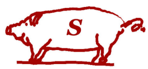
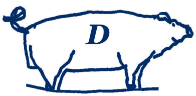
4 DVOJMATICOVÉ HRY





Strategie	Stiskni páku		Seď u koryta
Stiskni páku	$(8, -2)$	$\rightarrow$	$\boxed{(5, 3)}$
Seď u koryta	$(10, -2)$	$\rightarrow$	$(0, 0)$

DVOJMATICOVÁ HRA

Je-li speciálně množina hráčů $Q = \{1, 2\}$ a prostory strategií S_1, S_2 jsou konečné množiny, hovoříme o **dvojmaticové hře**. Přestože se jedná jen o speciální případ, uvádíme zde základní definice z předchozí části znovu.

Definice 1. Dvojmaticovou hrou budeme rozumět hru dvou hráčů v normálním tvaru, kde

- Hráč 1 má konečnou množinu strategií $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$
- Hráč 2 má konečnou množinu strategií $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$
- Při volbě strategií (s_i, t_j) je výhra prvního hráče $a_{ij} = u_1(s_i, t_j)$ a výhra druhého hráče $b_{ij} = u_2(s_i, t_j)$; u_1, u_2 se nazývají **výplatní funkce**.

Hráč 2

	Strategie	t_1	t_2	$\dots$	t_n
	s_1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	$\dots$	(a_{1n}, b_{1n})
Hráč 1	s_2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	$\dots$	(a_{2n}, b_{2n})
	$\vdots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$
	s_m	(a_{m1}, b_{m1})	(a_{m2}, b_{m2})	$\dots$	(a_{mn}, b_{mn})

Hodnoty výplatních funkcí můžeme znázornit zvlášť pro jednotlivé hráče:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matice A se nazývá **matice hry hráče 1**, matice B se nazývá **matice hry hráče 2**.

Definice 2. Dvojice strategií (s^*, t^*) se nazývá **rovnovážný bod**, právě když platí:

$$u_1(s, t^*) \le u_1(s^*, t^*) \qquad \text{pro každé } s \in S$$

a zároveň (4.1)

$$u_2(s^*, t) \le u_2(s^*, t^*) \qquad \text{pro každé } t \in T.$$

Snadno se ověří, že je-li (s^*, t^*) rovnovážný bod, pak pro $a_{ij} = u_1(s^*, t^*)$, $b_{ij} = u_2(s^*, t^*)$ platí:

- a_{ij} je **největší prvek ve sloupci** j matice $A : a_{ij} = \max\limits_{1 \le k \le m} a_{kj}$
- b_{ij} je **největší prvek v řádku** i matice $B : b_{ij} = \max\limits_{1 \le k \le m} b_{kj}$

☛ ***Příklad 1***. Uvažujme hru určenou dvojmaticí:

		Hráč 2	
	Strategie	t_1	t_2
Hráč 1	s_1	$\boxed{\mathbf{(2,0)}}$	$(2,-1)$
	s_2	$(1,1)$	$(3,-2)$

Bod (s_1, t_1) je zřejmě rovnovážný, protože pokud by druhý hráč zvolil svou první strategii t_1 a první hráč se od strategie s_1 odchýlil, tj. zvolil by strategii s_2, pak by si nepolepšil: získal by 1 místo 2. Pokud by naopak první hráč zvolil strategii s_1 a druhý hráč se od t_1 odchýlil, pak by si nepolepšil: obdržel by -1 místo 0.

Bohužel, ne v každé hře existuje rovnovážný bod přímo v ryzích strategiích:

☛ ***Příklad 2***. Uvažujme hru určenou dvojmaticí:

Hráč 2

Hráč 1	Strategie	t_1	t_2
	s_1	$(1,-1)$	$(-1,1)$
	s_2	$(-1,1)$	$(1,-1)$

Žádný bod v této hře není rovnovážný (prověřte jednotlivé dvojice).

Tento problém odstraní tzv. **smíšené strategie**, které udávají **pravděpodobnosti**, s nimiž hráči volí své jednotlivé ryzí strategie, tj. prvky množin S, T.

Definice 3. Smíšené strategie hráčů 1 a 2 jsou vektory pravděpodobností $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$, pro které platí:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= (p_1, p_2, \dots p_m); \quad p_i \geq 0, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1, \\ \boldsymbol{q} &= (q_1, q_2, \dots q_n); \quad q_i \geq 0, \quad q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Smíšená strategie je tedy pro každého hráče vektor, jehož i-tá složka udává pravděpodobnost, s níž hráč volí i-tou strategii ze svého prostoru strategií. Je to tedy opět jistá strategie, kterou bychom mohli pro prvního hráče popsat takto:

„použij strategii $s_1 \in S$ s pravděpodobností p_1,
. . . . . .
použij strategii $s_m \in S$ s pravděpodobností p_m.“

Podobně pro druhého hráče.

