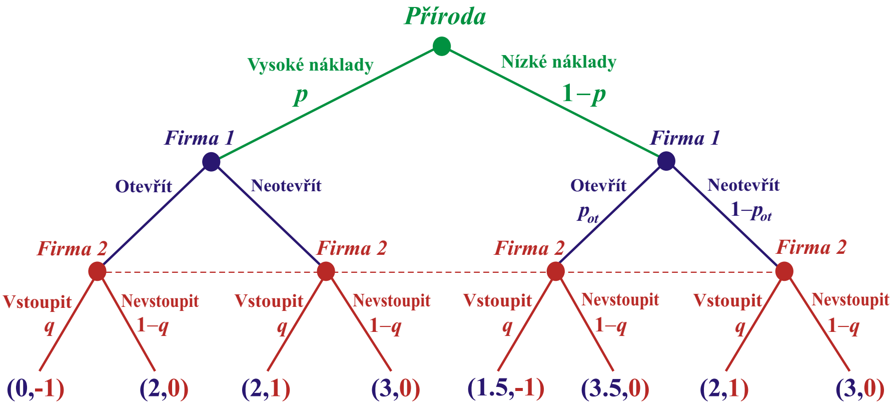
- při vysokých nákladech novou pobočku neotevře
- při nízkých nákladech
  - otevře novou pobočku, jestliže $q < \frac{1}{2}$
  - neotevře novou pobočku, jestliže $q > \frac{1}{2}$

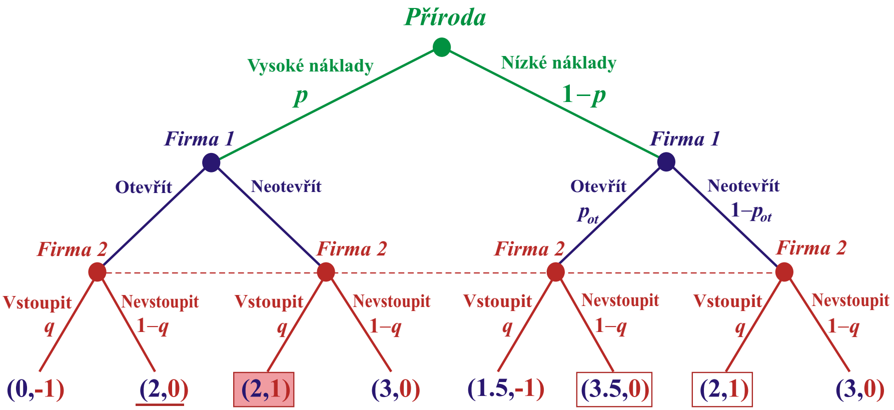
Firma 2

- $q = 1$, jestliže $p > \frac{1}{2}$
- $q = 0$, jestliže $p < \frac{1}{2}$
- $q \in (0, 1)$, jestliže $p = \frac{1}{2}$

Bayesovská hra

John Charles Harsanyi, 1967–68: Při modelování této situace si představíme ještě jednoho hráče – přírodu, která bude hrát jako první a rozhodne o ”typu” Firmy 1, tj. o tom, zda budou náklady nízké nebo vysoké.





Obecně se uvažuje apriorní tah fiktivního hráče nazývaného Příroda, který určuje ”typ” každého hráče (v našem příkladu to byly náklady na otevření nové pobočky).

Obvykle se předpokládá, že všichni hráči mají stejné apriorní názory na pravděpodobnostní rozdělení tahu Přírody. Přitom každý hráč zná svůj typ a všechny možné typy ostatních hráčů (spolu s příslušnými apriorními pravděpodobnostmi). Tím získáme hru s úplnou, ale nejistou informací.

Definice 1. Bayesovská hra H je určena:

- **Množinou hráčů** $Q = \{1, 2, \dots, N\}$
- **Množinou prostorů strategií** $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$; prvek prostoru S_k budeme značit s_k
- **Množinami prostorů typů hráčů** $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$; typ $t_i \in T_i$ odpovídá určité výplatní funkci, kterou může mít hráč i. Hráč i zná svůj typ, ale nezná typy ostatních hráčů
- **Množinou názorů hráčů** $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$; p_i představuje názor hráče i, který má o typech dalších hráčů
- **Množinou výplatních funkcí všech hráčů**

$$\{f_1(s_1, \dots s_N, t_1, \dots, t_N), \dots f_N(s_1, \dots s_N, t_1, \dots, t_N)\}$$

Definice 2. Rozšířená hra H* : (hra s nejistou informací)

- **Množina hráčů** $Q^* = \{1, 2, \ldots, M\}$,
  kde $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

  hráč $j = (i, t_i)$
- **Prostory strategií** $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_M\}$
- **Výplatní funkce všech hráčů**

$$\{g_1(y_1, \ldots, y_M), \ldots g_M(y_1, \ldots, y_M)\}$$

  jejich hodnoty jsou počítány jako očekávané hodnoty při daném apriorním rozdělení pravděpodobností

Definice 3. Bayesova-Nashova rovnováha ve hře H s neúplnou informací je Nashova rovnováha ve hře H^* s nejistou informací, která je reprezentací původní hry H.