Uvědomme si, že ryzí strategie odpovídají smíšeným strategiím

$$(1, 0, \dots, 0), \ (0, 1, \dots, 0), \ \dots \ (0, 0, \dots, 1).$$

Strategie	t_1	$\dots$	t_j	$\dots$	t_n	
s_1	(a_{11}, b_{11})	$\dots$	(a_{1j}, b_{1j})	$\dots$	(a_{1n}, b_{1n})	p_1
$\vdots$	$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$					
s_i	(a_{i1}, b_{i1})	$\dots$	(a_{ij}, b_{ij})	$\dots$	(a_{in}, b_{in})	p_i
$\vdots$	$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$					
s_m	(a_{m1}, b_{m1})	$\dots$	(a_{mj}, b_{mj})	$\dots$	(a_{mn}, b_{mn})	p_m
	q_1	$\dots$	q_j	$\dots$	q_n	

Definice 4. Očekávané hodnoty výhry jsou definovány vztahy:

$$
\begin{aligned}
&\text{Hráč 1:} \qquad \pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij} \\
&\text{Hráč 2:} \qquad \pi_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j b_{ij}
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Věta 1 (Nash). *Ve smíšených strategiích má každá konečná hra aspoň jeden rovnovážný bod* $(p^*, \boldsymbol{q}^*)$, *tj. pro všechny smíšené strategie* $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ *platí následující nerovnosti:*

$$\pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}^*) \leq \pi_1(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) \qquad \text{a} \qquad \pi_2(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}) \leq \pi_2(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*).$$

Důkaz.

Pro libovolnou dvojici smíšených strategií $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ definujme

$$p_i' = \frac{p_i + c_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})}{1 + \sum_k c_k(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})}, \qquad q_j' = \frac{q_j + d_j(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})}{1 + \sum_k d_k(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})},$$

kde

$$c_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \max\{\pi_1(s_i, \boldsymbol{q}) - \pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), 0\}, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$d_j(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \max\{\pi_2(\boldsymbol{p}, t_j) - \pi_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), 0\}, \quad j = 1, \ldots, n$$

Zřejmě platí:
$\sum_k p_i' = 1$, $p_i' \geq 0$ pro všechna i; $\sum_k q_j' = 1$, $q_j' \geq 0$ všechna j.

$T(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}')$:

$$p_i' = \frac{p_i + c_i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}{1+\sum_k c_k(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}, \qquad q_j' = \frac{q_j + d_j(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}{1+\sum_k d_k(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})},$$

kde

$$c_i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \max\{\pi_1(s_i,\boldsymbol{q}) - \pi_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}), 0\}, \quad i = 1,\ldots,m$$

$$d_j(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \max\{\pi_2(\boldsymbol{p},t_j) - \pi_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}), 0\}, \quad j = 1,\ldots,n$$

$$T : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]\times[0,1].$$

Dokážeme:

$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ **je rovnovážný bod** $\Leftrightarrow T(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$

$\Longrightarrow$

$\boldsymbol{p}$ je rovnovážná strategie $\Rightarrow \forall i : c_i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}$

$\boldsymbol{q}$ je rovnovážná strategie $\Rightarrow \forall j : d_j(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{q}' = \boldsymbol{q}$

$\Longleftarrow$ Předpokládejme, že (p, q) je pevný bod zobrazení T.

Ukážeme:

$$\exists i : p_i > 0, \quad c_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \max\{\pi_1(s_i, \boldsymbol{q}) - \pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), 0\} = 0.$$

Sporem:

Jestliže $\forall i$, kde $p_i > 0$, platí $\pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) < \pi_1(s_i, \boldsymbol{q})$, pak

$$\sum_i p_i \pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) < \sum_i p_i \pi_1(s_i, \boldsymbol{q}), \text{ tj.}$$

$$\pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) < \sum_i p_i \pi_1(s_i, \boldsymbol{q}),$$

ale z definice očekávané výplaty plyne

$$\pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_i p_i \pi_1(s_i, \boldsymbol{q}).$$

Proto musí existovat takové i, že $\pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \geq \pi_1(s_i, \boldsymbol{q})$, a tedy $c_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 0$.

$\Longleftarrow$ **Předpokládejme, že (p, q) je pevný bod T.**

Již jsme ukázali:

$$\exists i : p_i > 0, \quad c_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \max\{\pi_1(s_i, \boldsymbol{q}) - \pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), 0\} = 0.$$

Pro toto i je

$$p_i' = \frac{p_i + 0}{1 + \sum_k c_k(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})}$$

$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ pevný bod $\Rightarrow \; p_i' = p_i \;\Rightarrow \sum_k c_k(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 0.$

$$\forall k : c_k \geq 0 \Rightarrow \forall k : c_k = 0$$

$$\Rightarrow \forall k : \pi_1(s_k, \boldsymbol{q}) \leq \pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{p}$ **je rovnovážná strategie**

Podobně: $\boldsymbol{q}$ **je rovnovážná strategie**

$\Longleftarrow$ **Předpokládejme, že (p, q) je pevný bod T.**

Již jsme ukázali:

$$\exists i : p_i > 0, \quad c_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \max\{\pi_1(s_i, \boldsymbol{q}) - \pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), 0\} = 0.$$

Pro toto i je

$$p_i' = \frac{p_i + 0}{1 + \sum_k c_k(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})}$$

$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ pevný bod $\Rightarrow \; p_i' = p_i \; \Rightarrow \sum_k c_k(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 0.$

$$\forall k : c_k \geq 0 \Rightarrow \forall k : c_k = 0$$

$$\Rightarrow \forall k : \pi_1(s_k, \boldsymbol{q}) \leq \pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{p}$ **je rovnovážná strategie**

Podobně: $\boldsymbol{q}$ **je rovnovážná strategie**

Poslední krok: **Dokázat existenci pevného bodu.**

$\longrightarrow$ **Brouwerova věta o pevném bodě**

Hledání rovnovážných strategií

Při hledání rovnovážných strategií lze u dvojmaticových her v některých případech eliminovat zjevně nevýhodné, tzv. dominované strategie:

Definice 5. Strategie $s_i \in S$ hráče 1 se nazývá **dominovaná** jinou strategií $s_k \in S$, jestliže pro každou strategii $t \in T$ hráče 2 platí:

$$u_1(s_k, t) \geq u_1(s_i, t);$$

Analogicky pro druhého hráče.

Postupná eliminace dominovaných strategií

V některých případech existují v dvojmatici dominované strategie. Zbude-li po jejich vyškrtání v dvojmatici jediný prvek, jedná se o rovnovážný bod. Zbude-li více prvků, získali jsme alespoň jednodušší dvojmatici.

☛ ***Příklad 3***. Uvažujme dvojmaticovou hru určenou dvojmaticí:

		Hráč 2		
	Strategie	t_1	t_2	t_3
	s_1	$(1,0)$	$(1,3)$	$(3,0)$
Hráč 1	s_2	$(0,2)$	$(0,1)$	$(3,0)$
	s_3	$(0,2)$	$(2,4)$	$(5,3)$

Strategie s_2 prvního hráče je dominovaná strategií s_3, neboť pro každou strategii druhého hráče získá první hráč více při volbě strategie s_3 než při volbě s_2. Stejně tak je strategie t_3 druhého hráče dominována strategií t_2. Protože racionální hráč 1 určitě nebude volit dominovanou strategii s_2 a racionální hráč 2 určitě nebude volit dominovanou strategii t_3, zredukovalo se rozhodování takto:

		Hráč 2	
	Strategie	t_1	t_2
Hráč 1	s_1	$(1,0)$	$(1,3)$
	s_3	$(0,2)$	$\boxed{(2,4)}$

Strategie t_1 je dominovaná strategií t_2, druhý hráč tedy zvolí t_2. První hráč se nyní rozhoduje mezi hodnotami ve druhém sloupci dvojmatice, a protože $1 < 2$, zvolí strategii s_3. Rovnovážný bod v dané hře je proto (s_3, t_2) – rozmyslete si, že v původní dvojmatici skutečně jednostranné odchýlení od rovnovážné strategie nepřinese výhodu tomu, kdo se odchýlil.

Příklad 4. Investor chce vybudovat dva hotely. Jeden nazveme Velký (zkratka V); ze získání zakázky na něj se očekává zisk ve výši 15 milionů. Druhý nazveme Malý (zkratka M); ze získání zakázky na něj se očekává zisk ve výši 9 milionů. O získání zakázek se ucházejí dvě firmy, které označíme jako 1 a 2. Žádná z firem nemá kapacitní možnosti na vybudování obou hotelů v plném rozsahu. Každá z firem se může u investora ucházet buď o stavbu jednoho z hotelů nebo nabídnout kooperaci na obou. Investor musí prostřednictvím obou firem stavbu hotelů realizovat a podle došlých nabídek rozdělí zakázky takto:

1. Jestliže se o jeden hotel uchází pouze jedna firma, získá celou tuto zakázku.
2. Jestliže se o jeden hotel ucházejí obě firmy a o druhý žádná, nabídne investor kooperaci oběma firmám na obou hotelech s tím, že se o provedení prací i o zisky budou dělit stejným dílem.
3. Jestliže se jedna z firem uchází o stavbu celého hotelu a druhá nabízí kooperaci na obou, získá firma, která nabízí realizaci celé stavby 60% a druhá 40%, jde-li o V. Jde-li o M, získá firma, která nabízí celou realizaci, 80% a druhá 20%. Na zbývajícím hotelu pak firmy kooperují stejným dílem a o zisk se dělí napůl.

Ať se firmy rozhodnou jakkoli, bude mezi ně vždy rozdělen celý potenciální zisk 15+9=24 milionů. Jaké nabídky je výhodné investorovi učinit, aby byl maximalizován celkový zisk ze zakázek?

Řešení

Výsledky při jednotlivých volbách strategií lze vystihnout pomocí dvojmatice:

	Firma 2			
	Strategie	Velký	Malý	Kooperace
	Velký	$\boxed{(12,12)}$	$(15,9)$	$(13,5;10,5)$
Firma 1	Malý	$(9,15)$	$(12,12)$	$(14,7;9,3)$
	Kooperace	$(10,5;13,5)$	$(9,3;14,7)$	$(12,12)$

Strategie „kooperace“ je pro obě firmy dominovaná strategií „velký“, můžeme proto vyškrtnout třetí řádek a třetí sloupec – pro firmu je výhodnější v každé situaci, ať už se protivník zachová jakkoli, zvolit první strategii. K rozhodování nyní zbývá pouze dvojmatice se dvěma řádky a dvěma sloupci (strategie „velký“ a „malý“). Zde je strategie „malý“ dominovaná strategií „velký“ a může být proto také vyškrtnuta. Pro obě firmy tak zbyde strategie „velký“ – skutečně lze snadno ověřit, že se jedná o rovnovážný bod.

Vzájemně nejlepší odpovědi

Rovnovážné strategie s^*, t^* tvořící rovnovážný bod (s^*, t^*) jsou podle definice vždy nejlepší odpovědí jedna na druhou v tom smyslu, že zvolí-li první hráč svou rovnovážnou strategii s^*, pak si druhý hráč odchýlením od t^* nemůže polepšit, podobně první si nemůže polepšit odchýlením od s^*, zvolí-li druhý strategii t^*.