Věta 1. *Každá konečná hra s neúplnou informací má alespoň jedno Bayesovo-Nashovo rovnovážné řešení.*

☛ *Příklad 2* – dokončení

Označme VN – vysoké náklady, NN – nízké náklady, OT – otevřít novou pobočku, NEOT – neotevřít novou pobočku, VST – vstoupit na trh, NEVST – nevstoupit na trh, Z – zvažovat vstup

H: Hráči a typy: $Q = \{1, 2\},\ T_1 = \{\text{VN, NN}\},\ T_2 = \{\text{Z}\}$

Strategie: $S_1 = \{\text{OT, NEOT}\},\ S_2 = \{\text{VST, NEVST}\}$

Názory a výplatní funkce: $p(\text{VN}) = p,\ p(\text{NN}) = 1 - p$

$f_1(s_1, s_2, \text{VN}),\ f_1(s_1, s_2, \text{NN}),\ f_2(s_1, s_2, \text{VN}),\ f_2(s_1, s_2, \text{NN})$

H* : Hráči a typy: $Q^* = \{1, 2, 3\} = \{(1, \text{VN}), (1, \text{NN}), (2, \text{Z})\}$

Strategie:

$Y_1 = Y_2 = S_1 = \{\text{OT, NEOT}\},\ Y_3 = S_2 = \{\text{VST, NEVST}\}$

Názory a výplatní funkce:

$$g_1(y_1, y_2, y_3) = f_1(s_1, s_2, \text{VN})$$
$$g_2(y_1, y_2, y_3) = f_1(s_1, s_2, \text{NN})$$
$$g_3(y_1, y_2, y_3) = pf_2(s_1, s_2, \text{VN}) + (1 - p)f_2(s_1, s_2, \text{NN})$$

Označme:

p_{ot} – pravděpodobnost, že hráč (1,NN) otevře novou pobočku,

q – pravděpodobnost, že hráč (2,Z) vstoupí na trh (zároveň smíšená strategie hráče (2,Z))

Hledání rovnovážného bodu:

$\boxed{(1, \textbf{VN})}$**: dominující strategie NEOT (neotevřít)**

(2,Z)

(1,VN)

$$\begin{array}{c|ccc}
\text{Strategie} & \text{Vstoupit} & & \text{Nevstoupit} \\ \hline
\text{Otevřít} & \mathbf{(0,} -1\mathbf{)} & \rightarrow & (2, 0) \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
\text{Neotevřít} & \boxed{(2, 1)} & \leftarrow & (3, 0)
\end{array}$$

$\boxed{(1,\textbf{NN})\textbf{:}}$

(2,Z)

	Strategie	VST (q)		NEVST $(1-q)$
(1,NN)	OT (p_{ot})	$(\frac{3}{2}, -1)$	$\rightarrow$	$\boxed{(\frac{7}{2}, 0)}$
		$\downarrow$		$\uparrow$
	NEOT $(1-p_{ot})$	$\boxed{(2, 1)}$	$\leftarrow$	$(3, 0)$

$p_{ot} = 1 \ldots$ očekávaná výhra: $\pi_2(1,q) = \frac{3}{2}q + \frac{7}{2}(1-q) = \frac{7}{2} - 2q$

$p_{ot} = 0 \ldots$ očekávaná výhra: $\pi_2(0,q) = 2q + 3(1-q) = 3 - q$

$\pi_2(1,q) = \pi_2(0,q) \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$

Nejlepší odezva:

$$p_{ot} = R_2(q) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad 0 \leq q < \frac{1}{2} \\ \langle 0, 1 \rangle & \text{pro} \quad q = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pro} \quad \frac{1}{2} < q \leq 1 \end{cases}$$

$\boxed{(2,\textbf{Z})\textbf{:}}$

(2,Z)

(1,NN)

$$\begin{array}{c|ccc} \text{Strategie} & \text{VST } (q) & & \text{NEVST } (1-q) \\ \hline \text{OT } (p_{ot}) & (\frac{3}{2}, -1) & \rightarrow & \boxed{(\frac{7}{2}, 0)} \\ & \downarrow & & \uparrow \\ \text{NEOT } (1-p_{ot}) & \boxed{(2, 1)} & \leftarrow & (3, 0) \end{array}$$

očekávaná výhra pro VST:

$$\pi_3(p, p_{ot}) = p \cdot 1 + (1-p)[p_{ot} \cdot (-1) + (1-p_{ot}) \cdot 1] = 1 - 2p_{ot}(1-p)$$

očekávaná výhra pro NEVST: $\pi_3(p, p_{ot}) = 0$

$$1 - 2p_{ot}(1-p) = 0 \Leftrightarrow p_{ot} = \frac{1}{2(1-p)}$$

Nejlepší odezva:

$$q = R_3(p_{ot}) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad 0 \le p_{ot} < \frac{1}{2(1-p)} \\ \langle 0, 1 \rangle & \text{pro} \quad p_{ot} = \frac{1}{2(1-p)} \\ 0 & \text{pro} \quad \frac{1}{2(1-p)} < p_{ot} \le 1 \end{cases}$$

Rovnovážné strategie:

$p < \frac{1}{2}$: (NEOT, NEOT, VST), (NEOT, OT, NEVST)

(NEOT, OT s pravděpodobností $\frac{1}{2(1-p)}$, VST s pravděpodobností $\frac{1}{2}$)

Neboli

$$(0,0,1),\ (0,1,0),\ (0,\frac{1}{2(1-p)},\frac{1}{2})$$

$p > \frac{1}{2}$: (NEOT, NEOT, VST), neboli $(0,0,1)$