Přesněji řečeno:

Definice 6. Nejlepší odpovědí hráče 1 na strategii t hráče 2 se rozumí množina

$$R_1(t) = \{s^* \in S;\ u_1(s^*, t) \geq u_1(s, t) \text{ pro každé } s \in S\}\,.$$

Podobně **nejlepší odpovědí hráče 2 na strategii s hráče 1** se rozumí množina

$$R_2(s) = \{t^* \in T;\ u_2(s, t^*) \geq u_2(s, t) \text{ pro každé } t \in T\}\,.$$

Má-li každý z hráčů na výběr pouze dvě strategie, představují množiny R_1 a R_2 křivky v rovině – tzv. **reakční křivky**.

Věta 2. *(s^*, t^*) je rovnovážný bod, právě když platí:*

$$s^* = R_1(t^*) \qquad \text{a zároveň} \qquad t^* = R_2(s^*).$$

Důkaz. Podle definice je $s^* = R_1(t^*)$ právě když pro každé $s \in S$ platí:

$$u_1(s^*, t^*) \geq u_1(s, t^*),$$

podobně $t^* = R_2(s^*)$ právě když pro každé $t \in T$ platí:

$$u_2(s^*, t^*) \geq u_1(s^*, t).$$

Dohromady tak získáme přesně podmínku pro rovnovážný bod.
$\square$

Hledáme-li rovnovážný bod, můžeme postupovat tak, že sestrojíme **reakční křivky** a nalezneme jejich **průsečík**.

☛ ***Příklad 5***. Pro hru

		Hráč 2	
	Strategie	t_1	t_2
Hráč 1	s_1	$\boxed{\mathbf{(2,0)}}$	$(2,-1)$
	s_2	$(1,1)$	$(3,-2)$

je nejlepší odpovědí hráče 1 na strategii t_1 hráče 2 strategie s_1, tj. $R_1(t_1) = s_1$, podobně nejlepší odpovědí hráče 1 na strategii t_2 je strategie s_2, tj. $R_1(t_2) = s_2$.

Podobně pro druhého hráče:

$$R_2(s_1) = t_1, \qquad R_2(s_2) = t_1.$$

Dvojici strategií, které jsou navzájem nejlepšími odpověďmi, se v tomto případě podaří nalézt: je to (s_1, t_1) a jak jsme viděli výše, jedná se o rovnovážný bod.

☞ ***Příklad 6***. Pro hru

		Hráč 2	
	Strategie	t_1	t_2
Hráč 1	s_1	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
	s_2	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

je

$$R_1(t_1) = s_1, \quad R_1(t_2) = s_2.$$

$$R_2(s_1) = t_2, \quad R_2(s_2) = t_1.$$

Žádná dvojice strategií není v tomto případě nejlepší odpovědí jedna na druhou a jak již bylo zmíněno, je třeba uvažovat smíšené strategie.

Hráč 2

Hráč 1

Strategie	t_1	t_2	
s_1	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$\ldots\ldots\ \boldsymbol{p}$
s_2	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$\ldots\ldots\ \boldsymbol{1-p}$
	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{1-q}$	

Očekávané hodnoty výhry jednotlivých hráčů jsou následující:

$$\begin{aligned}\pi_1(p,q) &= 1\cdot p\cdot q - 1\cdot p\cdot(1-q) - 1\cdot(1-p)\cdot q + 1\cdot(1-p)\cdot(1-q)\\ &= pq - p + pq - q + pq + 1 - p - q + pq = 4pq - 2p - 2q + 1\\ &= p(4q-2) - 2q + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2(p,q) &= -1\cdot p\cdot q + 1\cdot p\cdot(1-q) + 1\cdot(1-p)\cdot q - 1\cdot(1-p)\cdot(1-q)\\ &= -pq + p - pq + q - pq - 1 + p + q - pq = -4pq + 2q + 2p - 1\\ &= q(-4p+2) + 2p - 1\end{aligned}$$

Hledejme nejlepší odpovědi hráče 1 na různé hodnoty q :

Je-li $\boxed{0 \leq q < \frac{1}{2},}$ pak $\pi_1(p,q)$ je pro pevnou hodnotu q lineární funkce se zápornou směrnicí, která je **klesající**. Největší hodnoty proto bude nabývat pro nejmenší možnou hodnotu p, tedy pro $p = 0$; v tomto případě platí: $R_1(q) = 0$.

Je-li $\boxed{q = \frac{1}{2},}$ pak $\pi_1(p, \frac{1}{2}) = 0$ je **konstantní funkce**, pro kterou je každá hodnota zároveň největší i nejmenší – hráč 1 je proto indiferentní mezi oběma strategiemi, $R_1(\frac{1}{2}) = \langle 0, 1 \rangle$.

Je-li $\boxed{\frac{1}{2} < q \leq 1,}$ pak $\pi_1(p,q)$ je pro pevnou hodnotu q lineární funkce s kladnou směrnicí, která je **rostoucí**. Největší hodnoty proto bude nabývat pro největší možnou hodnotu p, tedy pro $p = 1$; v tomto případě platí: $R_1(q) = 1$.

Celkem tedy:

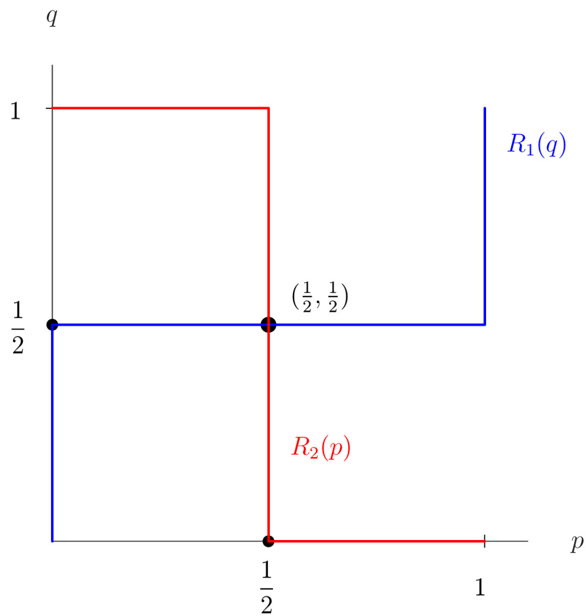
$$\pi_1(p,q) = p(4q-2) - 2q + 1, \qquad \pi_2(p,q) = q(-4p+2) + 2p - 1$$

$$R_1(q) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad 0 \le q < \frac{1}{2} \\ \langle 0, 1 \rangle & \text{pro} \quad q = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{pro} \quad \frac{1}{2} < q \le 1 \end{cases}$$

Podobně pro druhého hráče:

$$R_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad 0 \le p \le \frac{1}{2} \\ \langle 0, 1 \rangle & \text{pro} \quad p = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pro} \quad \frac{1}{2} \le p \le 1 \end{cases}$$

Křivky můžeme znázornit v rovině takto:



Rovnovážný bod je tedy

$$\left(\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right), \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right).$$

Budou-li se hráči držet těchto strategií, bude očekávaná výhra každého z nich rovna nule.

Užitečný princip při smíšených strategiích:

Smíšená strategie $s^* = (p_1, \ldots, p_m)$ *je nejlepší odpovědí na* t^*, *právě když každá z ryzích strategií, jimž* s^* *přiřazuje nenulovou pravděpodobnost, je nejlepší odpovědí na* t^*.
Hráč, který optimalizuje použitím smíšené strategie, je proto indiferentní mezi všemi ryzími strategiemi, jimž daná smíšená strategie přiřazuje nenulovou pravděpodobnost.

(Uvědomme si, že kdyby byla například ryzí strategie s_1 v dané situaci výhodnější než s_2, pak kdykoli bychom se chystali použít s_2, bylo by lepší použít s_1 – nejednalo by se tedy o rovnovážný bod.)

☛ ***Příklad 7***.

Hráč 2

Hráč 1	Strategie	t_1	t_2
	s_1	$(4, -4)$	$(-1, -1)$
	s_2	$(0, 1)$	$(1, 0)$

Očekávané výhry:

$$\begin{aligned} \pi_1(p,q) &= 4pq - p(1-q) + 0 + (1-p)(1-q) \\ &= p(6q-2) - q + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_2(p,q) &= -4pq - p(1-q) + (1-p)q + 0 \\ &= q(-4p+1) - p \end{aligned}$$

Hledejme nejlepší odpovědi hráče 1 na různé volby pravděpodobností q hráče 2:

Je-li $\boxed{0 \leq q < \frac{1}{3},}$ pak $\pi_1(p,q)$ je pro pevnou hodnotu q lineární funkce se zápornou směrnicí, která je **klesající**. Největší hodnoty proto bude nabývat pro nejmenší možnou hodnotu p, tedy pro $p = 0$; v tomto případě platí: $R_1(q) = 0$.

Je-li $\boxed{q = \frac{1}{3},}$ pak $\pi_1(p, \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$; je to tedy **konstantní funkce**, pro kterou je každá hodnota zároveň největší i nejmenší – hráč 1 je proto indiferentní mezi oběma strategiemi, $R_1(\frac{1}{3}) = \langle 0, 1 \rangle$.

Je-li $\boxed{\frac{1}{3} < q \leq 1,}$ pak $\pi_1(p,q)$ je pro pevnou hodnotu q lineární funkce s kladnou směrnicí, která je **rostoucí**. Největší hodnoty proto bude nabývat pro největší možnou hodnotu p, tedy pro $p = 1$; v tomto případě platí: $R_1(q) = 1$.

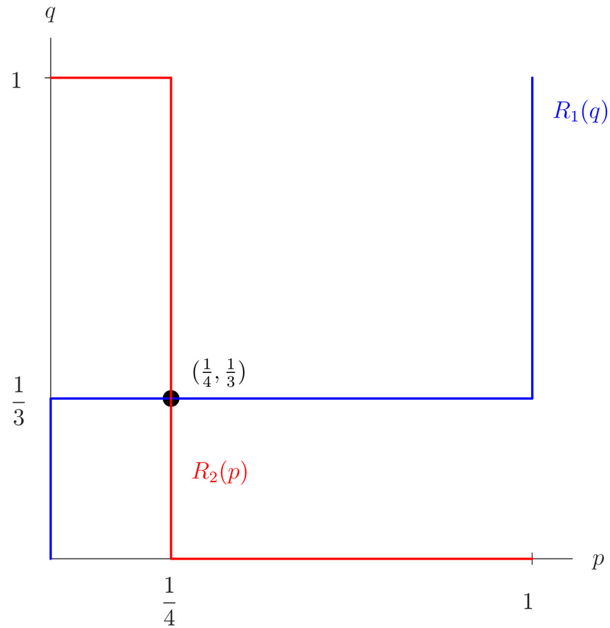
Celkem tedy:

$$R_1(q) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad 0 \leq q < \frac{1}{3} \\ \langle 0, 1 \rangle & \text{pro} \quad q = \frac{1}{3} \\ 1 & \text{pro} \quad \frac{1}{3} < q \leq 1 \end{cases}$$

Podobně pro druhého hráče bude:

$$R_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad 0 \leq p \leq \frac{1}{4} \\ \langle 0, 1 \rangle & \text{pro} \quad p = \frac{1}{4} \\ 0 & \text{pro} \quad \frac{1}{4} \leq p \leq 1 \end{cases}$$

Křivky můžeme znázornit v rovině takto:



Rovnovážný bod je tedy

$$\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right).$$

Budou-li se hráči držet těchto strategií, bude očekávaná výhra prvního hráče $\frac{2}{3}$ a druhého $-\frac{1}{4}$.

Na základě principu, že hráč, který optimalizuje použitím smíšené strategie, je indiferentní mezi všemi ryzími strategiemi, jimž daná smíšená strategie přiřazuje nenulovou pravděpodobnost, lze hledání rovnovážného bodu podstatně zjednodušit (reakční křivky nám však slouží pro lepší pochopení, proč uvedený princip funguje):

Má-li být q rovnovážnou strategií hráče 2, musí být hráč 1 indiferentní mezi svými ryzími strategiemi s_1, s_2. Očekávaná hodnota výhry proto musí být stejná pro obě ryzí strategie hráče 1 při smíšené strategii $(q, 1-q)$ hráče 2:

$$\pi_1(1, q) = 4q - (1-q) = 0 + (1-q) = \pi_1(0, q)$$

$$6q = 2 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{3}$$

Podobně má-li být p rovnovážnou strategií hráče 1, musí být hráč 2 indiferentní mezi svými ryzími strategiemi t_1, t_2. Očekávaná hodnota výhry proto musí být stejná pro obě ryzí strategie hráče 2 při smíšené strategii $(p, 1-p)$ hráče 1:

$$\pi_2(p, 1) = -4p + (1-p) = -p + 0 = \pi_2(p, 0)$$

$$1 = 4p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{4}$$

Opět jsme došli k témuž rovnovážnému bodu $\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$.

Obecný návod pro nalezení smíšeného rovnovážného bodu:

- *Uvažujme dvojmaticovou hru G s maticemi A, B.*
- *Očekávané hodnoty výplatních funkcí zavedené vztahem (4.3) lze vyjádřit jako funkce proměnných $p_1, p_2, \dots p_{m-1}; q_1, q_2, \dots q_{n-1}$, a to na základě vztahů $p_m = 1 - (p_1 + p_2 + \cdots + p_{m-1}), \quad q_n = 1 - (q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1})$.*
- *Uvažujme soustavu rovnic:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial p_i} &= 0 \quad \text{pro všechna } i = 1, 2, \dots, m-1 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q_j} &= 0 \quad \text{pro všechna } j = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Potom každé řešení soustavy (4.4), $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$; $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, *kde*

$$p_i \geq 0, \qquad q_j \geq 0 \qquad \text{pro všechna } i, j$$

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m-1} \leq 1, \qquad q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1} \leq 1,$$

představuje **rovnovážný bod hry ve smíšených strategiích**.

☛ ***Příklad 8***. Nalezněme rovnovážné strategie ve hře „kámen-nůžky-papír“:

		Hráč 2			
		Kámen	Nůžky	Papír	
	Kámen	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)	p_1
Hráč 1	Nůžky	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)	p_2
	Papír	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)	$1-p_1-p_2$
		q_1	q_2	$1-q_1-q_2$	

Očekávané hodnoty výhry:

$$\pi_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = p_1q_2-p_1(1-q_1-q_2)-p_2q_1+p_2(1-q_1-q_2)+(1-p_1-p_2)q_1-(1-p_1-p_2)q_2$$

$$\pi_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \quad 3p_1q_2 - 3p_2q_1 - p_1 + p_2 + q_1 - q_2$$

$$\pi_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = -3p_1q_2 + 3p_2q_1 + p_1 + p_2 - q_1 + q_2$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = \quad 3q_2 - 1 = 0 \qquad \frac{\partial \pi_2}{\partial q_1} = \quad 3p_2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_2} = -3q_1 + 1 = 0 \qquad \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = -3p_1 + 1$$

Řešení: $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$, proto

$$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \big((\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}),\ (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) \big)$$

Hry s více rovnovážnými body

Zatím jsme se setkávali s příklady, kdy existoval právě jeden rovnovážný bod, ať již v ryzích strategiích či ve strategiích smíšených. Často však existuje více rovnovážných bodů a objevuje se otázka, který z nich uvažovat jako optimální.

Začněme několika definicemi.

Definice 7. Nechť $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ je rovnovážný bod dvojmaticové hry G, pro který platí:

$$\pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \geq \pi_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) \qquad \text{a zároveň} \qquad \pi_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \geq \pi_2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$$

pro libovolný rovnovážný bod $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ hry G. Potom se $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ nazývá **dominujícím rovnovážným bodem hry** G.

Existuje-li ve hře jediný rovnovážný bod, je zřejmě dominující (viz příklady výše).

☞ ***Příklad 9***. Uvažujme hru danou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} \underline{(3,2)} & (-1,1) \\ (-2,0) & \boxed{(6,5)} \end{pmatrix}$$

Existují dva rovnovážné body v ryzích strategiích, a to (s_1, t_1) a (s_2, t_2). Druhý z nich dominuje prvnímu, neboť pro hodnoty výplatních funkcí platí: $6 > 3$ a $5 > 2$. Pro oba hráče je nejvýhodnější zvolit druhou strategii.

☛ ***Příklad 10***. Uvažujme hru danou dvojmaticí

Hráč 2

Hráč 1		t_1	t_2	t_3
	s_1	(-2,-2)	(-1,0)	$\boxed{(8,6)}$
	s_2	(0,-1)	$\underline{(5,5)}$	(0,0)
	s_3	$\boxed{(8,6)}$	(0,-1)	(-2,-2)

V této hře existují tři ryzí rovnovážné body: $(s_1, t_3), (s_2, t_2), (s_3, t_1)$. První a poslední z této trojice jsou dominující. Protože však hráči nemají možnost se domluvit, mohlo by se stát, že i při nejlepší vůli by zvolili strategie (s_1, t_1) nebo (s_3, t_3) a dosáhli by tak těch nejhorších možných výsledků.

Definice 8. Nechť $(\boldsymbol{p}^{(j)}, \boldsymbol{q}^{(j)})$, $j \in J$, jsou rovnovážné body dvojmaticové hry G. Tyto body se nazývají **záměnné**, jestliže se hodnota výplatních funkcí $\pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ a $\pi_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ nezmění, dosadíme-li za $\boldsymbol{p}$ libovolné $\boldsymbol{p}^{(j)}$, $j \in J$ a za $\boldsymbol{q}$ libovolné $\boldsymbol{q}^{(j)}$, $j \in J$.

☛ ***Příklad 11***. Pozměňme dvojmatici z předchozího příkladu:

Hráč 2

		t_1	t_2	t_3
	s_1	$\boxed{(8,6)}$	(-1,0)	$\boxed{(8,6)}$
Hráč 1	s_2	(0,-1)	$\underline{(5,5)}$	(0,0)
	s_3	$\boxed{(8,6)}$	(0,-1)	$\boxed{(8,6)}$

Nyní jsou všechny dominující rovnovážné body (s_1, t_1), (s_1, t_3), (s_3, t_1) a (s_3, t_3) záměnné a nemůže nastat nepříjemnost z předchozího příkladu.

Tato skutečnost motivuje následující definici.

Definice 9. Optimálními body hry G se nazývají všechny záměnné dominující rovnovážné body dané hry G. Existují-li v dané hře tyto body, nazývá se hra **řešitelná**.

☛ ***Příklad 12*** – **Konflikt typu manželský spor.**

Představme si manželský pár, v němž mají partneři poněkud odlišné názory na nejlepší využití volného večera: žena dává přednost návštěvě boxu, muž fotbalu. Půjdou-li na box, přinese to větší užitek ženě a menší muži, půjdou-li na fotbal, bude tomu naopak. Půjde-li však každý jinam, bude výsledkem celkové rozladění a užitek bude pro každého z nich menší, než by tomu bylo v případě návštěvy méně preferované akce. Situaci si můžeme znázornit například následující dvojmaticí popisující užitek pro ženu a muže při jednotlivých kombinacích trávení volného večera:

Pepíček

Maruška

Strategie	Box		Balet
Box	$\boxed{(\mathbf{2}, \mathbf{1})}$	$\leftarrow$	$(0, 0)$
	$\uparrow$		$\downarrow$
Balet	$(0, 0)$	$\rightarrow$	$\boxed{(1, 2)}$

Rovnovážné body v ryzích strategiích: (Box, Box), (Balet, Balet)

Rovnovážný bod ve smíšených strategiích:

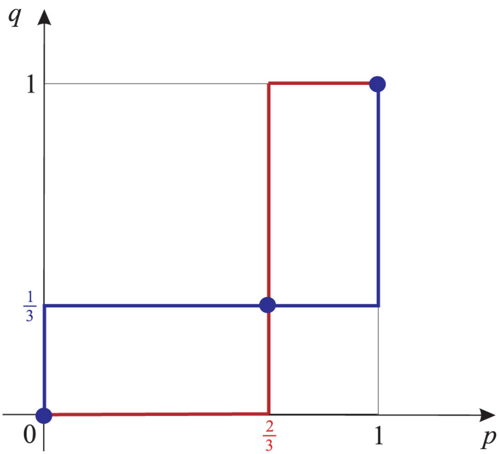
$$\pi_1(p, q) = 2pq + 1(1-p)(1-q) = 3pq - p - q + 1$$

$$\pi_2(p, q) = 1pq + 2(1-p)(1-q) = 3pq - 2p - 2q + 1$$

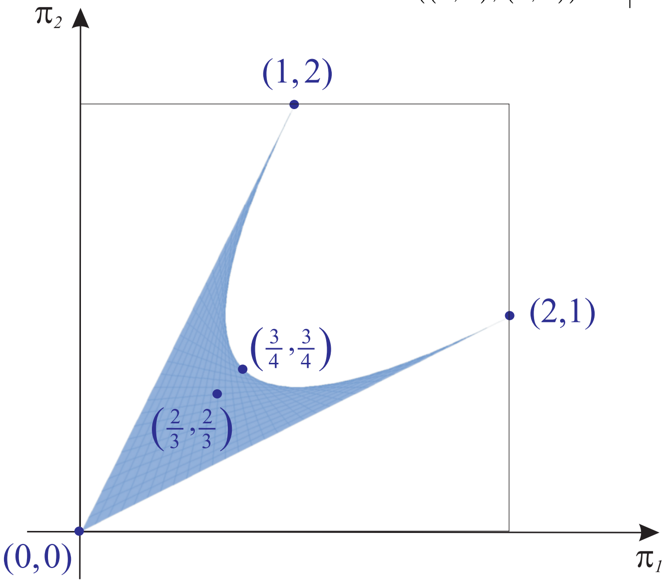
$$\pi_1(p,q) = p(3q-1) - q + 1, \qquad \pi_2(p,q) = q(3p-2) - 2p + 1$$

Reakční křivky:

$$R_1(q) = \begin{cases} 0 & \dots\ q \in \langle 0, \frac{1}{3}) \\ \langle 0, 1\rangle & \dots\ q = \frac{1}{3} \\ 1 & \dots\ q \in (\frac{1}{3}, 1\rangle \end{cases} \qquad R_2(p) = \begin{cases} 0 & \dots\ p \in \langle 0, \frac{2}{3}) \\ \langle 0, 1\rangle & \dots\ p = \frac{2}{3} \\ 1 & \dots\ p \in (\frac{2}{3}, 1\rangle \end{cases}$$



Rovnovážný bod	Očekávaná výhra
$((1,0),(1,0))$	$(2,1)$
$((\frac{1}{3},\frac{2}{3}),(\frac{2}{3},\frac{1}{3}))$	$(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$
$((0,1),(0,1))$	$(2,1)$



Tato hra není řešitelná ve smyslu definice 8, neboť žádný z rovnovážných bodů není dominující.

✒ *Příklad 13* – Samaritánovo dilema

Představme si, že Ministerstvo práce a sociálních věcí řeší problém, do jaké míry podporovat nezaměstnané. Jestliže se dotyčný snaží najít práci, pak je výhodnější jej podpořit, aby se mohl například rekvalifikovat a získat lépe placené místo – státu pak odvede vyšší daně. Jestliže se však nikterak nesnaží, je výhodnější jej nepodpořit (nepočítáme-li případný nárůst kriminality). Z hlediska nezaměstnaného je výhodné hledat práci jen tehdy, když nemůže být na státní podpoře.

Uvažujme například následující hodnoty odpovídající jednotlivým situacím:

Nezaměstnaný

	Strategie	Snažit se		Flákat se
	Podpořit	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})$	$\rightarrow$	$(-1, 3)$
Ministerstvo		$\uparrow$		$\downarrow$
	Nepodpořit	$(-1, 1)$	$\leftarrow$	$(0, 0)$

Uvědomme si, že podobný problém známe i na "soukromé" úrovni: rodiče se například někdy rozhodují, do jaké míry mají pomoci lenošnému dítěti.

Řešení.

Nezaměstnaný

	Strategie	Snažit se		Flákat se
Ministerstvo	Podpořit	$(\mathbf{3},\mathbf{2})$	$\rightarrow$	$(-1,3)$
		$\uparrow$		$\downarrow$
	Nepodpořit	$(-1,1)$	$\leftarrow$	$(0,0)$

Snadno ověříme, že ve hře neexistují ryzí rovnovážné strategie.

Budeme proto hledat strategie smíšené. Označíme-li jako obvykle p pravděpodobnost, s níž ministerstvo zvolí strategii *podpořit*, a q pravděpodobnost, s níž nezaměstnaný zvolí strategii *flákat se*, pak jsou očekávané výhry jednotlivých účastníků následující:

$$\pi_1(p,q) = q(5p-1) - q, \qquad \pi_2(p,q) = q(-2p+1) + 3p$$

Rovnovážné strategie jsou pak

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right).$$

☞ *Příklad 14* – Boj pohlaví

		Samička		
	Strategie	Zdrženlivá		Nevázaná
Sameček	Věrný	$(\mathbf{2}, \mathbf{2})$	$\rightarrow$	$(5, 5)$
		$\uparrow$		$\downarrow$
	Záletník	$(0, 0)$	$\leftarrow$	$(15, -5)$

Řešení.

Rovnovážné strategie:

$$\left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right), \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right).$$

Tato hra je podrobněji diskutována v kapitole 7 Evoluční teorie her (klikněte pro odkaz)

☛ *Příklad 15* – Bitva o Bismarckovo moře

Jižní Pacifik, 1943: Generál Imamura má za úkol transport japonského vojska přes Bismarckovo moře do Nové Guinei, generál Kenney chce transporty bombardovat. Imamura si musí vybrat mezi kratší severní trasou a delší trasou jižní, Kenney musí rozhodnout, kam má poslat letadla, aby hledala Japonce.

Situaci lze popsat následující dvojmaticí:

Imamura

	Strategie	Severní (kratší)		Jižní (delší)
	Severní	$(2, -2)$	$\leftrightarrow$	$(2, -2)$
Kenney		$\uparrow$		$\downarrow$
	Jižní	$(1, -1)$	$\leftarrow$	$(3, -3)$

Řešení.
Rovnovážný bod: severní trasa pro oba